

- (a) 133 mL; (c) 67 mL;
 (b) 100 mL; (d) 18 mL.

Éléments de solution : Le volume total peut s'écrire $V_{\text{total}} = V_{\text{chaude}} + V_{\text{froide}}$. Comme le fluide est incompressible, le bilan énergétique donne une deuxième équation $V_{\text{froide}} = V_{\text{chaude}} \frac{T_{\text{chaude}} - T_{\text{finale}}}{T_{\text{finale}} - T_{\text{froide}}}$. On résout ce système de deux équations pour trouver $V_{\text{chaude}} = 133 \text{ mL}$. La réponse juste est la réponse (a).

- Q4.** On s'intéresse à un échantillon de bois, issu d'un sarcophage de momie égyptienne. L'activité du ^{14}C dans le sarcophage est estimée à 0,14 Bq/g alors que celle d'un bois vivant est de 0,23 Bq/g. Le temps de demi-vie du ^{14}C est de $5,7 \times 10^3$ ans.

Le bois de ce sarcophage a été coupé il y a combien d'années ?

- (a) $3,5 \times 10^3$ ans; (c) $6,2 \times 10^3$ ans;
 (b) $2,8 \times 10^3$ ans; (d) $4,1 \times 10^3$ ans.

Éléments de solution : La décroissance radioactive suit la loi $\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$.
 Ainsi on trouve $4,1 \times 10^3$ ans.
 La réponse juste est la réponse (d).

- Q5.** On considère un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 0,53 \mu\text{m}$, de puissance 1,0 kW, avec un diamètre angulaire de $5,0 \mu\text{rad}$. Ce faisceau pointe la Lune. La distance Terre-Lune est de $3,8 \times 10^8 \text{ m}$.

Quel est le nombre maximum de photons qui arrivent sur la Lune par seconde et par mètre carré ?

- (a) 10^{15} ; (c) 10^{10} ;
 (b) 10^{28} ; (d) 10^5 .

Éléments de solution : La surface éclairée par le faisceau laser sur la Lune est $\frac{\pi}{4} \times (3,8 \times 10^8)^2 \times (5,0 \times 10^{-6})^2$.
 Le nombre de photons émis par le laser par seconde est $\frac{10^3 \times 530 \times 10^{-9}}{6,63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}$
 D'où le nombre de photons arrivant par seconde et par mètre carré : $0,94 \times 10^{15}$ d'où 10^{15} . La réponse juste est la réponse (a).

- Q6.** À partir de la pression atmosphérique au niveau de la mer, on peut estimer la masse totale de l'atmosphère terrestre. Quelle est son estimation ?

La pression atmosphérique est 101 kPa et le diamètre de la Terre est 12 740 km.

- (a) $5 \times 10^{18} \text{ kg}$; (c) $5 \times 10^{12} \text{ kg}$;
 (b) $5 \times 10^{15} \text{ kg}$; (d) $5 \times 10^9 \text{ kg}$.

Éléments de solution : La pression est $P = \frac{mg}{A}$ où A est la surface de la terre, $A = \pi D^2$. On trouve alors que la masse totale de l'atmosphère est environ $m = 5 \times 10^{18} \text{ kg}$.
 La réponse juste est la réponse (a).

- Q7.** Un réglet de 1,0 m de long se déplace selon un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse 0,8 c. Il passe devant un observateur immobile dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Quelle est la durée du passage du réglet devant l'observateur dans le référentiel du laboratoire ?

- (a) 4,2 ns; (c) 2,5 ns;
 (b) 6,9 ns; (d) 1,2 ns.

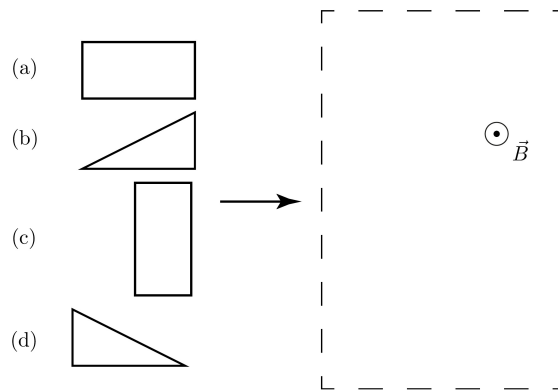
Éléments de solution : $\Delta t = \frac{L}{\gamma v}$ où γ est le facteur de Lorentz et $L = 1,0$ m.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{8}{10}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}} = \frac{5}{3}$$

ainsi $\Delta t = \frac{L}{\gamma v} = 2,5$ ns.

La réponse juste est la réponse (c).

Q8. La figure montre quatre formes différentes de boucles de fils. Chacune des boucles passe à la même vitesse constante dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} . L'orientation du champ est indiquée sur le schéma et le champ est nul en dehors de la zone indiquée par la ligne pointillée. Quelle forme de boucle donne lieu à la plus grande force électromotrice en valeur absolue lors de son passage dans la zone ?



- (a) forme (a); (c) forme (c);
 (b) forme (b); (d) forme (d).

