QUESTION T2 [10 pts]. Cuisiner avec la lumière du Soleil ?

La redistribution du flux lumineux entre régions de haute et basse intensité due à la réflexion ou à la réfraction peut conduire à la formation de *caustiques :* il s'agit de courbes formées par l'intersection de rayons lumineux infiniment proches. À titre d'exemple, la figure 2a montre la caustique formée par des rayons incidents parallèlement à l'axe d'un miroir semi-cylindrique. La figure 2b montre une photographie de la caustique formée par la réflexion de la lumière sur le fond d'une tasse de café. Le point le plus brillant et central de la caustique est appelé le "*cusp*". En ce point, l'intensité lumineuse est maximale.

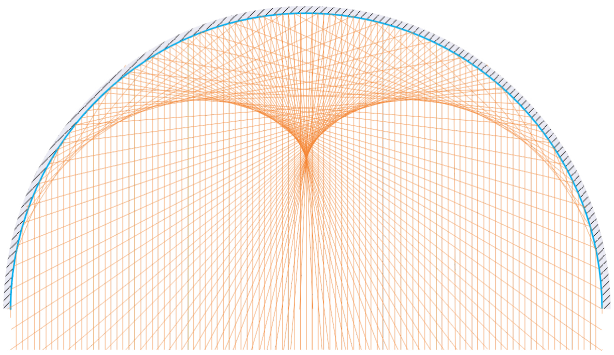


Fig. 2a.



Fig. 2b.

Les caustiques ont une variété d'applications en science, allant de l'optique de haute précision et de l'optique quantique à l'astrophysique. Dans ce problème, on étudie la formation de caustiques par réflexion de la lumière sur un miroir semi-cylindrique de rayon R, comme illustré à la figure 2c. On examine également d'autres aspects de ce miroir, tels que son application dans les *cuiseurs solaires*.

Tout au long du problème, on suppose que les rayons incidents proviennent d'une source lumineuse externe éloignée et sont parallèles à l'axe optique du miroir. Par symétrie, il suffit d'étudier la réflexion dans un plan. La figure 2d montre un tel plan, le miroir, ainsi que le système de coordonnées utilisé dans toute la suite.

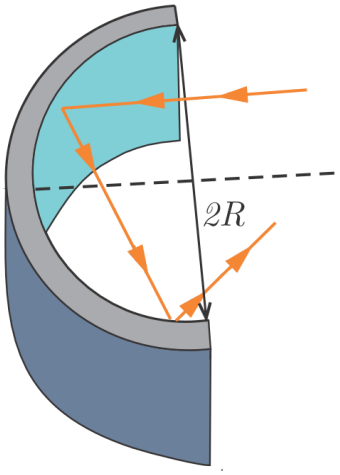


Fig. 2c.

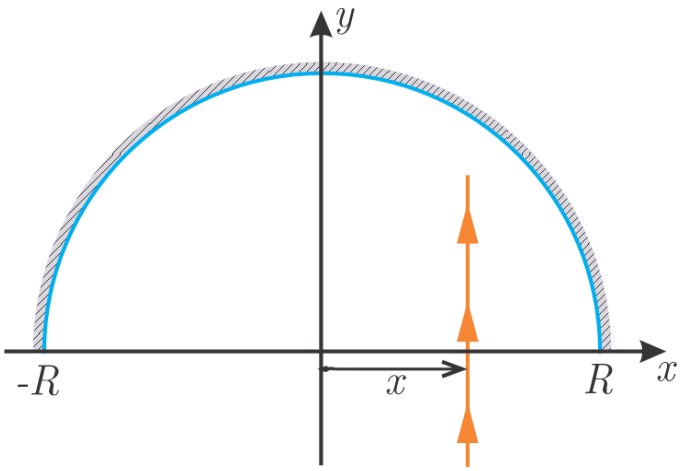


Fig. 2d.

T2-A [1,5 pt]. Réflexions multiples

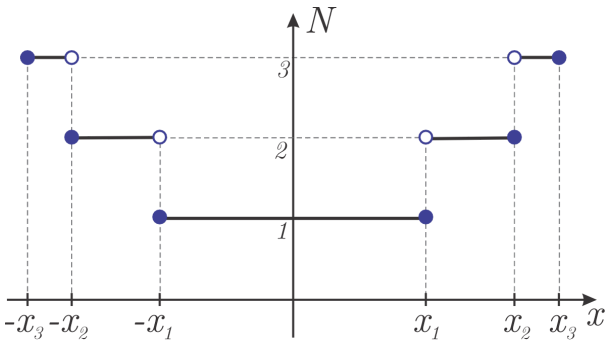


Fig. 2e.

La figure 2e illustre la relation entre l'abscisse x d'un rayon incident et le nombre N de réflexions qu'il subit, jusqu'à $N = 3$. Lorsque x varie sur l'intervalle $[-R, R]$, la variable N varie pour tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. La distance maximale à l'axe optique permettant à un rayon incident d'être réfléchi par le miroir au plus N fois est notée x_N.

T2-A1 [1,5 pt]. Déterminer l'expression générale de x_N dans la suite infinie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ qui limite les coordonnées des rayons ayant au plus N réflexions. Exprimer la réponse en fonction de R et N.

