

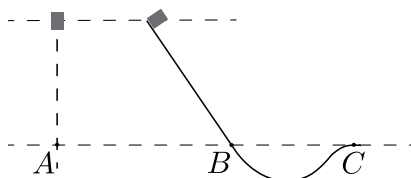
Partie A

Questionnaire à choix multiples

Durée conseillée : 1 heure.

Pour chaque question, les candidats entoureront la réponse de leur choix sur le document réponse. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question. Aucune justification n'est demandée.

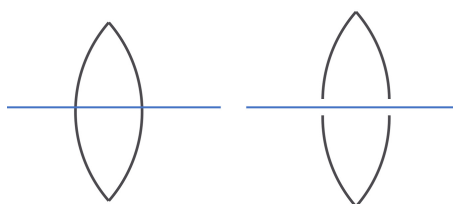
- Q1.** La figure montre deux situations où un bloc de vitesse initiale nulle est soit lâché, soit en glissade sur une rampe sans frottement. En quels points A , B ou C la vitesse du bloc est-elle maximale ?



- (a) Point A ; (c) Point C ;
 (b) Point B ; (d) Égalité des vitesses
 aux points A , B et C .

Éléments de solution : Conservation d'énergie, la vitesse est la même pour ces 3 points. La réponse juste est la réponse (d).

- Q2.** On coupe une lentille mince en deux selon le plan de symétrie indiqué sur le schéma ci-dessous. La lentille mince initiale admet une distance focale image égale à $f' = 20$ cm.



Quelle est la distance focale de chaque demi lentille ?

- (a) $f' = 10$ cm ; (c) $f' = 5$ cm ;
 (b) $f' = 20$ cm ; (d) $f' = -10$ cm.

Éléments de solution : La courbure et l'indice sont inchangés, ainsi la distance focale est inchangée. La réponse juste est la réponse (b).

- Q3.** Considérez les images obtenues quand on n'utilise qu'une moitié de la lentille dans la question précédente (soit la moitié au dessus de l'axe optique, soit la moitié en dessous) et celle obtenue quand on utilise la lentille entière. Laquelle des affirmations suivantes est juste ?

- (a) Quand on utilise la moitié haute de la lentille, la moitié haute de l'image disparaît. De même, quand on utilise le moitié basse de la lentille, la moitié basse de l'image disparaît;
- (b) La luminosité de l'image obtenue avec une moitié de lentille est la moitié de celle obtenue avec la lentille entière;
- (c) Quand on utilise la moitié haute de la lentille, la moitié basse de l'image disparaît. De même, quand on utilise le moitié basse de la lentille, la moitié haute de l'image disparaît;
- (d) Aucune différence dans les images obtenues.

Éléments de solution : Si l'on réfléchit à la formation d'un point de l'image en utilisant la notion de rayons, on constate que, dans tous les cas, on peut construire tous les points de l'objet dans le plan image. Par contre, pour chaque point il manque la moitié des rayons quand on n'utilise que la moitié d'une lentille. La réponse juste est la réponse (b).

- Q4. En mélangeant un volume d'eau froide sorti du réfrigérateur ($T_{\text{froide}} = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$) et un volume d'eau bouillante, on cherche à obtenir un verre de 200 mL d'eau à une température idéale pour infuser notre thé. Le mélange homogène est réalisé dans un thermos, dont on suppose qu'il est hermétique et calorifugé, et on néglige la capacité thermique du thermos. Quel volume d'eau bouillante faut-il utiliser pour que le thé vert qui sera mis dans le thermos soit infusé à une température de $70\text{ }^{\circ}\text{C}$?

- (a) 133 mL; (c) 67 mL;
 (b) 100 mL; (d) 18 mL.

Éléments de solution : Le volume total peut s'écrire $V_{\text{total}} = V_{\text{chaude}} + V_{\text{froide}}$. Comme le fluide est incompressible, le bilan énergétique donne une deuxième équation $V_{\text{froide}} = V_{\text{chaude}} \frac{T_{\text{chaude}} - T_{\text{finale}}}{T_{\text{finale}} - T_{\text{froide}}}$. On résout ce système de deux équations pour trouver $V_{\text{chaude}} = 133\text{ mL}$. La réponse juste est la réponse (a).

- Q5. La pression absolue dans les pneus d'une voiture de course est 280 kPa un matin d'hiver, quand la température est $7\text{ }^{\circ}\text{C}$. Après quelques tours de la piste d'entraînement, la température des pneus monte à $47\text{ }^{\circ}\text{C}$. On suppose que le volume des pneus est constant et qu'il n'y a pas de fuite. Quelle est la pression absolue dans les pneus après l'entraînement?

- (a) 245 kPa; (c) 320 kPa;
 (b) 280 kPa; (d) 1880 kPa;

Éléments de solution : Loi des gaz parfaits $P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1} = 280 \frac{273 + 47}{273 + 7} = 320\text{ kPa}$. La réponse juste est la réponse (c).

- Q6. On s'intéresse à un échantillon de bois, issu d'un sarcophage de momie égyptienne. L'activité du ^{14}C dans le sarcophage est estimée à 0,14 Bq/g alors que celle d'un bois vivant est de 0,23 Bq/g. Le temps de demi-vie du ^{14}C est de $5,7 \times 10^3$ ans.

Le bois de ce sarcophage a été coupé il y a combien d'années?

- (a) $3,5 \times 10^3$ ans; (c) $6,2 \times 10^3$ ans;
 (b) $2,8 \times 10^3$ ans; (d) $4,1 \times 10^3$ ans.

Éléments de solution : La décroissance radioactive suit la loi $\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$. Ainsi on trouve $4,1 \times 10^3$ ans. La réponse juste est la réponse (d).

- Q7. On considère un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 0,53\text{ }\mu\text{m}$, de puissance 1,0 kW, avec un diamètre angulaire de $5,0\text{ }\mu\text{rad}$. Ce faisceau pointe la Lune. La distance Terre-Lune est de $3,8 \times 10^8\text{ m}$.

Quel est le nombre maximum de photons qui arrivent sur la Lune par seconde et par mètre carré?

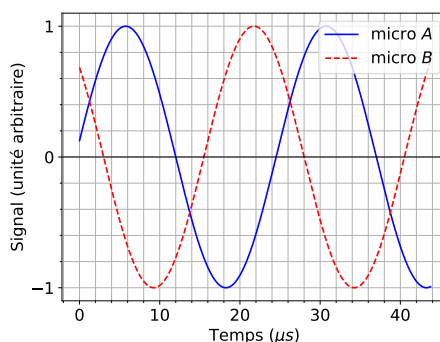
- (a) 10^{15} ; (c) 10^{10} ;
 (b) 10^{28} ; (d) 10^5 .

Éléments de solution : La surface éclairée par le faisceau laser sur la Lune est $\frac{\pi}{4} \times (3,8 \times 10^8)^2 \times (5,0 \times 10^{-6})^2$.

Le nombre de photons émis par le laser par seconde est $\frac{10^3 \times 530 \times 10^{-9}}{6,63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}$

D'où le nombre de photons arrivant par seconde et par mètre carré : $0,94 \times 10^{15}$ d'où 10^{15} .
 La réponse juste est la réponse (a).

- Q8. La même onde ultrasonore de longueur d'onde 3,75 cm est captée par deux microphones. Le microphone A est plus près de la source du son que le microphone B. On suppose que l'onde se propage sans atténuation.

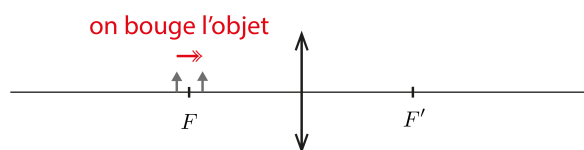


Quelle distance entre les deux microphones est possible ?

- (a) 12 mm; (c) 38 mm;
 (b) 24 mm; (d) 0 m.

Éléments de solution : La distance entre microphones est $\Delta d = c\Delta t$ où $c = \lambda/T$. On peut lire sur le graphe que $T = 25 \mu s$ et $\Delta t = 16 \mu s$. La réponse est donc 24 mm.
 La réponse juste est la réponse (b).

- Q9. Lorsqu'on déplace un objet d'une position située légèrement en amont du foyer principal objet F d'une lentille convergente à une position située légèrement en aval (voir figure), l'image est _____ et _____, puis devient _____ et _____.



Identifier les caractéristiques qui complètes correctement cette phrase :

- (a) agrandie; renversée; agrandie; droite; (c) agrandie; renversée; réduite; droite;
 (b) agrandie; droite; agrandie; renversée; (d) réduite; droite; réduite; renversée.

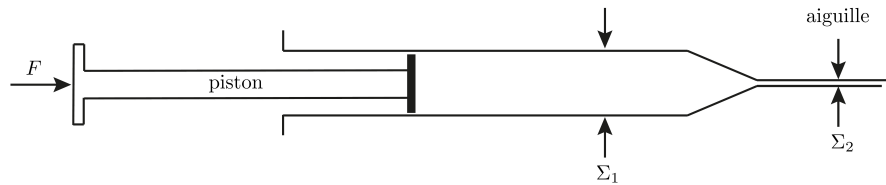
Éléments de solution : Quand l'objet est à une distance de la lentille supérieure à sa focale, l'image est réelle est renversée. Seules les réponses (a) et (c) sont donc possibles. Quand l'objet est plus près que le foyer objet, la lentille devient une loupe. L'image est virtuelle, agrandie et droite.
 La réponse juste est la réponse (a).

- Q10. Un boulet de canon en fer de diamètre 20 cm est retrouvé au fond de la mer Méditerranée. Quelle est l'estimation de la force nécessaire pour le soulever jusqu'à la surface de l'eau ?
 La masse volumique du fer est $7,5 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

- (a) 40 N; (c) 310 N;
 (b) 270 N; (d) 2100 N.