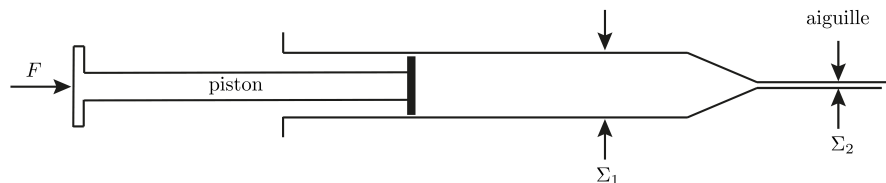
Éléments de solution : La norme de la force électromotrice est $|\xi| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$ où le flux magnétique est $\Phi = BA$,

avec A la surface de la boucle qui se trouve dans la région avec le champ B . Il faut donc étudier $|\xi| = B \left| \frac{dA}{dt} \right|$.

La forme qui a le plus grand taux de variation de l'aire A est (c).

La réponse juste est la réponse (c).

Q9. On remplit une seringue d'un fluide de masse volumique ρ , considéré comme un fluide parfait incompressible. On modélise cette seringue comme un cylindre de section transversale Σ_1 , qui se rétrécit progressivement en une aiguille de section transversale $\Sigma_2 \ll \Sigma_1$. La seringue est maintenue immobile et à l'horizontale par un opérateur extérieur.



Le piston est poussé lentement vers l'intérieur de la seringue par une force F horizontale, de sorte que le piston se déplace à une vitesse constante v . On considère que le jet d'eau qui sort de l'aiguille est horizontal.

Dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, la quantité $P/\rho + v^2/2 + gz$ est une constante le long d'une ligne de courant (d'après le théorème de

Bernoulli).

Quelle expression de F est correcte ?

(a) $F = \frac{\rho \Sigma_1}{2} \left(\frac{\Sigma_1 v}{\Sigma_2} \right)^2;$

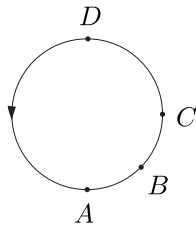
(c) $F = \frac{\rho \Sigma_2}{2} v^2;$

(b) $F = \frac{\rho \Sigma_1}{2} v^2;$

(d) $F = \frac{\rho \Sigma_1}{2} v^2 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}.$

Éléments de solution : On applique le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant : $P_1/\rho + v^2/2 = P_2/\rho + v_2^2/2$, avec P_2 égal à la pression atmosphérique P_0 .
 Or, le fluide étant incompressible : $\Sigma_1 v = \Sigma_2 v_2$
 $\Sigma_1 \gg \Sigma_2$ d'où $v \ll v_2$
 On en déduit que $P_1 - P_0 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Sigma_1 v}{\Sigma_2} \right)^2 = \frac{F}{\Sigma_1}$
 Soit $F = \frac{\rho \Sigma_1}{2} \left(\frac{\Sigma_1 v}{\Sigma_2} \right)^2$.
 La réponse juste est la réponse (a).

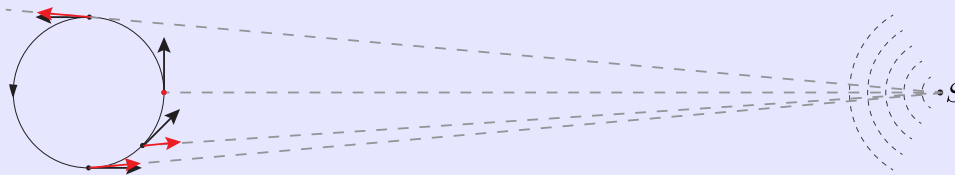
Q10. Un enfant court en cercle dans le sens anti-horaire, tel qu'illustré sur le schéma ci-dessous. Son grand-père est assis au point S et siffle une note.



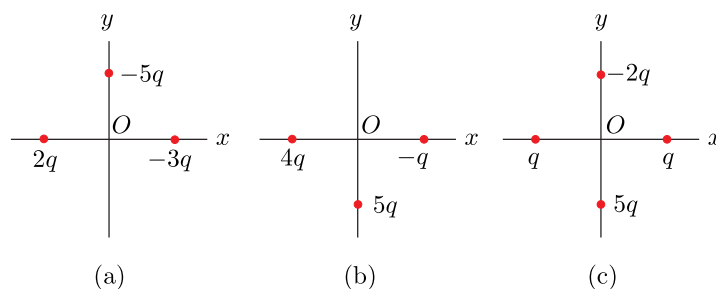
En quel point de sa trajectoire l'enfant entend-il le son le plus aigu ?

- (a) A; (c) C;
 (b) B; (d) D.

Éléments de solution : La fréquence entendue est plus élevée (son aigu) quand l'observateur et la source se rapprochent. Ici il faut regarder la composante de la vitesse de l'observateur dans la direction de la source, comme illustré par les vecteurs rouge dans la figure ci-dessous. Réponse : point A. La réponse juste est la réponse (a).



Q11. Les figures ci-dessous montrent 3 configurations possibles de particules chargées. Toutes les particules sont situées à la même distance de l'origine. La charge de chaque particule est un multiple d'une charge notée q .



