QUESTION T3 [10 pts]. À la poursuite du zéro absolu

Un cycle de réfrigération doit être réalisé par un système dont les caractéristiques sont adaptées aux températures à atteindre. Il y a cent ans, en 1926, le chimiste William Giauque et, indépendamment, le physicien Peter Debye ont proposé les sels paramagnétiques comme systèmes idéaux pour abaisser les températures bien en dessous de 1 K. En effet, dès la décennie suivante, des températures aussi basses que 0,0044 K furent atteintes (Wander de Haas et Gerrit Wiersma, 1935, Leiden Cryogenic Laboratories). Dans cette question, le cycle de réfrigération de Carnot paramagnétique est étudié.

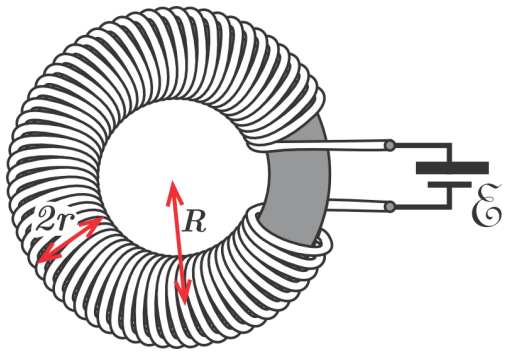


Fig. 3a.

On considère un tore de rayon moyen R et de rayon intérieur r, constitué d'un matériau paramagnétique homogène et isotrope, autour duquel est enroulé un fil conducteur isolé dont les extrémités sont connectées à une source idéale de tension externe (notée $\mathcal{E}$), comme illustré à la figure 3a. La résistance du fil est si faible que les pertes d'énergie dues à l'effet Joule peuvent être négligées. Les N spires sont jointives (N est le nombre total de spires). On suppose que $r \ll R$, de sorte que les champs $\vec{H}$ et $\vec{B}$ ainsi que l'aimantation $\vec{M}$ ont des normes approximativement uniformes dans tout le tore. Soient V et A respectivement le volume et la section transversale du tore. Dans la suite, l'abréviation Pm-T est utilisée pour désigner le tore paramagnétique.

Dans les matériaux paramagnétiques, $\vec{M}$ est parallèle à $\vec{H}$ et la relation suivante est vérifiée :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

Convention de signe pour les transferts d'énergie : dans ce problème, le travail (W) et le transfert thermique (Q) sont considérés comme positifs lorsqu'ils entrent dans le système, et négatifs lorsqu'ils en sortent.

T3-A [1,0 pt]. Travail reçu par le tore paramagnétique Pm-T

Indication : dans les matériaux magnétiques, $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_C$, où I_C est le courant enlacé par la courbe fermée C.

T3-A1 [0,2 pt]. Exprimer H, module de $\vec{H}$ dans le tore, en fonction de N, A, V et du courant électrique instantané I dans le fil.

T3-A2 [0,6 pt]. Soit δW_{emf} l'énergie fournie par la source idéale de tension externe pour changer la norme de $\vec{B}$ de dB. Exprimer δW_{emf} en fonction de V, H, et dB.

T3-A3 [0,2 pt]. L'énergie δW_{emf} fournie par la source de tension peut être divisé en deux parties : le travail δW_{vac} qui serait fourni pour modifier le champ magnétique si le tore était vide et le travail reçu par le tore paramagnétique lui-même, noté δW.
Exprimer δW en fonction de μ_0, H, V et dM.

T3-B [3,0 pts]. Transformations thermodynamiques dans le tore paramagnétique Pm-T

Le tableau suivant présente deux systèmes thermodynamiques : le gaz parfait et le tore paramagnétique Pm-T. On utilisera ces informations, ainsi que la réponse à la question T3-A3, pour résoudre les questions suivantes. Ces informations seront également utilisées dans la partie C. En l'absence de réponse à la question T3-A3, utiliser $\delta W = \alpha V \mu_0 H dM$ où α est un nombre. Le volume V du tore paramagnétique est constant, de sorte qu'il n'y a pas de travail dû à la pression. Ci-dessous, T désigne la température dans tous les cas.

GAZ PARFAIT	TORE PARAMAGNÉTIQUE
Paramètres d'état : P, V et température T	Paramètres d'état : H, M et température T
Constantes : R, γ et nombre de moles n	Constantes : K, λ et nombre de moles n
Équation d'état : $PV = nRT$	Équation d'état : $TMV = nKH$
Capacité thermique à V constant : $C_V = nR/(\gamma - 1)$	Capacité thermique à M constant : $C_M = n\lambda/T^2$
L'énergie interne U dans tout processus satisfait $dU = C_V dT$	L'énergie interne U dans tout processus satisfait $dU = C_M dT$

K et λ sont des constantes qui dépendent du matériau paramagnétique du tore. Utiliser directement les équations fournies dans le tableau sans les démontrer.