Éléments de solution : La force nécessaire est égale au poids moins la poussée d'Archimède. $F = m_{\text{fer}}g - V_{\text{fer}}\rho_{\text{eau}}g = (\rho_{\text{fer}} - \rho_{\text{eau}}) V_{\text{fer}}g = (7500 - 1000) \times \left(\frac{4\pi}{3}\right) (0,1)^3 \times 9,8 = 267 \text{ N}$. On garde deux chiffres significatifs.
 La réponse juste est la réponse (b).

Q11. On remplit une seringue d'un fluide de masse volumique ρ , considéré comme un fluide parfait incompressible. On modélise cette seringue comme un cylindre de section transversale Σ_1 , qui se rétrécit progressivement en une aiguille de section transversale $\Sigma_2 \ll \Sigma_1$. La seringue est maintenue immobile et à l'horizontale par un opérateur extérieur.



Le piston est poussé lentement vers l'intérieur de la seringue par une force F horizontale, de sorte que le piston se déplace à une vitesse constante v . On considère que le jet d'eau qui sort de l'aiguille est horizontal.

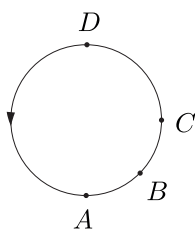
Dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, la quantité $P/\rho + v^2/2 + gz$ est une constante le long d'une ligne de courant (d'après le théorème de Bernoulli).

Quelle expression de F est correcte ?

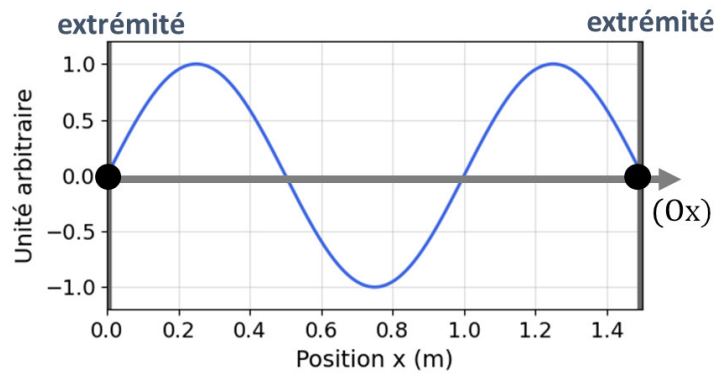
- (a) $F = \frac{\rho \Sigma_1}{2} \left(\frac{\Sigma_1 v}{\Sigma_2}\right)^2$; (c) $F = \frac{\rho \Sigma_2}{2} v^2$;
 (b) $F = \frac{\rho \Sigma_1}{2} v^2$; (d) $F = \frac{\rho \Sigma_1}{2} v^2 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}$.

Éléments de solution : On applique le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant : $P_1/\rho + v^2/2 = P_2/\rho + v_2^2/2$, avec P_2 égal à la pression atmosphérique P_0 .
 Or, le fluide étant incompressible : $\Sigma_1 v = \Sigma_2 v_2$
 $\Sigma_1 \gg \Sigma_2$ d'où $v \ll v_2$
 On en déduit que $P_1 - P_0 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Sigma_1 v}{\Sigma_2}\right)^2 = \frac{F}{\Sigma_1}$
 Soit $F = \frac{\rho \Sigma_1}{2} \left(\frac{\Sigma_1 v}{\Sigma_2}\right)^2$.
 La réponse juste est la réponse (a).

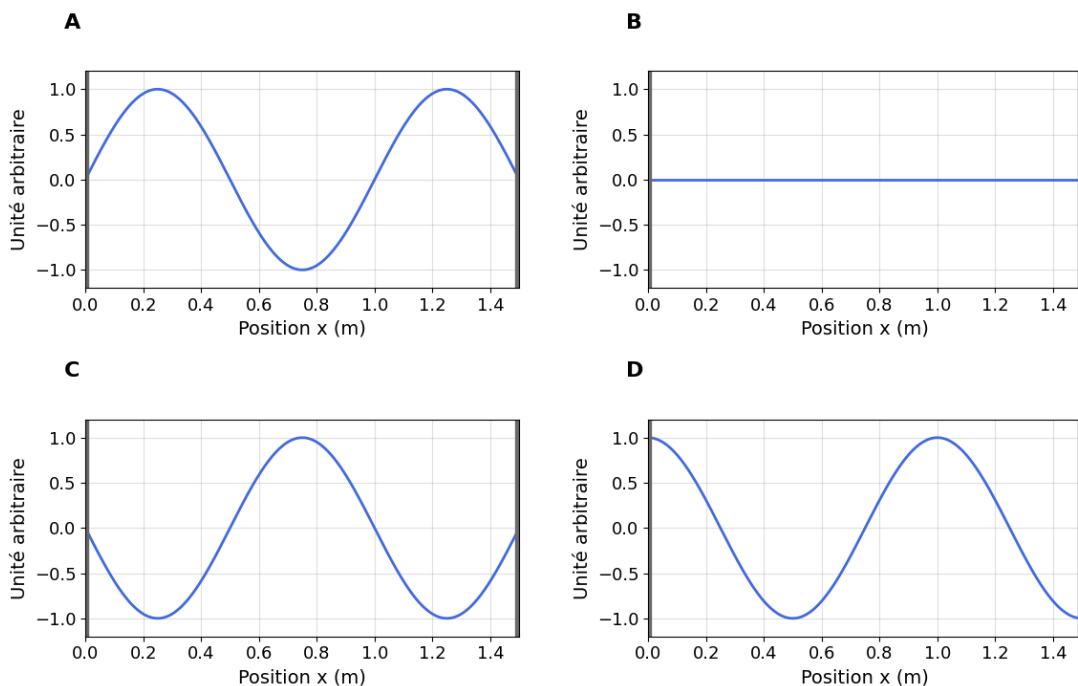
Q12. Un enfant court en cercle dans le sens anti-horaire, tel qu'illustré sur le schéma ci-dessous. Son grand-père est assis au point S et siffle une note.



En quel point de sa trajectoire l'enfant entend-il le son le plus aigu ?



Quelle figure représente la corde à l'instant $t + 60 \text{ ms}$?



- (a) graphique A;
 (b) graphique B;

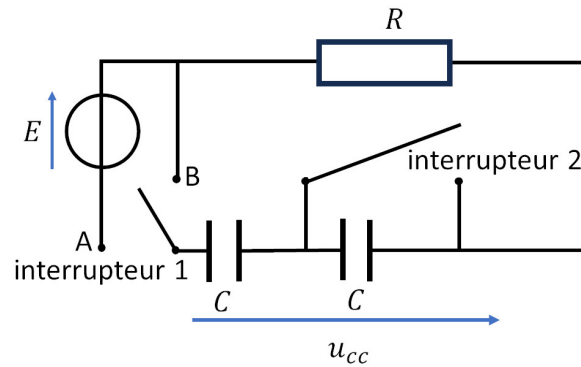
- (c) graphique C;
 (d) graphique D.

Éléments de solution : On observe 6 périodes après, ainsi l'allure est inchangée.
 La réponse juste est la réponse (a).

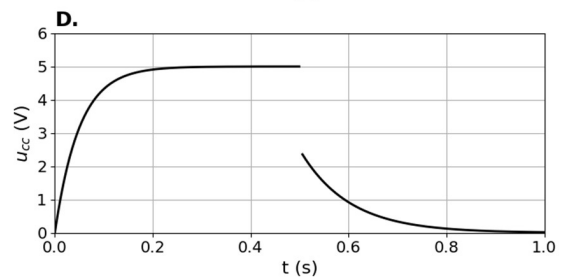
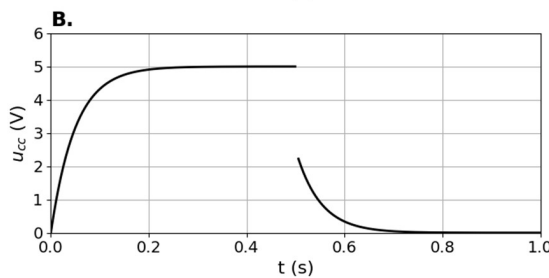
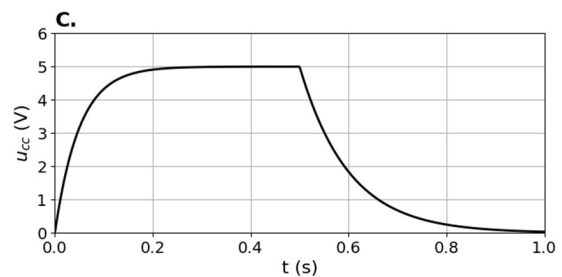
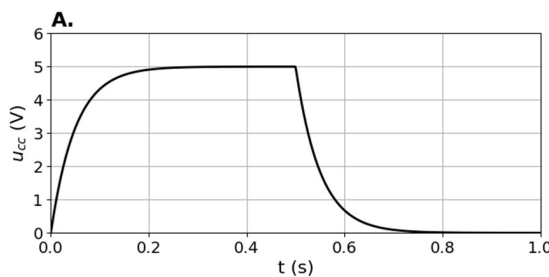
Q15. On considère un circuit électrique qui comprend un générateur de tension continue $E = 5 \text{ V}$, deux condensateurs identiques, une résistance et deux interrupteurs.

Initialement, l'interrupteur 2 est ouvert, l'interrupteur 1 est en position B et les deux condensateurs sont déchargés. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur 1 en position A et l'interrupteur 2 reste ouvert. À l'instant $t = 0,5 \text{ s}$, on bascule l'interrupteur 1 en position B et l'interrupteur 2 est fermé.

L'association en série de deux condensateurs de capacité C est équivalente à un condensateur de capacité $C/2$.



Quel graphique ci-dessous correspond à l'évolution de la tension aux bornes des deux condensateurs, notée u_{CC} sur le schéma ?



- (a) graphique A ;
 (b) graphique B ;

- (c) graphique C ;
 (d) graphique D.