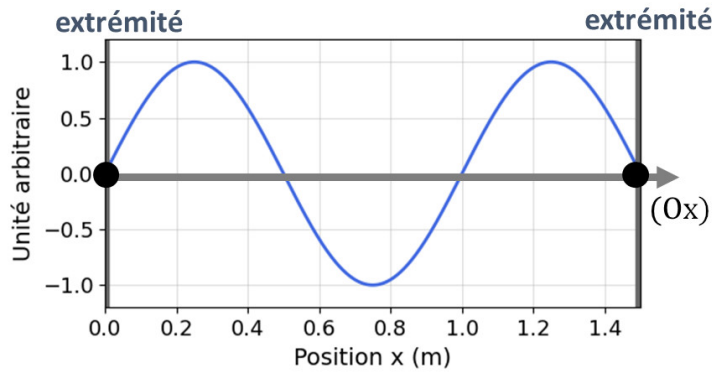
Dans quelles situations le module du champ électrique à l'origine O est-il le plus faible ?

- (a) Figure (a);
- (b) Figure (b);
- (c) Figure (c);
- (d) Le module du champ est identique dans toutes les configurations.

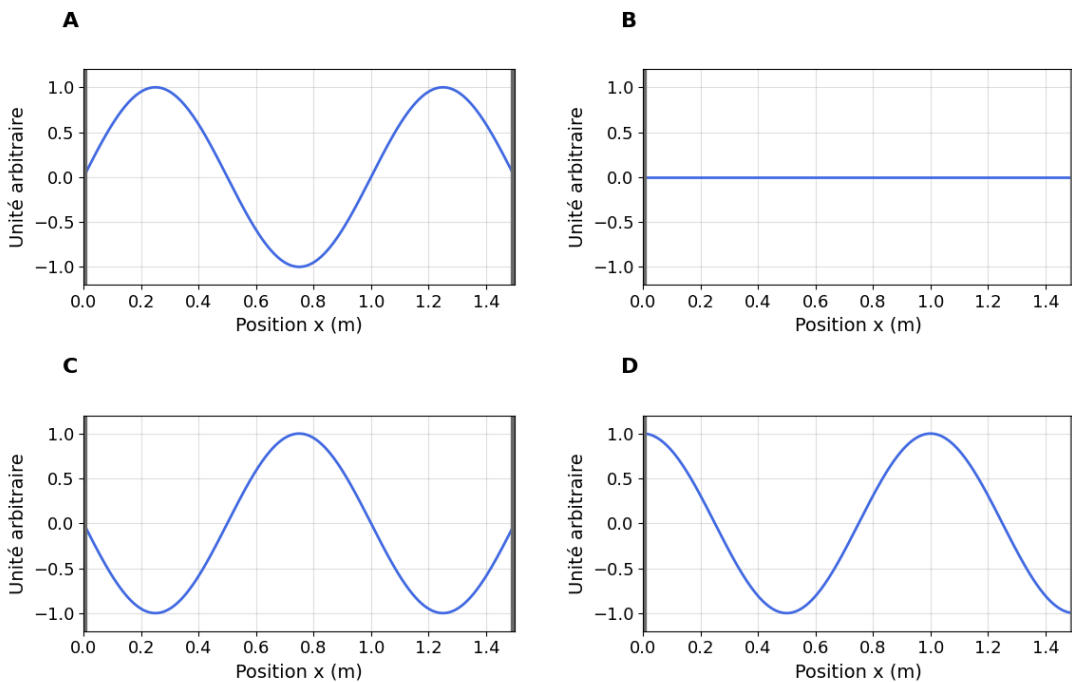
Éléments de solution : On peut mettre une charge test q_0 à l'origine et via la loi de Coulomb, trouver le champ électrique E à ce point, dû à une particule de charge Ne située à une distance d de l'origine : $|E| = \frac{|F|}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Ne|}{d^2}$. La direction de ce champ est soit vers la particule (si $N < 0$) soit dans la direction opposée (si $N > 0$). On trouve le vecteur champ électrique pour chaque particule chargée. Puis, on utilise le principe de superposition et on somme chaque contribution pour trouver le champ total à l'origine. Les configurations (a) et (b) donnent $|E| = 5\sqrt{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{d^2}$ tandis que (c) donne $|E| = 7 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{d^2}$.
La réponse juste est la réponse (c).

Q12. On photographie une onde stationnaire, le long d'une corde fixée à deux extrémités fixes, placées en $x = 0$ et $x = 1,5$ m. La corde vibre à la fréquence de 100 Hz.

La figure suivante donne une représentation spatiale de la corde à l'instant t .



Quelle figure représente la corde à l'instant $t + 60$ ms ?