T3-B1 [1,5 pt]. Si la norme de $\vec{H}$ varie de H_i à H_f à température T constante, le tore paramagnétique Pm-T reçoit un transfert thermique Q.
Exprimer Q en fonction de μ_0, n, K, H_i, H_f, et T.

T3-B2 [1,5 pt]. Si la norme de $\vec{H}$ change au cours d'une transformation adiabatique de H_i à H_f, la température du tore paramagnétique Pm-T varie entre T_i et T_f.
Exprimer $\Delta T = T_f - T_i$ en fonction de μ_0, n, K, λ, H_i, H_f et T_i.

T3-C [6,0 pts]. Réfrigérateur de Carnot du tore paramagnétique Pm-T

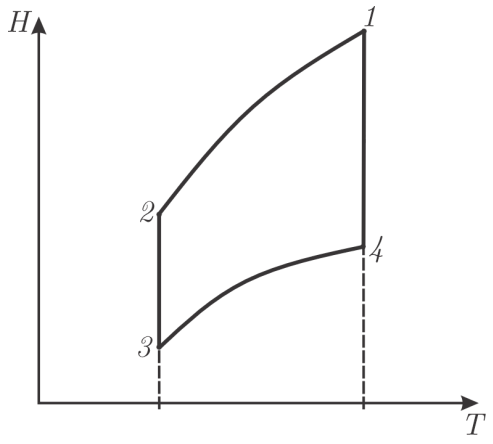


Fig.3b.

Le diagramme H en fonction de T du cycle de réfrigération de Carnot $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ suivi par le tore paramagnétique Pm-T est représenté sur la figure 3b. Dans ce cycle, on définit :

- T_h : température de la source chaude (hot)
- T_c : température de la source froide (cold)
- Q_h : valeur absolue du transfert thermique reçu par le réservoir chaud
- Q_c : valeur absolue du transfert thermique fourni par le réservoir froid

T3-C1 [0,2 pt]. Placer les températures T_h et T_c sur l'axe des températures du diagramme H en fonction de T. Sur le même diagramme, repérer également la transformation associée au transfert thermique Q_h ainsi que celle associée à Q_c.

T3-C2 [1,5 pt]. Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les normes de $\vec{M}$ associées aux points 1 à 4 de ce cycle.
Exprimer M_1 en fonction de M_2, M_3 et M_4.

T3-C3 [0,8 pt]. On suppose que pour refroidir 1,00 L d'hélium liquide initialement à 1,00 K, on utilise un tore paramagnétique constitué de $n = 2{,}0$ moles de *chromate de potassium*. Pour ce matériau, $K = 1{,}87 \times 10^{-6}$ K·m^3/mol, sa densité est 2730 kg/m^3 et sa masse molaire est 0,19 kg/mol. Le tore paramagnétique effectue un cycle de réfrigération de Carnot avec $H_1 = 411624$ A/m, $H_2 = 311306$ A/m, $H_3 = 204618$ A/m et $H_4 = 240446$ A/m.
Après un cycle de fonctionnement, calculer la température finale de l'hélium liquide. On supposera que pour l'hélium liquide, la capacité thermique massique $c = 100$ J/(kg·K) et la densité $\rho = 130$ kg/m^3 restent constantes.

T3-C4 [2,0 pts]. Afin de diminuer continuement la température d'un corps de capacité thermique C_c constante, on effectue des cycles de Carnot élémentaires. On note P la puissance électrique reçue par le réfrigérateur et on la considère constante. On suppose alors que la température T_h de la source chaude reste constante. Pour chaque cycle élémentaire de fonctionnement, la température T_c du corps à refroidir varie de dT_c et les transferts thermiques échangés satisfaisont la relation $\delta Q_c/\delta Q_h = T_c/T_h$.
Si initialement $T_c = T_0$, déterminer le temps t pendant lequel le réfrigérateur de Carnot doit fonctionner pour que le corps à refroidir atteigne une température $T < T_0$. Exprimer la réponse en fonction de C_c, T_h, P, T_0 et T.

T3-C5 [1,5 pt]. L'efficacité d'un réfrigérateur est quantifiée par son *coefficient de performance* $\mathrm{COP} = Q_c/W$.
Déterminer le coefficient de performance COP global du réfrigérateur de la question T3-C4 sur l'ensemble des cycles effectués jusqu'au temps t. Exprimer la réponse en fonction de T_0, T_h et T.