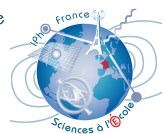
Éléments de solution : Entre $t = 0$ et $t = 0,5$ s, l'association des deux condensateurs en série (équivalente à un condensateur de capacité $C/2$) se charge.

Quand on ferme le deuxième interrupteur, on décharge quasi instantanément le deuxième condensateur. La tension u_{CC} devient alors égale à 2,5 V quasi instantanément.

Puis, l'évolution de la tension u_{CC} correspond à la décharge d'un condensateur de capacité C . La constante de temps est donc doublée par rapport à la charge entre $t = 0$ et $t = 0,5$ s. C'est donc le graphique D qu'il faut considérer.

La réponse juste est la réponse (d).

Fin de la partie A



Partie B

Exercice 1

Orage ! Ô désespoir !

Durée conseillée : 30 minutes.

Les éclairs sont parmi les phénomènes naturels les plus violents observables sur Terre. Ces phénomènes spectaculaires peuvent être approchés par des mécanismes simples : une charge lente du nuage, un claquage brutal de l'air, puis une décharge rapide de foudre dans un canal de plasma.

Un plasma est un gaz ionisé – composé d'ions et d'électrons libres – globalement neutre et de forte conductivité électrique.

Le nuage d'orage, l'air et le sol : analogie électrocinétique

Lors d'un orage, les mouvements internes du cumulonimbus (nuage d'orage) séparent progressivement les charges électriques et créent une différence de potentiel importante entre le nuage et le sol. On modélise cet ensemble comme les deux armatures d'un condensateur plan de capacité C (voir figure 1). On note $V(t)$ la tension à ses bornes. L'air situé entre le nuage et le sol, relativement isolant, est quant à lui assimilé à une résistance R .



FIGURE 1 – Identification du condensateur.
Source : NOAA

La face inférieure du nuage et le sol sont assimilés aux deux armatures d'un condensateur plan :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

où $d = 1 \text{ km}$ est l'altitude du bas du nuage, $A = 10 \text{ km}^2$ sa superficie et $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique de l'air (supposée égale à celle du vide). La résistance de l'air situé entre le nuage et le sol est assimilée à

$$R = \frac{\rho d}{A}$$

avec $\rho \approx 10^{15} \Omega \cdot \text{m}$ la résistivité de l'air.

Q1. Vérifier l'homogénéité des expressions de la capacité C et de la résistance R . Déterminer les ordres de grandeur de C et R .

La capacité du condensateur est donnée par :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \approx 10^{-7} \text{ F}$$

$$R = \frac{\rho d}{A} \approx 10^{11} \Omega$$

Les mouvements d'air et les collisions de particules de glace à l'intérieur du cumulonimbus entretiennent la séparation des charges électriques, résultant en une accumulation de charges négatives au niveau du bas du nuage et de charges positives en haut du nuage. On modélise ce phénomène par un courant constant d'intensité $I \approx 1 \text{ A}$ à l'intérieur du nuage. Le schéma équivalent de l'ensemble {nuage, air, sol} est représenté sur la figure 2.

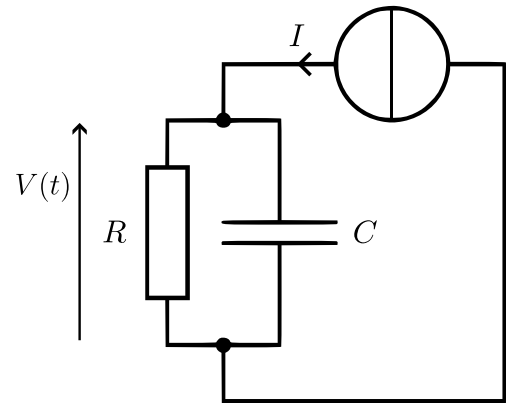


FIGURE 2 – Modèle RC du système composé du nuage, de l'air et du sol.

Q2. Déterminer l'équation différentielle sur la tension $V(t)$, puis sur $u(t) = RI - V(t)$, faisant intervenir les grandeurs R et C supposées constantes. La résoudre pour trouver l'expression de $V(t)$, en supposant qu'initialement le nuage est déchargé.

On a un circuit RC parallèle alimenté par un générateur de courant :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{RC} = \frac{I}{C}$$

d'où :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0$$

L'intégration donne :

$$u(t) = Ae^{-t/\tau},$$

avec $\tau = RC$ et A une constante d'intégration à déterminer. Ainsi,

$$V(t) = RI - Ae^{-t/\tau}.$$

Or, $V(0) = 0$, donc $A = RI$, et

$$V(t) = RI \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Formation des éclairs

Lorsque l'intensité du champ électrique, supposé uniforme dans le domaine entre le sol et le nuage, dépasse $E^* \approx 3 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, l'air situé dans ce domaine s'ionise (passage à l'état de plasma), permettant le passage des charges. Il en résulte une chute brusque de la résistance de l'air entre le sol et le nuage.

Q3. Donner l'expression de la tension V^* nécessaire pour provoquer un éclair. Faire l'application numérique.

$$V^* = E^* d \approx 3 \text{ GV}$$

On suppose toujours le condensateur initialement déchargé.

Q4. Comparer les ordres de grandeur des tensions V^* et RI . En déduire que l'on peut simplifier l'équation différentielle sur $V(t)$ obtenue à la question 2. Établir un ordre de grandeur de la durée caractéristique τ , au bout de laquelle l'éclair survient, en fonction des grandeurs C , V^* et I supposées constantes. Faire l'application numérique.



On a $V^*/(RI) \approx 10^{-2} \ll 1$. On peut donc négliger le terme $V/(RC)$ devant I/C :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C}.$$

L'intégration avec $V(0) = 0$ donne :

$$\tau_c \approx \frac{CV^*}{I} \approx 3 \text{ s}.$$

Lors du passage de l'éclair, la résistance R^* de l'air ionisé chute brusquement. La résistance linéique est alors de l'ordre de $0,1 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$.

Q5. Évaluer l'ordre de grandeur de la durée τ_e d'un éclair.

$$\tau_e \approx R^*C \approx 10^{-5} \text{ s}$$

Q6. Comparer les deux temps caractéristiques calculés. En déduire que, si I est constant, la décharge des orages se comporte comme un oscillateur. Donner la période T de ces oscillations.

On a une alternance de charges lentes de durées τ_c et de décharges rapides de durées τ_e . La période du cycle est donc :

$$T \approx \tau_c + \tau_e \approx \tau_c \approx 3 \text{ s}$$

Il s'agit d'un oscillateur à relaxation.

Oscillations du courant

Des mesures effectuées au sommet d'une tour météorologique en métal ont montré qu'à l'impact de l'éclair, le courant qui traverse la tour présente des oscillations à haute fréquence. Le signal expérimental d'une mesure de ces oscillations du courant de foudre est représenté sur la figure 3.

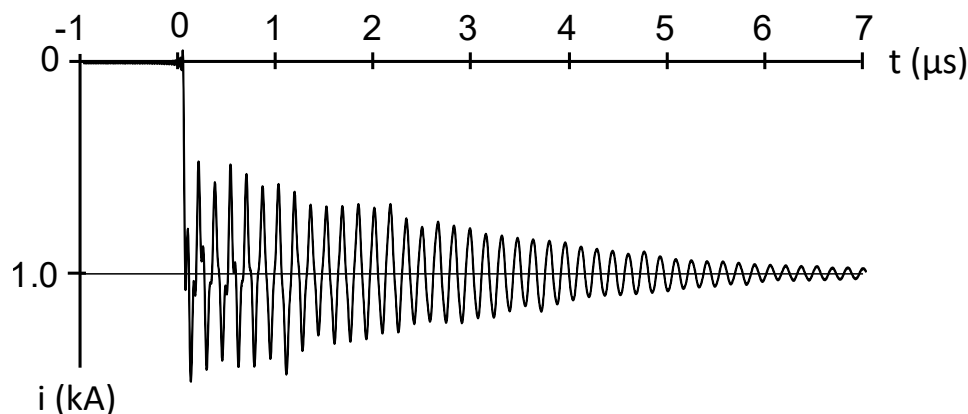


FIGURE 3 – Signal expérimental. Mesure du courant de foudre au sommet d'une tour.

Adapté de F. Heidler and K. Stimpfer, "On the origin of the lightning current oscillation measured at the Peissenberg Tower, Germany," 2016.

On cherche ici à déterminer l'origine physique de ces oscillations. On souhaite tout d'abord tester l'hypothèse suivant laquelle l'air sous le nuage présente également une inductance L (en série avec la résistance R^*), qui aurait été négligée dans la modélisation précédente. Le modèle électrique utilisé serait alors un circuit R^*LC (voir figure 4). Dans ce cas, l'intensité $i(t)$ obéit alors à l'équation d'un oscillateur amorti de pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. On suppose toujours R^* , L , C et I' constants.

Q7. Mesurer la fréquence du courant de foudre et en déduire un ordre de grandeur de l'inductance L .

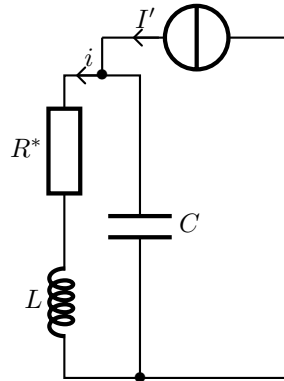


FIGURE 4 – Modèle R^*LC du système composé du nuage, de l'air et du sol.

La fréquence des oscillations est de 6 MHz. Comme le nombre d'oscillations est élevé (oscillateur peu amorti), on fait l'approximation :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} \approx 10^{-8} \text{ H}$$

Pour l'oscillateur faiblement amorti, le facteur de qualité $Q = \sqrt{L/C}/R^*$ est environ égal au nombre d'oscillations observables.

Q8. Proposer une estimation du facteur de qualité Q basée sur le nombre d'oscillations du signal expérimental de la figure 3. En déduire l'ordre de grandeur de l'inductance L associée compte-tenu des ordres de grandeur déjà connus pour R^* et C . Conclure sur la validité du modèle proposé.