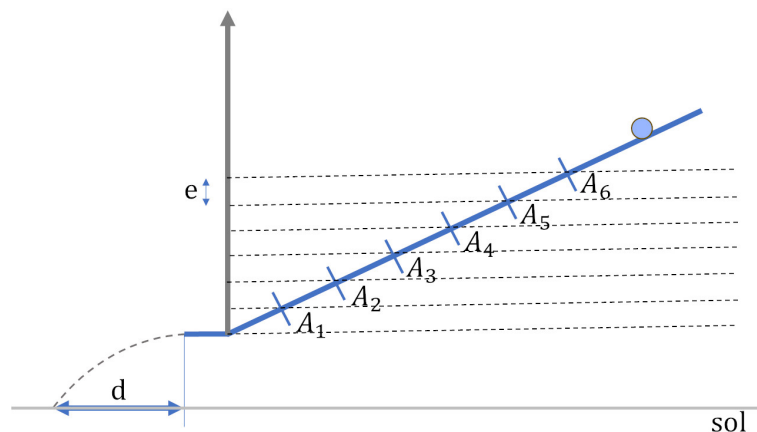


- (a) graphique A; (c) graphique C;
 (b) graphique B; (d) graphique D.

Éléments de solution : On observe 6 périodes après, ainsi l'allure est inchangée.
 La réponse juste est la réponse (a).

Q13. Un palet, assimilé à un point matériel, glisse sans frottement sur une rampe qui devient horizontale à son extrémité. Au bas de la rampe, le palet subit une chute libre sans frottement et atterrit au sol, comme le montre le schéma. Si le palet part de la position marquée A_1 sans vitesse initiale, il atterrit à $d = 10$ cm du bas de la rampe.

Le palet est systématiquement lâché sans vitesse initiale. Différentes positions de départ du palet, espacées régulièrement, sont repérées sur le schéma.



Quelle position de départ permettra au palet d'atterrir le plus près possible de $d = 17$ cm?

- (a) A_2 ; (c) A_4 ;
 (b) A_3 ; (d) A_5 .

Éléments de solution : Le temps de chute libre t_c reste identique pour chaque position initiale du palet.

En revanche, la vitesse des palets v_0 à l'extrémité de la rampe est différente selon le point initial de lancement.

La distance selon l'axe horizontal est $d = v_0 t_c$.

Or, par conservation de l'énergie mécanique, la vitesse v_0 est donnée par $\sqrt{2gz}$ où z est l'altitude de la position initiale par rapport à la rampe.

Ainsi d est proportionnel à \sqrt{z} . Si d est multiplié par un facteur 1,7 cela veut dire que z est multiplié par un facteur $(1,7)^2$. La plus proche valeur est 3. Il est donc lâché de A_3 .

La réponse juste est la réponse (b).

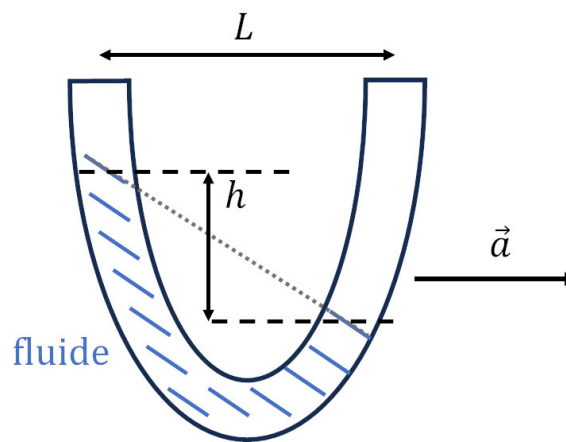
Q14. Quand on tire à la verticale avec un pistolet Nerf, le projectile prend 2 secondes pour retomber dans le canon. Quelle est la portée horizontale maximale de ce pistolet?

- (a) 20 m; (c) 10 m;
 (b) 5 m; (d) La portée horizontale est infinie si on néglige les frottements de l'air.

Éléments de solution : À partir du tir vertical, $t_1 = 2$ s. On calcule la vitesse initiale de la balle de Nerf $v_0 = \frac{1}{2}gt_1 = 9,8$ m/s. Pour calculer la portée horizontale $h = v_0 t_2 \cos \theta$, nous avons besoin de l'angle optimal et du temps de vol t_2 . On utilise le mouvement vertical pour trouver $t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$. On retient $\theta = 45^\circ$. On trouve alors $h = \frac{v_0^2}{g} = 9,8$ m.
La réponse juste est la réponse (c).

Q15. Un tube en U vertical, partiellement rempli d'un liquide de masse volumique ρ , est placé sur un tapis roulant horizontal. Il subit un mouvement rectiligne uniformément accéléré par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Le fluide est en contact avec l'air à la pression P_0 .

Au bout de quelques instants, le fluide atteint un état d'équilibre.

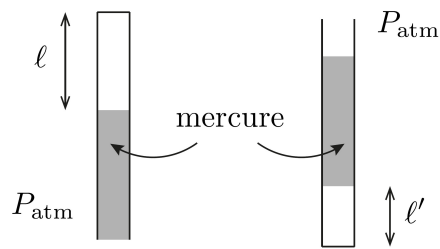


Quelle est la relation entre l'accélération a , la distance L entre les bras du tube en U et la différence de hauteur moyenne h du liquide entre les bras ?