T2-B [4,0 pts]. Cuiseur solaire

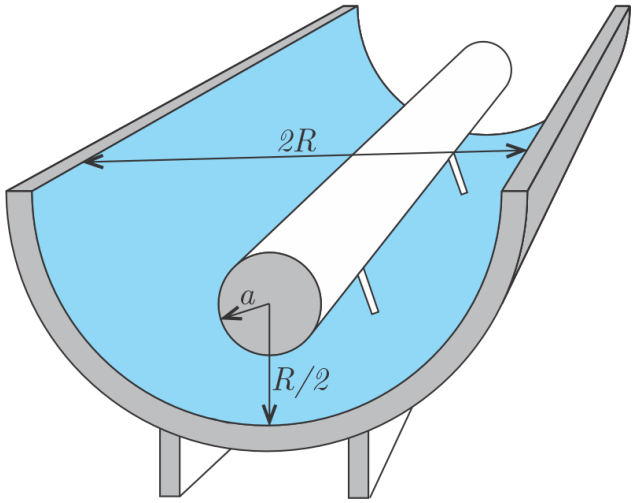


Fig. 2f.

On considère un système composé d'un miroir semi-cylindrique et d'un récipient cylindrique. Le cylindre est totalement absorbant : tout rayon lumineux qui le frappe est absorbé. Le rayon du miroir est R. Le rayon du récipient est a. Les axes du miroir et du récipient sont parallèles. Le centre du récipient est situé à $R/2$ du miroir sur le plan de symétrie du système, comme illustré sur la figure 2f. Le miroir capte le rayonnement solaire pour chauffer les aliments contenus dans le récipient.

On suppose que la lumière solaire a une intensité constante et uniforme (puissance par unité de surface) et que les rayons lumineux sont verticaux, parallèles à l'axe optique du miroir. On suppose également que a est tel que tout rayon absorbé par le cylindre est réfléchi au plus une fois par le miroir. Soit $\theta_{\max}$ l'angle d'incidence maximal sur le miroir (mesuré par rapport à la normale au point d'incidence) de tout rayon réfléchi atteignant le récipient.

T2-B1 [2,0 pts]. Le rayon du récipient est $a = \alpha \sin(\theta_{max}) + \beta \sin(2\theta_{max})$. Exprimer α et β en fonction de R.

Si α et β ne sont pas trouvés, utiliser l'expression donnée pour le reste du problème.

T2-B2 [1,5 pt]. Soit P_0 la puissance qui serait reçue par le cylindre si le miroir était absent. Exprimer P/P_0, rapport de la puissance réellement reçue P avec P_0, en fonction de $\theta_{\max}$.

T2-B3 [0,5 pt]. Pour $R = 1,0$ m, calculer la valeur de a telle que $P = 5P_0$. Donner la réponse en cm.

T2-C [4,5 pts]. Caustiques et *cusps*

T2-C1 [0,5 pt]. On considère un rayon A qui frappe le miroir avec un angle θ, comme illustré sur la figure 2g. Après réflexion, l'équation correspondant à ce rayon dans le système de coordonnées défini sur la figure 2g est $y = m_A x + b_A$.
Exprimer m_A et b_A en fonction de θ et R.

Indication : les résultats attendus sont de la forme $m_A = K_1 \operatorname{cotan}(K_2\theta)$ *et* $b_A = R\frac{K_3}{\cos(K_4\theta)}$, *avec* K_i *des constantes numériques.*

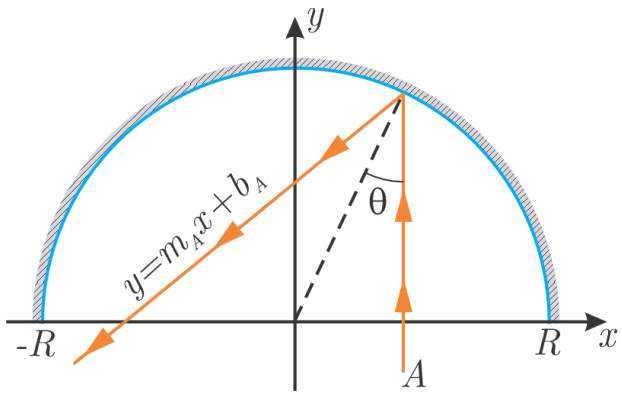


Fig. 2g.

T2-C2 [2,0 pts]. On considère un rayon B, parallèle à A, qui frappe la surface avec un angle $\theta + \Delta\theta$, tel que $\Delta\theta \ll \theta$. Après réflexion, l'équation de ce rayon est $y = m_B x + b_B$.
Exprimer m_B et b_B en fonction de θ, $\Delta\theta$ et R, en les approchant au premier ordre en $\Delta\theta$.

T2-C3 [1,0 pt]. Déterminer les coordonnées du point d'intersection (X_c, Y_c) entre les rayons issus des réflexions des rayons A et B. Exprimer la réponse en fonction de R et θ.

T2-C4 [1,0 pt]. Pour $\theta \ll 1$, on a $Y_c = v|X_c|^{p/q} + u$. Exprimer v et u en fonction de R et déterminer les valeurs des entiers p et q (ou, de manière équivalente, déterminer le nombre rationnel p/q).