En comptant le nombre d'oscillations, on obtient $Q \approx 40$. Avec les valeurs numériques obtenues, on a $L \approx 10^{-2} \text{ H}$, soit de 6 ordres de grandeur de différence!

L'inductance mesurée ne dépend probablement pas que de l'air en lui-même, mais certainement de la tour sur laquelle la mesure est faite. En particulier, la géométrie de la tour a un fort effet sur l'inductance et la capacité du système nuage-air-tour-sol, ce qui permet de mesurer des oscillations, qui ne seraient peut-être pas présentes sans la présence de la tour.

Note : Des travaux sur la tour ont eu lieu en 2007, entre deux mesures du courant de foudre, et le changement de géométrie a divisé par deux la fréquence du signal.

Pour aller plus loin : Rakov & Uman, "Lightning : Physics and Effects" (Cambridge University Press, 2003).

Fin de la partie B

Partie C

Exercice 2

Les trous noirs dans l'Univers

Durée conseillée : 30 minutes.

On désigne par le symbole M_S la masse du Soleil, avec $M_S = 2,00 \times 10^{30}$ kg. Le rayon de la Terre est noté R_T avec $R_T = 6,4 \times 10^3$ km. L'année-lumière (symbole : al) est une unité de distance telle que $1 \text{ al} = 9,46 \times 10^{15}$ m. Les constantes physiques utilisées dans cette partie sont fournies en début de sujet. **Cet exercice n'attend pas d'analyse dimensionnelle pour l'établissement des résultats demandés. Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé dans les questions suivantes. Toute réponse doit être justifiée.**

Les trous noirs sont des astres dont l'existence a d'abord été prédite par la théorie de la relativité générale d'EINSTEIN en 1915, avant d'être confirmée par des observations en 2019. Ces astres sont si denses qu'aucun corps ni même la lumière ne peut s'en extraire. Dans cet exercice, on fera référence à trois types de trous noirs :

- les trous noirs **primordiaux**, encore hypothétiques, sont de minuscules trous noirs dont la masse pourrait être aussi faible que 2×10^{-8} kg. Ils se seraient formés au moment du Big Bang ;
- les trous noirs **stellaires** sont le résultat de l'effondrement du cœur d'une étoile massive à la fin de sa vie. Leur masse est comprise entre $3 M_S$ et $15 M_S$;
- les trous noirs **supermassifs**, dont la masse est comprise entre $10^6 M_S$ et quelques $10^9 M_S$, se trouvent au centre de la plupart des galaxies.

Trou noir et mécanique classique

On considère un astre de symétrie sphérique, de masse totale M et de rayon R . On définit la vitesse de libération de cet astre, notée v_{lib} , comme étant la vitesse minimale qu'un corps placé à la surface de l'astre doit avoir pour « échapper » à l'attraction gravitationnelle de ce dernier, c'est-à-dire atteindre une vitesse nulle à une distance infinie de l'astre.

Q1. À l'aide d'une méthode énergétique, montrer que la vitesse de libération pour un tel astre est donnée par

$$v_{\text{lib}} = k_1 \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

avec k_1 une constante numérique sans dimension de l'ordre de l'unité à exprimer.



On se place dans le référentiel \mathcal{R} lié au centre de masse de l'astre étudié (repéré par le point O) qu'on suppose galiléen. On étudie un système (S) situé à la surface de l'astre composé d'un point matériel M de masse m . Son énergie cinétique E_c est

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

avec v la norme de sa vitesse. Son énergie potentielle gravitationnelle E_p est

$$E_p = -\frac{G M m}{r} + K$$

avec r la distance $\|\vec{OM}\|$. K est constante qu'on peut prendre nulle en choisissant $E_p = 0$ en $r \rightarrow +\infty$. L'énergie mécanique de l'objet de masse m est donnée par

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r}$$

Lorsqu'on communique une vitesse telle que $v = v_{\text{lib}}$ à ce corps, sa vitesse tend vers 0 à mesure que r tend vers $+\infty$. On applique le théorème de l'énergie mécanique, appliqué dans \mathcal{R} au système (S) en l'absence de forces non-conservatives, entre un instant initial où le système est à la surface de l'astre en $r = R$ avec une vitesse v_{lib} et un instant final où le système se trouve à une distance infinie de l'astre avec une vitesse nulle.

$$\Delta E_m = E_{m,\text{finale}} - E_{m,\text{initiale}} = 0$$

D'où

$$0 - 0 - \frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{-G M m}{R} = 0$$

soit

$$v_{\text{lib}}^2 = \frac{2 G M}{R}$$

On en déduit alors :

$$v_{\text{lib}} = k_1 \sqrt{\frac{G M}{R}} \quad \text{où} \quad k_1 = \sqrt{2}$$

Dans le cadre de la mécanique classique, on appelle rayon de SCHWARZSCHILD, noté R_{Sch} , le rayon d'un trou noir sphérique dont la lumière ne peut pas s'échapper, c'est-à-dire pour lequel $v_{\text{lib}} = c$.

Q2. Montrer que le rayon de SCHWARZSCHILD pour un trou noir de masse M vérifie

$$R_{\text{Sch}} = k_2 \frac{G M}{c^2}$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide et k_2 une constante numérique sans dimension de l'ordre de l'unité à exprimer. Donner l'ordre de grandeur du rayon R_{Sch} pour un trou noir stellaire.

D'après la définition de l'énoncé, on a $v_{\text{lib}} = c$ pour le trou noir considéré de masse M et de rayon R_{Sch} . Par conséquent,

$$c = k_1 \sqrt{\frac{G M}{R}}$$

On obtient alors

$$c^2 = k_1^2 \frac{G M}{R_{\text{Sch}}}$$

ou encore

$$R_{\text{Sch}} = k_2 \frac{G M}{c^2} \quad \text{avec} \quad k_2 = k_1^2 = 2$$

La masse d'un trou noir stellaire varie entre 3 et 15 M_{\odot} . Pour 3 M_{\odot} , on trouve le rayon

$$R_{\text{Sch},\text{min}} = 3 \times 2 \times \frac{6,68 \times 10^{-11} \times 2,00 \times 10^{30}}{3,00 \times 10^8} = 3 \times 2,97 \times 10^3 \text{ m} = 8,91 \text{ km}$$

et pour 15 M_{\odot} on obtient

$$R_{\text{Sch},\text{max}} = 5 \times R_{\text{Sch},\text{min}} = 5 \times 8,91 \text{ km} = 44,5 \text{ km}$$

On trouve un ordre de grandeur de $1 \times 10^4 \text{ m}$ dans les deux cas.



Observation du trou noir M87*

En 2019, le projet EHT (pour « Event Horizon Telescope ») a permis la première observation d'un trou noir, appelé M87* et situé à une distance $L = 5,02 \times 10^7$ al de la Terre. L'instrument de ce projet est composé de la mise en réseau d'observatoires astronomiques répartis sur toute la surface de la Terre (voir figure 1). La résolution angulaire de cet instrument est équivalente à celle d'un télescope dont le diamètre serait la plus grande distance séparant deux antennes du réseau EHT. La résolution angulaire θ_{res} d'un télescope de diamètre D est

$$\theta_{\text{res}} = \frac{\lambda}{D}$$

avec λ la longueur d'onde du rayonnement observé.

À l'aide de cet instrument, les scientifiques ont pu observer le trou noir sous la forme d'une ombre circulaire se détachant sur un disque de gaz lumineux (figure 2). La lumière émise par le disque a une longueur d'onde $\lambda = 1,3$ mm. Des calculs de relativité générale permettent d'exprimer le rayon de l'ombre, noté R_{ombre} , en fonction de la masse M du trou noir :

$$R_{\text{ombre}} = \sqrt{27} \frac{GM}{c^2}$$



FIGURE 1 – Répartition des observatoires du réseau de l'EHT. Crédits : NRAO.

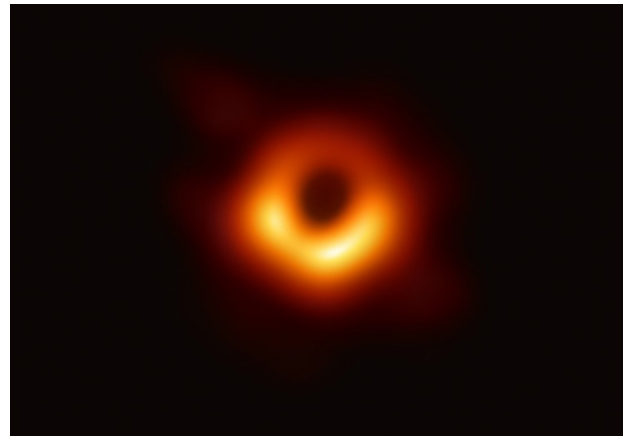
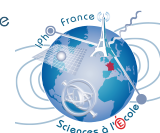


FIGURE 2 – Image du trou noir M87* par l'EHT. Crédits : EHT collaboration.

Q3. Citer un phénomène physique limitant la résolution de tout instrument d'observation en astronomie. En utilisant les figures 1 et 2, montrer que le trou noir M87* possède une masse minimale notée M_{min} dont on donnera l'expression. Faire l'application numérique et exprimer le résultat en masses solaires M_{\odot} . Déterminer la catégorie de trous noirs à laquelle appartient M87*.



La diffraction est un phénomène physique limitant la résolution de tout instrument d'observation en astronomie.