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| (a) $a = \frac{gh}{L}$; | (c) $a = g$; |
| (b) $a = \frac{gL}{h}$; | (d) $a = \frac{P_0}{\rho h}$. |

Éléments de solution : On écrit la condition d'équilibre relative dans le référentiel non galiléen, avec l'accélération d'entraînement du référentiel non galiléen par rapport au référentiel galiléen de référence. Tout se passe alors comme si l'on remplace \vec{g} par $\vec{g}_{\text{app}} = \vec{g} - \vec{a}$. La verticale apparente est inclinée d'un angle θ tel que $\tan \theta = \frac{a}{g} = \frac{h}{L}$. D'où $a = \frac{gh}{L}$.
La réponse juste est la réponse (a).

Q16. On considère un circuit électrique qui comprend un générateur de tension continue $E = 5$ V, deux condensateurs identiques, une résistance et deux interrupteurs. Initialement, l'interrupteur 2 est ouvert, l'interrupteur 1 est en position B et les deux condensateurs sont déchargés. À l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur 1 en position A et l'interrupteur 2 reste ouvert. À l'instant $t = 0,5$ s, on bascule l'interrupteur 1 en position B et l'interrupteur 2 est fermé.



Quelle est la pression atmosphérique ?

(a) $P_{\text{atm}} = \rho g l;$

(c) $P_{\text{atm}} = \rho g h \frac{\ell'}{\ell};$

(b) $P_{\text{atm}} = \rho g h \frac{\ell + \ell'}{\ell - \ell'};$

(d) $P_{\text{atm}} = \rho g h \frac{\ell - \ell'}{\ell + \ell'}.$

Éléments de solution : Avec la loi des gaz parfaits, on peut écrire une relation entre la longueur occupée par l'air piégé dans le tube et sa pression : $PV = P'V' \rightarrow \ell P = \ell' P'$. Par la loi hydrostatique, on peut lier ces pressions à la pression atmosphérique : $P = P_{\text{atm}} - \rho g h$ et $P' = P_{\text{atm}} + \rho g h$. Nous trouvons alors que $P_{\text{atm}} = \rho g h \frac{\ell + \ell'}{\ell - \ell'}$.

La réponse juste est la réponse (b).

Fin de la partie A



Partie B

Exercice 1

Orage ! Ô désespoir !

Durée conseillée : 30 minutes.

Les éclairs sont parmi les phénomènes naturels les plus violents observables sur Terre. Ces phénomènes spectaculaires peuvent être approchés par des mécanismes simples : une charge lente du nuage, un claquage brutal de l'air, puis une décharge rapide de foudre dans un canal de plasma.

Un plasma est un gaz ionisé – composé d'ions et d'électrons libres – globalement neutre et de forte conductivité électrique.

Le nuage d'orage, l'air et le sol : analogie électrocinétique

Lors d'un orage, les mouvements internes du cumulonimbus (nuage d'orage) séparent progressivement les charges électriques et créent une différence de potentiel importante entre le nuage et le sol. On modélise cet ensemble comme les deux armatures d'un condensateur plan de capacité C (voir figure 1). On note $V(t)$ la tension à ses bornes. L'air situé entre le nuage et le sol, relativement isolant, est quant à lui assimilé à une résistance R .

On note $d = 1 \text{ km}$ l'altitude du bas du nuage et sa superficie $A = 10 \text{ km}^2$. La résistivité de l'air est $\rho \approx 10^{15} \Omega \cdot \text{m}$, et la permittivité diélectrique de l'air, supposée égale à celle du vide, est $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.



FIGURE 1 – Identification du condensateur.
Source : NOAA

Q1. En raisonnant par analyse dimensionnelle, sans se préoccuper des facteurs numériques sans dimension, exprimer la capacité C du condensateur et la résistance R de l'air. En déduire les ordres de grandeur de C et R .

La capacité du condensateur est donnée par :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \approx 10^{-7} \text{ F}$$

$$R = \frac{\rho d}{A} \approx 10^{11} \Omega$$

Les mouvements d'air et les collisions de particules de glace à l'intérieur du cumulonimbus entretiennent la séparation des charges électriques, résultant en une accumulation de charges négatives au niveau du bas du nuage et de charges positives en haut du nuage. On modélise ce phénomène par un courant constant d'intensité $I \approx 1 \text{ A}$ à l'intérieur du nuage. Le schéma équivalent de l'ensemble {nuage, air, sol} est représenté sur la figure 2.

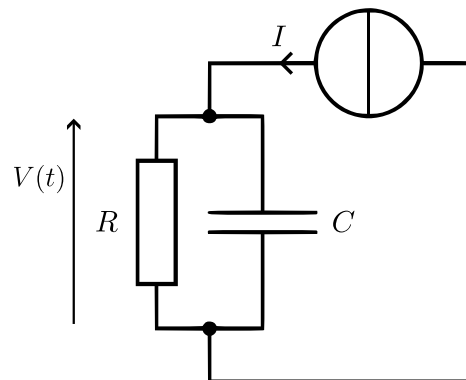


FIGURE 2 – Modèle RC du système composé du nuage, de l'air et du sol.



Q2. Déterminer l'équation différentielle sur la tension $V(t)$ faisant intervenir les grandeurs R , I et C supposées constantes. La résoudre pour trouver l'expression de $V(t)$, en supposant qu'initialement le nuage est déchargé.

On a un circuit RC parallèle alimenté par un générateur de courant :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{RC} = I$$

L'intégration donne :

$$V(t) = RI \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

avec $\tau = RC$.

Formation des éclairs

Lorsque l'intensité du champ électrique, supposé uniforme dans le domaine entre le sol et le nuage, dépasse $E^* \approx 3 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, l'air situé dans ce domaine s'ionise (passage à l'état de plasma), permettant le passage des charges. Il en résulte une chute brusque de la résistance de l'air entre le sol et le nuage.

Q3. Donner l'expression de la tension V^* nécessaire pour provoquer un éclair. Faire l'application numérique.

$$V^* = E^* d \approx 3 \text{ GV}$$

On suppose toujours le condensateur initialement déchargé.

Q4. Établir la durée caractéristique τ_c au bout de laquelle l'éclair survient. Justifier l'approximation $\tau_c \approx CV^*/I$. Faire l'application numérique.

En posant $V(\tau_c) = V^*$, on obtient :

$$\tau_c = -RC \ln \left(1 - \frac{V^*}{RI}\right).$$

Or, $V^*/(RI) \approx 10^{-2} \ll 1$. Avec un développement limité on trouve :

$$\tau_c \approx \frac{CV^*}{I} \approx 3 \text{ s}$$

Lors du passage de l'éclair, la résistance R^* de l'air ionisé chute brusquement. La résistance linéique est alors de l'ordre de $0,1 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$.

Q5. Évaluer l'ordre de grandeur de la durée τ_e d'un éclair.

$$\tau_e \approx R^* C \approx 10^{-5} \text{ s}$$

Q6. Expliquer pourquoi, si I est constant, la décharge des orages se comporte comme un oscillateur. En déduire la période T des oscillations.

On a une alternance de charges lentes de durées τ_c et de décharges rapides de durées τ_e . La période du cycle est donc :

$$T \approx \tau_c + \tau_e \approx \tau_c \approx 3 \text{ s}$$

Il s'agit d'un oscillateur à relaxation.

Oscillations du courant

Des mesures effectuées au sommet d'une tour météorologique en métal ont montré qu'à l'impact de l'éclair, le courant qui traverse la tour présente des oscillations à haute fréquence. Le signal expérimental d'une mesure de ces oscillations du courant de foudre est représenté sur la figure 3.

On cherche ici à déterminer l'origine physique de ces oscillations. On souhaite tout d'abord tester l'hypothèse suivant laquelle l'air sous le nuage présente également une inductance L , qui aurait été négligée dans la modélisation précédente. Le modèle électrique de l'orage serait alors un circuit R^*LC (voir figure 4).

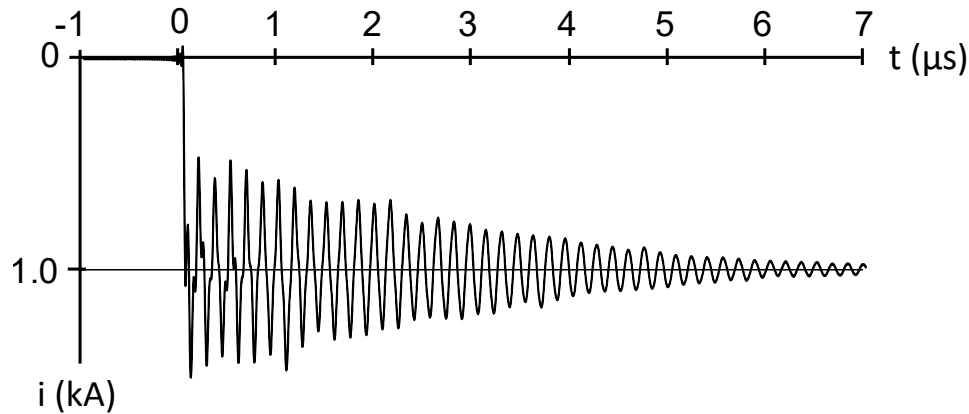


FIGURE 3 – Signal expérimental. Mesure du courant de foudre au sommet d'une tour.

Adapté de F. Heidler and K. Stimpfer, « On the origin of the lightning current oscillation measured at the Peissenberg Tower, Germany », 2016.

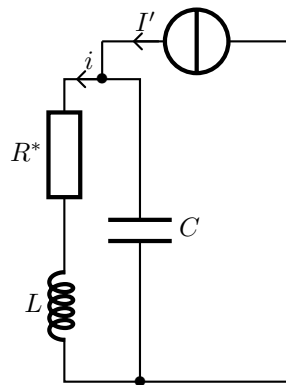
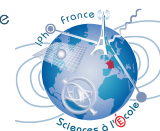


FIGURE 4 – Modèle R^*LC du système composé du nuage, de l'air et du sol.

Q7. Montrer que, dans le cas où l'air présente une inductance L , l'intensité i qui la traverse obéit à l'équation d'un oscillateur amorti. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur. En déduire une estimation de l'ordre de grandeur de l'inductance L de l'air à partir du signal expérimental de la figure 3.