D'après la formule fournie donnant le rayon de l'ombre, plus le trou noir est massif, plus l'ombre observée est grande. La figure 2 permet de distinguer clairement une structure, on voit bien une ombre d'apparence sphérique sur un disque lumineux. Par conséquent, le trou noir est suffisamment massif pour que la taille de l'ombre, située à une distance L de l'instrument, soit bien résolue. Avec l'approximation des petits angles, l'angle θ sous lequel l'ombre du trou noir est vue depuis la Terre est

$$\tan \theta = \frac{R_{\text{ombre}}}{L} \quad \text{soit} \quad \theta \approx \frac{R_{\text{ombre}}}{L}$$

Pour avoir $\theta \geq \theta_{\text{res}}$, il faut que

$$\theta_{\text{res}} \leq \frac{R_{\text{ombre}}}{L} = \frac{\sqrt{27} G M}{L c^2} \quad \text{et} \quad M \geq \theta_{\text{res}} \frac{L c^2}{\sqrt{27} G}$$

Il faut maintenant estimer θ_{res} . Pour cela, on assimile comme suggéré l'EHT à un télescope de diamètre D ce qui donne $\theta_{\text{res}} = \lambda/D$. Le rayonnement est à une longueur d'onde λ fournie. On estime D à partir de la figure 1. On constate que les observatoires astronomiques utilisés et donc leurs antennes sont situés presque partout sur la surface de la Terre. On peut en déduire qu'une distance de l'ordre du diamètre terrestre $2 R_T$ est cohérente pour D (toute valeur de cet ordre de grandeur est acceptée : le diamètre de la Terre, son rayon, une valeur proportionnelle au rayon basée sur un calcul géométrique). Ainsi,

$$\theta_{\text{res}} = \frac{\lambda}{2 R_T}$$

Enfin,

$$M \geq M_{\text{min}} = \frac{L \lambda c^2}{2\sqrt{27} G R_T}$$

L'application numérique donne

$$M_{\text{min}} = \frac{50,2 \times 10^6 \times 9,46 \times 10^{15} \text{ m} \times 1,3 \times 10^{-3} \text{ m} \times (3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2\sqrt{27} \times 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times 6,4 \times 10^6 \text{ m}} = 1,25 \times 10^{40} \text{ kg}$$

On trouve une masse minimale de $6,25 \times 10^9 M_{\text{S}}$. Un tel trou noir appartient à la catégorie des trous noirs supermassifs.

Masse minimale d'un trou noir

On souhaite établir l'expression de la plus petite masse possible pour un trou noir, notée M_0 dans la suite. Pour ce faire, on exploite des résultats de mécanique quantique. On assimile le trou noir à une particule quantique de masse M_0 et d'énergie E .

Q4. Par analogie avec un photon, donner la relation entre l'énergie E de cette particule et sa longueur d'onde λ dans le cadre de la dualité onde-corpuscule. Définir également l'énergie de masse de la particule. En déduire λ_c , appelée longueur d'onde de COMPTON, désignant la longueur d'onde de la particule lorsque son énergie E se réduit à son énergie de masse.

Le cours fournit pour un photon de fréquence ν et d'énergie E_ν la relation de PLANCK-EINSTEIN $E_\nu = h \nu$. La fréquence ν est reliée à la longueur d'onde λ par $\nu = c/\lambda$ si bien que $E_\nu = hc/\lambda$. Par analogie, on propose alors la relation

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Si l'énergie E de la particule est égale à son énergie de masse $M_0 c^2$ lorsque $\lambda = \lambda_c$, on trouve que

$$M_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda_c}$$

si bien que

$$\lambda_c = \frac{h}{M_0 c}$$

Cette particule est confinée dans une boîte de largeur $L = R_{\text{Sch}}$ à une dimension. En notant x la position du trou noir dans la boîte avec l'origine $x = 0$ placée au centre de celle-ci, on admet que la particule est décrite par une



fonction ψ , appelée « fonction d'onde », vérifiant :

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_c} x\right)$$

avec A une constante. Le confinement de la particule se traduit par la condition $\psi(\pm L/2) = 0$.

Q5. Montrer que la plus petite masse possible pour le trou noir vérifie $M_0 = k_3 m_P$ avec k_3 une constante numérique sans dimension de l'ordre de l'unité à exprimer et m_P la masse de PLANCK donnée par

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,18 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

Faire l'application numérique en donnant le résultat en kg. Déterminer la catégorie à laquelle appartiendrait un trou noir ayant cette masse.

Pour un trou noir de masse minimale notée M_0 , le confinement de la particule se traduit par

$$\psi(L/2) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{L}{2} = \pi \times n$$

avec $n \in \mathbb{Z}^*$. On choisit $n = 1$ pour avoir la plus petite valeur positive. Dès lors, on trouve que $\lambda_c = L$. Puisque l'énoncé fournit $L = R_{\text{Sch}} = k_2 G M_0 / c^2$, on trouve que

$$\lambda_c = k_2 \frac{G M_0}{c^2} \quad \text{soit} \quad \frac{h}{M_0 c} = k_2 \frac{G M_0}{c^2}$$

On isole la masse M_0 et on fait apparaître $\hbar = h / (2\pi)$ pour finalement obtenir

$$M_0^2 = \frac{2\pi}{k_2} \frac{\hbar c}{G} \quad \text{donc} \quad M_0 = k_3 m_P \quad \text{avec} \quad k_3 = \sqrt{\frac{2\pi}{k_2}} = \sqrt{\pi}$$

L'application numérique délivre

$$M_0 = \sqrt{\pi} \times 2,18 \times 10^{-8} = 3,86 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

Un tel trou noir appartiendrait à la catégorie des trous noirs primordiaux.

Évolution de la masse d'un trou noir

Cette partie cherche à tester l'hypothèse selon laquelle les trous noirs supermassifs observés dans notre Univers actuel se sont formés à partir de trous noirs primordiaux de très faibles masses eux-mêmes formés au moment du Big Bang. On suppose que l'énergie d'un trou noir est égale à son énergie de masse. Plusieurs phénomènes peuvent modifier la masse d'un trou noir au cours du temps. On considère la combinaison de trois d'entre eux :

1. Un trou noir rayonne de l'énergie à la manière d'un corps noir, entraînant son évaporation progressive. On admet que la température T d'un trou noir de masse M est donnée par

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}$$

où k_B désigne la constante de BOLTZMANN. La loi de STEFAN-BOLTZMANN relie la puissance surfacique P_S rayonnée par un corps noir à sa température T selon :

$$P_S = \sigma T^4$$

où $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ est la constante de STEFAN-BOLTZMANN.

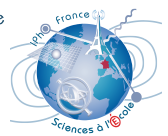
2. Un trou noir voit sa masse augmenter par accrétion de la matière environnante. Pour un trou noir de masse M , le taux d'accrétion moyen \dot{M}_{acc} est donné par

$$\dot{M}_{\text{acc}} = \frac{M}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = 4,5 \times 10^7 \text{ ans.}$$

3. Un trou noir peut voir sa masse augmenter en fusionnant avec d'autres trous noirs proches de lui. La quantité de masse récupérée par unité de temps via ce phénomène, notée \dot{M}_{fus} , s'estime selon

$$\dot{M}_{\text{fus}} = \Gamma M.$$

Le taux de fusion de trous noirs Γ est tel que $\Gamma \leq 1 \times 10^{-7} \text{ ans}^{-1}$.



Q6. À l'aide d'un bilan d'énergie, montrer que la variation de masse d'un trou noir due à l'évaporation, notée \dot{M}_{ray} , est de la forme $\dot{M}_{\text{ray}} = -\alpha/M^2$ avec α une constante. En étudiant les phénomènes proposés, montrer alors que la masse M d'un trou noir vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dM}{dt} = \frac{-\alpha}{M^2} + \beta M$$

avec α et β deux constantes à exprimer. En déduire l'expression de la masse minimale que doit avoir un trou noir (en fonction de α et de β), afin de grossir avec le temps. On fournit $\alpha = 3,95 \times 10^{15}$ SI. Faire l'application numérique et proposer une conclusion sur l'hypothèse de cette partie, en commentant la modélisation.

L'énergie E d'un trou noir est égale à son énergie de masse, ainsi $E = M c^2$ avec M sa masse. Le trou noir perd de l'énergie par rayonnement (phénomène 1) et en gagne par accrétion de matière (phénomène 2) et par fusion d'autres trous noirs (phénomène 3). Commençons par traduire le phénomène 1 de rayonnement. La loi de STEFAN-BOLTZMANN fournit la puissance surface P_s du rayonnement du corps noir

$$P_s = \sigma T^4$$

On en déduit la puissance totale P selon

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

La température T est fournie par l'énoncé. On estime R le rayon du trou noir comme étant R_{Sch} . Par conséquent,

$$P = 4\pi \left(\frac{k_2 G M}{c^2} \right)^2 \times \sigma \times \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \right)^4 = \frac{4\pi k_2^2 G^2}{c^4} \sigma \frac{\hbar^4 c^{12}}{(8\pi)^4 k_B^4 G^4} \times \frac{M^2}{M^4} = \frac{k_2^2}{1024\pi^3} \frac{\sigma c^8 \hbar^4}{k_B^4 G^2} \times \frac{1}{M^2}$$

La puissance P est perdue par le trou noir, ce qui correspond à une perte de puissance par rayonnement notée \dot{E}_{ray} qui se traduit par une perte de masse correspondante $\dot{M}_{\text{ray}} = \dot{E}_{\text{ray}}/c^2$. Ainsi,

$$\dot{M}_{\text{ray}} = \frac{\dot{E}_{\text{ray}}}{c^2} = -\frac{P}{c^2} = -\underbrace{\frac{k_2^2}{1024\pi^3} \frac{c^6 \hbar^4 \sigma}{k_B^4 G^2}}_{=\alpha} \frac{1}{M^2} = \frac{-\alpha}{M^2}$$



On somme les deux contributions des phénomènes 2 et 3 pour obtenir le gain de masse total : $\dot{M}_{\text{gain}} = \dot{M}_{\text{acc}} + \dot{M}_{\text{fus}}$. On obtient

$$\dot{M}_{\text{gain}} = \underbrace{\left(\frac{1}{\tau} + \Gamma\right)}_{=\beta} M = \beta M$$

Finalement, la variation complète de la masse est telle que

$$\dot{M} = \dot{M}_{\text{ray}} + \dot{M}_{\text{gain}} = \frac{-\alpha}{M^2} + \beta M$$

avec $\alpha > 0$. On pose la fonction f définie par

$$f(M) = \frac{-\alpha}{M^2} + \beta M$$

En étudiant sa dérivée, on constate que

$$f'(M) = \frac{2\alpha}{M^3} + \beta > 0$$

car $\alpha > 0$ et $M > 0$. Par conséquent, la dérivée de f étant strictement positive, on en déduit que f est strictement croissante. Ainsi, si la masse initiale M_0 du trou noir est telle que $f(M_0) > 0$, la quantité \dot{M} est toujours strictement positive et le trou noir gagne en permanence de la masse. Autrement, il en perd jusqu'à disparaître. On cherche la masse critique M_{crit} telle que $f(M_{\text{crit}}) = 0$. Celle-ci vérifie

$$\frac{\alpha}{M_{\text{crit}}^2} = \beta M_{\text{crit}} \quad \text{soit} \quad M_{\text{crit}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/3}$$

On trouve pour la masse critique

$$M_{\text{crit}} = 1,01 \times 10^{10} \text{ kg}$$

Cette masse est bien trop grande devant la masse des trous noirs primordiaux pour que ceux-ci puissent donner des trous noirs supermassifs. Ce modèle exclut l'hypothèse formulée en début de partie.