En appliquant les lois de l'électrocinétique, on obtient :

$$I' = i(t) + C \frac{dV}{dt}, \quad V(t) = R^* i(t) + L \frac{di}{dt}$$

D'où :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R^*}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = \frac{I'}{LC}$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \omega_0^2 I'$$

La pulsation propre est donc donnée par :

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC},$$

et le facteur de qualité par :

$$Q = \frac{1}{R^*} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

La fréquence des oscillations sur le signal est de 6 MHz. Comme $Q_{\text{exp}} \approx 40 \gg 1$ (nombre d'oscillations), on fait l'approximation $\omega = \omega_0$, d'où :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} \approx 10^{-8} \text{H}$$

Q8. Exprimer le facteur de qualité Q du circuit et prédire son ordre de grandeur à partir de ceux de R^* , L et C obtenus précédemment. Conclure quant à la modélisation électrique proposée, compte-tenu du signal expérimental de la figure 3.

Le facteur de qualité du circuit RLC étudié est :

$$Q = \frac{1}{R^*} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Avec les ordres de grandeur obtenus précédemment, on trouve $Q \approx 10^{-3}$. Cette valeur est bien plus faible que celle du facteur de qualité du signal expérimental ($Q \approx 40$). Le modèle proposé n'est donc pas adapté.

En 2007, des travaux ont été réalisés au sommet de la tour de Peissenberg, où sont effectuées les mesures du courant de foudre (voir figure 5). Avant ces modifications, la fréquence d'oscillation du courant était de 12,5 MHz. Le signal expérimental présenté en figure 3 correspond à une mesure réalisée après ces travaux.

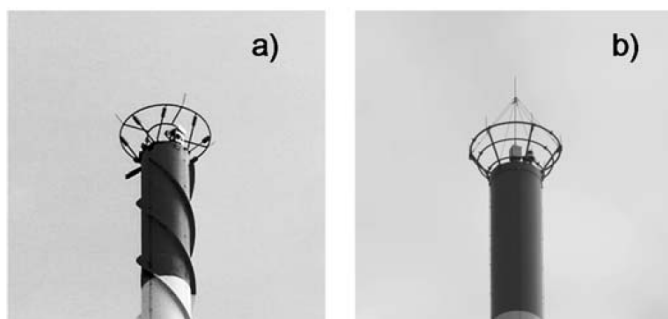


FIGURE 5 – Photographies de la tour de Peissenberg : (a) avant 2007, (b) après 2007.

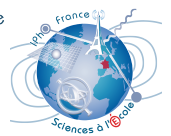
Adapté de F. Heidler and K. Stimpfer, « On the origin of the lightning current oscillation measured at the Peissenberg Tower, Germany », 2016.

Q9. Proposer une critique du modèle précédent, ainsi qu'une origine physique pour les oscillations observées.

Nom :

Lycée :

Prénom :



La critique principale du modèle est qu'on s'est placé en ARQS, alors que les fréquences de l'ordre du MHz donnent des longueurs d'onde de l'ordre de la dizaine de mètres, beaucoup plus faible que la taille du système étudié. Il faudrait donc prendre en compte les effets propagatifs le long du canal de plasma. Le deuxième point est que l'inductance mesurée ne dépend probablement pas que de l'air en lui-même, mais certainement de la tour sur laquelle la mesure est faite (des travaux sur la tour ont conduit à un net changement de fréquence d'un facteur 2). En particulier, la géométrie de la tour a un fort effet sur l'inductance et la capacité du système nuage-air-tour-sol, ce qui permet de mesurer des oscillations, qui ne seraient peut-être pas présentes sans la tour.

Pour aller plus loin : Rakov & Uman, "Lightning : Physics and Effects" (Cambridge University Press, 2003).

Fin de la partie B



Partie C

Exercice 2

Les trous noirs dans l'Univers

Durée conseillée : 30 minutes.

On désigne par le symbole M_S la masse du Soleil, avec $M_S = 2,00 \times 10^{30}$ kg. Le rayon de la Terre est noté R_T avec $R_T = 6,4 \times 10^3$ km. L'année-lumière (symbole : al) est une unité de distance telle que $1 \text{ al} = 9,46 \times 10^{15}$ m. Les constantes physiques utilisées dans cette partie sont fournies en début de sujet. **Cet exercice n'attend pas d'analyse dimensionnelle pour l'établissement des résultats demandés. Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé dans les questions suivantes. Toute réponse doit être justifiée.**

Les trous noirs sont des astres dont l'existence a d'abord été prédite par la théorie de la relativité générale d'EINSTEIN en 1915, avant d'être confirmée par des observations en 2019. Ces astres sont si denses qu'aucun corps ni même la lumière ne peut s'en extraire. Dans cet exercice, on fera référence à trois types de trous noirs :

- les trous noirs **primordiaux**, encore hypothétiques, sont de minuscules trous noirs dont la masse pourrait être aussi faible que 2×10^{-8} kg. Ils se seraient formés au moment du Big Bang ;
- les trous noirs **stellaires** sont le résultat de l'effondrement du cœur d'une étoile massive à la fin de sa vie. Leur masse est comprise entre $3 M_S$ et $15 M_S$;
- les trous noirs **supermassifs**, dont la masse est comprise entre $10^6 M_S$ et quelques $10^9 M_S$, se trouvent au centre de la plupart des galaxies.