Commentaire plus poussé : les phénomènes 2 et 3 fonctionnent pour des trous noirs suffisamment massifs, ayant une masse plus grande que la masse critique trouvée. En effet, ces modélisations effectives supposent que le trou noir est suffisamment massif pour persister entre deux fusions de trous noirs ou le temps que la masse accrétée puisse être modélisée proportionnellement à la masse du trou noir. Les trous noirs ayant une masse plus petite que M_{crit} vont simplement s'évaporer trop rapidement pour que les phénomènes 2 et 3 entrent en jeu.

Fin de la partie C

Partie D

Problème

Travelling contrarié

Durée conseillée : 1 heure.

Le *travelling contrarié* est un effet de cinéma qui combine un **zoom optique** et un **déplacement réel** de la caméra sur un rail, dans la direction opposée (figure 1). Concrètement, la caméra avance vers le sujet tout en dézoomant, ou recule tout en zoomant, de sorte que la taille apparente du personnage reste constante tandis que l'arrière-plan semble se comprimer ou s'étirer.



FIGURE 1 – Illustration d'une situation de travelling contrarié. Source : thedailyjaws.com

Ce jeu entre mouvement physique et focale modifie la perspective et provoque une sensation de vertige. Inventé par Alfred Hitchcock dans *Sueurs froides* (1958), il a été repris par Steven Spielberg dans *Les Dents de la mer* (1975), lorsque le chef Brody, assis sur la plage, comprend soudain qu'un baigneur vient d'être attaqué par un requin. C'est cette scène particulière, appelée « *Get out of the water* », qui est étudiée dans ce problème (figure 2). Pendant tout le travelling, la mise au point est faite sur la jeune femme placée juste derrière le capitaine Brody.



FIGURE 2 – Illustration du travelling contrarié. Les photos sont extraites de la scène *Get out of the water*

Les photos du tournage de cette scène sont données sur la figure 3.

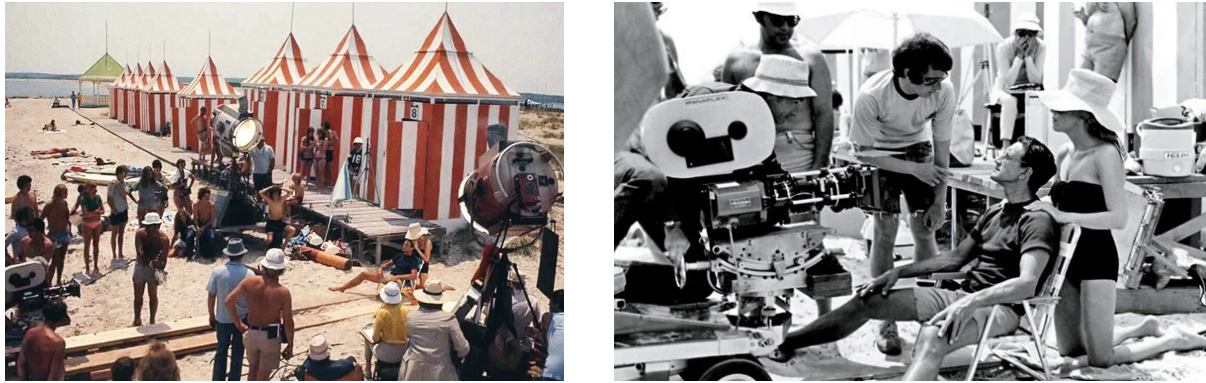


FIGURE 3 – Configuration du tournage de la scène *Get out of the water*. Source : thedailyjaws.com

RELATIONS UTILES

Les relations de Descartes des lentilles minces permettent de déterminer la position de l'image et son grandissement, connaissant la position de l'objet. Les positions de l'objet et de l'image sont repérées par leurs distances algébriques au centre optique O de la lentille : \overline{OA} et \overline{OA}' .

→ Formule de conjugaison de Descartes

$$\frac{1}{\overline{OA}'} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

→ Formule de grandissement de Descartes

$$\gamma = \frac{\overline{OA}'}{\overline{OA}}$$

1 Angle de champ

L'angle de champ (ou champ angulaire) est l'angle α sous lequel la scène photographiée est capturée depuis le centre optique de l'objectif. Il correspond à l'angle formé, au niveau de l'objectif, par deux points de la scène situés aux limites de ce qui est visible sur la photographie. Les images de ces deux points se trouvent sur les bords du cliché (horizontalement, verticalement ou en diagonale; figure 4). Pour s'affranchir de la dépendance de l'angle de champ avec la distance de mise au point – dépendance relativement faible pour les objectifs de focale standard – il est usuellement défini pour une mise au point à l'infini.

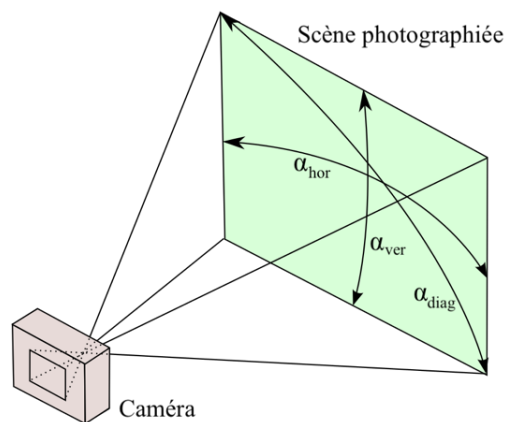


FIGURE 4 – Angle de champ. Source : wikipedia.org

Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de l'angle de champ au cours du travelling, responsable de l'effet de vertige mentionné en introduction. Pour cela, on modélise l'objectif de la caméra utilisée par Spielberg par

l'association d'une simple lentille mince convergente \mathcal{L} , de distance focale f' , et d'un capteur photosensible, ici une pellicule \mathcal{P} de taille L . Le système optique étudié est schématisé sur la figure 5.

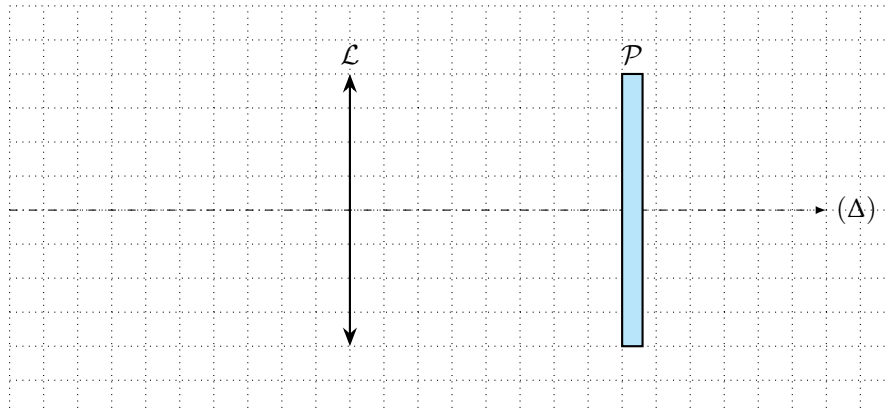


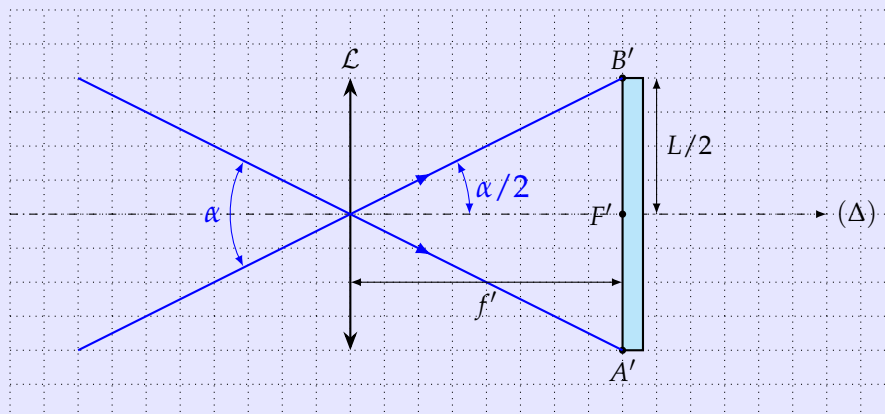
FIGURE 5 – Modèle simplifié de l'objectif de la caméra

Q1. Pour une mise au point à l'infini, préciser où se situe la pellicule \mathcal{P} par rapport à la lentille \mathcal{L} . Justifier.

La mise au point étant faite sur un objet à l'infini, la pellicule \mathcal{P} doit être placée dans le plan focal image de la lentille \mathcal{L} , c'est-à-dire à une distance f' de la lentille \mathcal{L} .

Pour déterminer l'angle de champ, on considère un objet transverse AB situé à l'infini dont les points images conjugués A' et B' se forment sur les bords de la pellicule.

Q2. Sur la figure 5, représenter l'angle de champ α . Établir ensuite son expression en fonction de L et f' .



Géométriquement

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{L}{2f'}$$

On étudie les deux photos ci-dessous, extraites de la scène *Get out of the water*.



Q3. Comparer le champ angulaire de ces photos. En déduire celle qui a été prise avec l'objectif de plus grande focale.

On observe que la photo de gauche est prise avec un champ angulaire plus restreint que celle de droite. En notant α_2 le champ angulaire de la photo de gauche et α_1 le champ angulaire de la photo de droite : $\alpha_2 < \alpha_1$.

La fonction tangente étant strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$

$$\tan(\alpha_2/2) < \tan(\alpha_1/2) \quad \text{soit} \quad \frac{L}{2f'_2} < \frac{L}{2f'_1} \quad \Rightarrow \quad f'_2 > f'_1$$

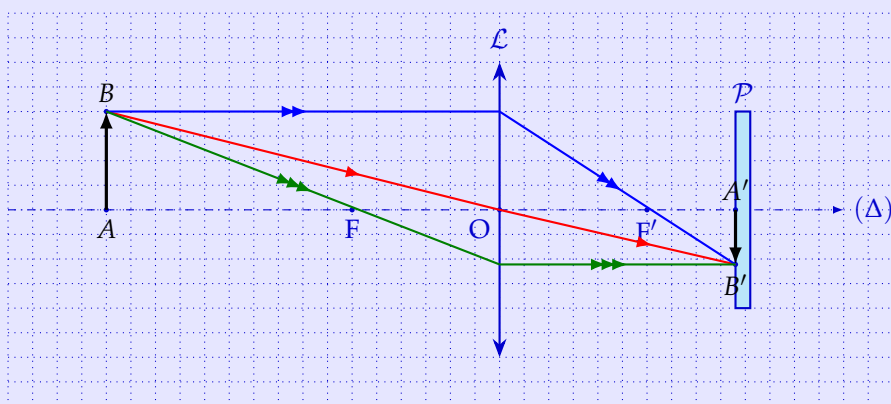
La photo de gauche a donc été prise avec une focale plus grande que la photo de droite.

2 Étude des images de la scène *Get out of the water*

On modélise dans cette partie de façon plus fine la situation du travelling contrarié : l'objectif de la caméra, toujours assimilé à une simple lentille convergente \mathcal{L} de focale f' , est maintenant **mobile**. On rappelle que, par définition du travelling contrarié, la taille apparente du personnage sur lequel la mise au point est faite ne change pas : le grandissement γ est donc constant.

Q4. Sur un schéma, représenter l'objectif \mathcal{L} de la caméra, le personnage sur lequel la mise au point est faite, qu'on assimilera à un objet transverse AB , la pellicule \mathcal{P} ainsi que l'image $A'B'$ qui s'y forme. Le schéma doit représenter la situation de façon réaliste.

On représente la situation sur le schéma ci-dessous :



L'image se forme sur la pellicule \mathcal{P} ; elle est réelle, réduite et renversée.

Q5. On note d la distance entre l'objet sur lequel la mise au point est faite et la lentille \mathcal{L} . Exprimer la focale f' en fonction de la distance d et du grandissement transversal γ uniquement.

D'après la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On multiplie par \overline{OA} pour faire apparaître le grandissement γ :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} - 1 = \frac{\overline{OA}}{f'} \quad \text{Or} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{\overline{OA}}{f'}$$

Avec $d = -\overline{OA} > 0$, on obtient :

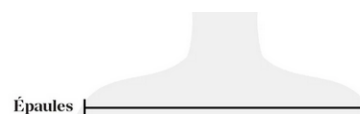
$$\frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{-d}{f'} \Rightarrow \frac{-d}{f'} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{d\gamma}{\gamma-1}}$$

Q6. En exploitant la photo ci-dessous et en détaillant votre démarche, estimer la valeur du grandissement transversal γ au cours du travelling.

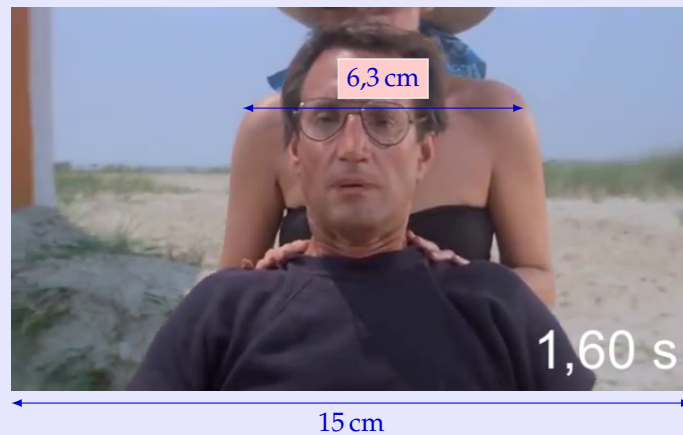


DONNÉES UTILES

- ➔ Dimension du négatif sur la pellicule utilisée par Spielberg : $32,5 \text{ mm} \times 18,6 \text{ mm}$.
- ➔ Pendant tout le travelling, la mise au point est faite sur la jeune femme placée juste derrière le capitaine Brody.
- ➔ Largeur moyenne des épaules d'une femme adulte : $D = 35 \text{ cm}$.



On commence par estimer la taille x de l'image des épaules de la jeune femme (sur laquelle la mise au point est faite) sur la pellicule. On utilise la proportionnalité entre la taille de la pellicule et les mesures sur la photo.



On obtient

$$x = \frac{6,3 \text{ cm} \times 32,5 \text{ mm}}{15 \text{ cm}} = 14 \text{ mm}$$

Ainsi, le grandissement γ a pour valeur

$$\gamma = -\frac{x}{D} = -\frac{13,65 \text{ mm}}{35 \text{ cm}} = \boxed{-3,9 \times 10^{-2}}$$

On attend la valeur de γ avec un ou deux chiffres significatifs.

En observant les photos du tournage (figure 3), on peut estimer les distances minimale et maximale d_{\min} et d_{\max} entre l'objectif de la caméra et le plan de mise au point au cours du travelling de la scène *Get out of the water* :

$$d_{\min} \approx 1 \text{ m} \quad \text{et} \quad d_{\max} \approx 6 \text{ m}$$

Q7. En déduire une estimation des focales minimale et maximale f'_{\min} et f'_{\max} de l'objectif de la caméra utilisée lors de cette scène.

D'après la question 5

$$\boxed{f'_{\min} = \frac{d_{\min} \gamma}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{f'_{\max} = \frac{d_{\max} \gamma}{\gamma - 1}} .$$

Les applications numériques donnent, en ne gardant qu'un seul chiffre significatif

$$\boxed{f'_{\min} = 4 \text{ cm}} \quad \text{et} \quad \boxed{f'_{\max} = 0,2 \text{ m}} .$$

C'est-à-dire environ 40 mm et 200 mm (cohérent avec l'objectif réellement utilisé pour tourner la scène !). On attend les valeurs des focales f'_{\min} et f'_{\max} avec un seul chiffre significatif.

3 Principe de fonctionnement d'un objectif à focale variable

La nécessité de faire varier la focale au cours du travelling a été mise en évidence. Il faut donc désormais affiner la modélisation de l'objectif de la caméra en étudiant le principe de fonctionnement d'un objectif à focale variable.

Les objectifs utilisés en prise de vue cinématographique sont des systèmes optiques très sophistiqués, constitués d'une vingtaine de lentilles. Dans cette partie, on modélise l'objectif de la caméra utilisée par Spielberg par un simple doublet de deux lentilles minces :

- celle du côté objet, appelée « lentille frontale », est convergente de distance focale $f'_1 = 100$ mm et de centre O_1 . Elle est fixe par rapport à la pellicule;
- celle du côté image, appelée « lentille arrière », est divergente de distance focale $f'_2 = -50$ mm et de centre O_2 . Elle est mobile par rapport à la pellicule.

Le système optique étudié est schématisé sur la figure 6 avec $e = \overline{O_1O_2} = 200$ mm.

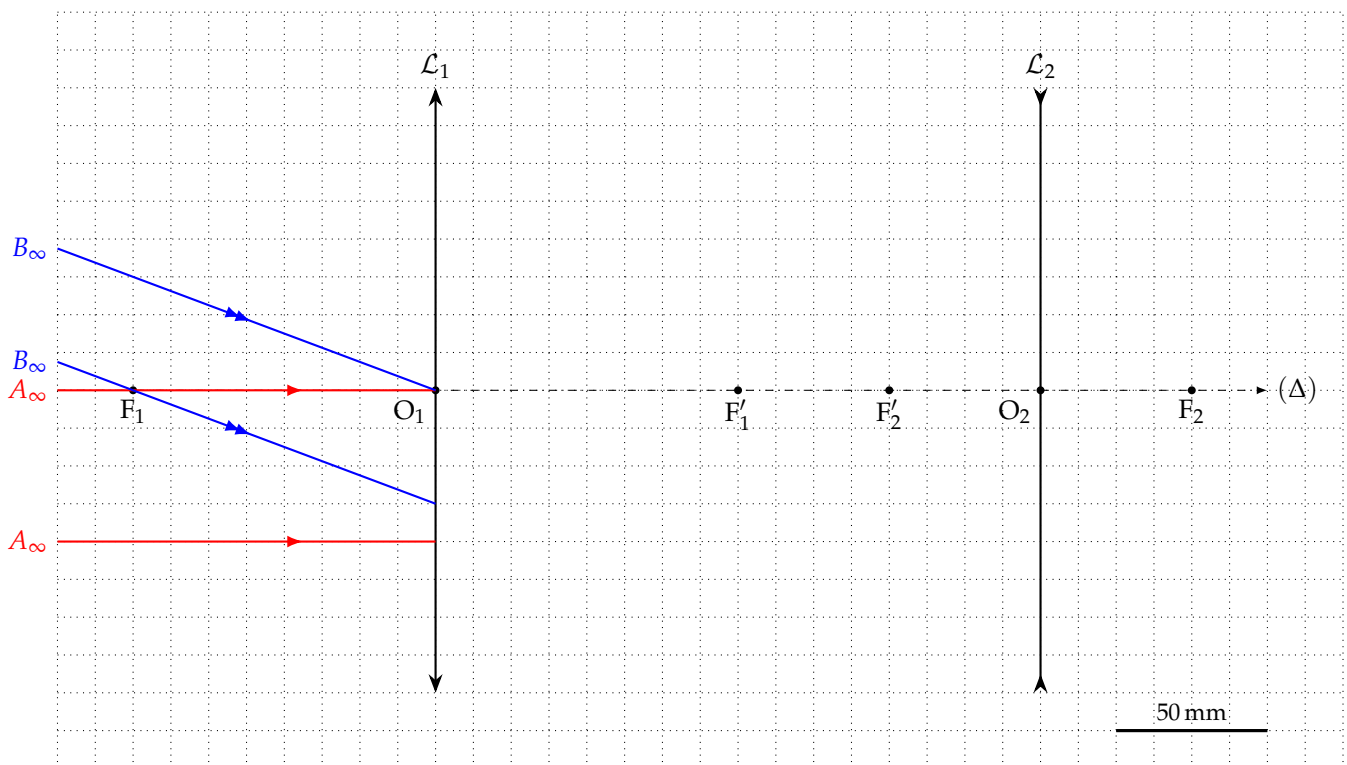


FIGURE 6 – Modèle à deux lentilles d'un objectif photographique

Le but de cette partie est de déterminer l'expression de la distance focale f' de l'objectif photographique. On confrontera ce résultat avec son encombrement lors du tournage de la scène *Get out of the water*.

On considère un objet transverse AB situé à l'infini, le point A étant situé sur l'axe optique et le point B hors de l'axe.

Q8. Sur la figure 6, compléter la marche des deux rayons lumineux issus du point B pour construire l'image A_1B_1 de l'objet AB par la lentille frontale, puis l'image $A'B'$ de A_1B_1 par la lentille arrière.

Par construction, A' est l'image conjuguée du point A_1 par la lentille arrière. De plus, on constate que $A_1 = F'_1$ et $A' = F'$. Donc, F' est le point conjugué de F'_1 par \mathcal{L}_2 .

La relation de conjugaison de Descartes donne

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{O_2F'_1} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{O_2F'_1} + \frac{1}{f'_2} \quad \text{avec} \quad \overline{O_2F'_1} = -(e - f'_1) = f'_1 - e.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{f'_1 - e} + \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{(f'_1 - e)f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}}.$$

Q 12. Calculer $\overline{O_2F'}$. Comparer ce résultat à la mesure de cette même distance sur la figure 6.

L'application numérique donne $\overline{O_2F'} = -33 \text{ mm}$.

On observe bien sur la construction que la distance $\overline{O_2F'}$ est négative. De plus la distance O_2F' correspond au $2/3$ de quatre carreaux (50 mm), soit 33 mm.

Calcul et construction géométrique donnent des résultats compatibles.

Pour le tournage de la scène *Get out of the water*, la caméra était équipée d'un objectif Angénieux 25-250mm High Precision (Source : camescoop.com), qui est présenté sur la figure 7. Les distances focales minimale et maximale de cet objectif sont : $f'_{\min} = 25 \text{ mm}$ et $f'_{\max} = 250 \text{ mm}$. Le diamètre de la lentille frontale est de 136 mm.



FIGURE 7 – Objectif ANGENIEUX 25–250mm HP. Source : rcservice.es



On admet que l'expression de $\overline{O_2F'}$ obtenue à la question 12 permet d'établir, à l'aide d'arguments géométriques, l'expression de la distance focale f' d'un doublet de deux lentilles *via* la relation

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}.$$

Q 13. Estimer l'encombrement de l'objectif *Angénieux 25-250mm High Precision* en calculant la valeur maximale de la distance inter-lentille e . Vérifier la vraisemblance des valeurs obtenues avec les photographies des figures 3 et 7.

On a

$$e = f'_1 f'_2 \left(\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{f'} \right).$$

L'application numérique donne

$$e_{\max} = 250 \text{ mm}.$$

Ce calcul semble indiquer que la taille de l'objectif de la caméra utilisée est environ de 30 cm.

Cet ordre de grandeur correspond bien à ce que l'on peut voir sur les figures 3 et 7. En effet :

- sur la figure 3 à droite, on peut voir que l'objectif n'est pas plus grand qu'un avant-bras, ce qui donne quelques dizaines de centimètres en OdG (*si la qualité de l'impression ne permet pas de distinguer ce détail sur la photo, le candidat pourra utiliser le second argument*);
- sur la figure 7, on peut voir que l'objectif est environ trois fois plus grand que le diamètre de sa lentille frontale, dont le diamètre est de l'ordre de la dizaine de centimètres (donné dans le texte).

4 Hypothèses sur le mouvement de *travelling*

Les photographies du tournage montrent que la caméra est déplacée sur un chariot conduit par des rails. *Attention, sur la figure 3, ces rails semblent inclinés par rapport à la plage; ils ne sont donc pas nécessairement horizontaux.*

La figure 8 représente l'évolution au cours du temps de la distance d entre la caméra et le sujet. Cette distance a été mesurée par un pointage image par image de la scène. On se propose d'exploiter ces données afin de caractériser le mouvement du chariot, puis d'en déduire la nature des forces qui s'exercent sur lui pendant la prise de vue. Les moyens techniques disponibles à l'époque ne permettent pas d'envisager une motorisation du chariot. Son mouvement résulte donc d'une action mécanique extérieure.

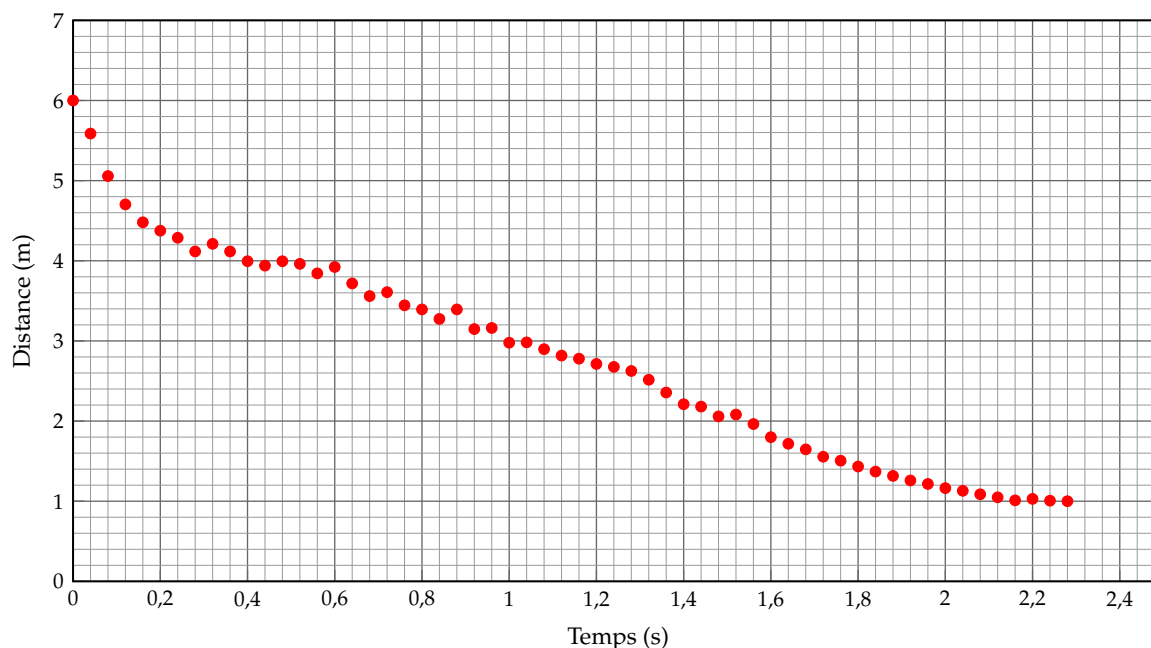


FIGURE 8 – Évolution temporelle de la distance sujet-caméra dans la scène *Get out of the water*.

Q14. À partir de la figure 8, décrire le mouvement du chariot au cours de la scène, puis proposer une hypothèse vraisemblable sur les forces susceptibles d'agir sur lui et la discuter.

Compte tenu de la situation étudiée, on peut envisager deux hypothèses sur les forces à l'œuvre :

- Hypothèse 1 : le chariot débute la scène immobile puis accélère sous l'effet de son propre poids. Il est soumis à son poids et à l'action du sol, avec un effet négligeable des frottements. La vitesse du chariot serait initialement nulle puis augmenterait avec le temps.
- Hypothèse 2 : le chariot est lancé avant le début de la scène puis ralentit sous l'effet des frottements et de l'action des machinistes sur le plateau. La vitesse du chariot serait d'abord maximale puis diminuerait avec le temps.

On étudie le mouvement du chariot dans le référentiel terrestre et on choisit la position initiale de la caméra comme origine du repère. On s'intéresse à l'évolution temporelle de la valeur de la vitesse que l'on obtient en prenant la valeur absolue de la dérivée de la distance d .

Sur la figure 8, on observe que la distance diminue fortement initialement puis de plus en plus lentement avec le temps. On a donc une vitesse initiale importante qui diminue jusqu'à s'annuler en fin de scène.

Ces observations sont en accord avec l'hypothèse 2 et en contradiction avec l'hypothèse 1.

Fin de la partie D