Trou noir et mécanique classique

On considère un astre de symétrie sphérique, de masse totale M et de rayon R . On définit la vitesse de libération de cet astre, notée v_{lib} , comme étant la vitesse minimale qu'un corps placé à la surface de l'astre doit avoir pour « échapper » à l'attraction gravitationnelle de ce dernier, c'est-à-dire atteindre une vitesse nulle à une distance infinie de l'astre.

Q1. Montrer que la vitesse de libération pour un tel astre est donnée par

$$v_{\text{lib}} = k_1 \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

avec k_1 une constante numérique sans dimension de l'ordre de l'unité à exprimer.



On se place dans le référentiel \mathcal{R} lié au centre de masse de l'astre étudié (repéré par le point O) qu'on suppose galiléen. On étudie un système (S) situé à la surface de l'astre composé d'un point matériel M de masse m . Son énergie cinétique E_c est

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

avec v la norme de sa vitesse. Son énergie potentielle gravitationnelle E_p est

$$E_p = -\frac{G M m}{r} + K$$

avec r la distance $\|\vec{OM}\|$. K est constante qu'on peut prendre nulle en choisissant $E_p = 0$ en $r \rightarrow +\infty$. L'énergie mécanique de l'objet de masse m est donnée par

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r}$$

Lorsqu'on communique une vitesse telle que $v = v_{\text{lib}}$ à ce corps, sa vitesse tend vers 0 à mesure que r tend vers $+\infty$. On applique le théorème de l'énergie mécanique, appliqué dans \mathcal{R} au système (S) en l'absence de forces non-conservatives, entre un instant initial où le système est à la surface de l'astre en $r = R$ avec une vitesse v_{lib} et un instant final où le système se trouve à une distance infinie de l'astre avec une vitesse nulle.

$$\Delta E_m = E_{m,\text{finale}} - E_{m,\text{initiale}} = 0$$

D'où

$$0 - 0 - \frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{-G M m}{R} = 0$$

soit

$$v_{\text{lib}}^2 = \frac{2 G M}{R}$$

On en déduit alors :

$$v_{\text{lib}} = k_1 \sqrt{\frac{G M}{R}} \quad \text{où} \quad k_1 = \sqrt{2} \approx 1,4(142)$$

Dans le cadre de la mécanique classique, on appelle rayon de SCHWARZSCHILD, noté R_{Sch} , le rayon d'un trou noir sphérique dont la lumière ne peut pas s'échapper, c'est-à-dire pour lequel $v_{\text{lib}} = c$.

Q2. Montrer que le rayon de SCHWARZSCHILD pour un trou noir de masse M vérifie

$$R_{\text{Sch}} = k_2 \frac{G M}{c^2}$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide et k_2 une constante numérique sans dimension de l'ordre de l'unité à exprimer. Déterminer l'ordre de grandeur du rayon R_{Sch} pour un trou noir stellaire.

D'après la définition de l'énoncé, on a $v_{\text{lib}} = c$ pour le trou noir considéré de masse M et de rayon R_{Sch} . Par conséquent,

$$c = k_1 \sqrt{\frac{G M}{R}}$$

On obtient alors

$$c^2 = k_1^2 \frac{G M}{R_{\text{Sch}}}$$

ou encore

$$R_{\text{Sch}} = k_2 \frac{G M}{c^2} \quad \text{avec} \quad k_2 = k_1^2 = 2$$

La masse d'un trou noir stellaire varie entre 3 et 15 M_{\odot} . Pour 3 M_{\odot} , on trouve le rayon

$$R_{\text{Sch},\text{min}} = 3 \times 2 \times \frac{6,68 \times 10^{-11} \times 2,00 \times 10^{30}}{3,00 \times 10^8} = 3 \times 2,97 \times 10^3 \text{ m} = 8,91 \text{ km}$$

et pour 15 M_{\odot} on obtient

$$R_{\text{Sch},\text{max}} = 5 \times R_{\text{Sch},\text{min}} = 5 \times 8,91 \text{ km} = 44,5 \text{ km}$$

On trouve un ordre de grandeur de $1 \times 10^4 \text{ m}$ dans les deux cas.

Observation du trou noir M87*

En 2019, le projet EHT (pour « Event Horizon Telescope ») a permis la première observation d'un trou noir, appelé M87* et situé à une distance $L = 5,02 \times 10^7$ al de la Terre. L'instrument de ce projet est composé de la mise en réseau d'observatoires astronomiques répartis sur toute la surface de la Terre (voir figure 1). La résolution angulaire de cet instrument est équivalente à celle d'un télescope dont le diamètre serait la plus grande distance séparant deux antennes du réseau EHT.

À l'aide de cet instrument, les scientifiques ont pu observer le trou noir sous la forme d'une ombre circulaire se détachant sur un disque de gaz lumineux (figure 2). La lumière émise par le disque a une longueur d'onde $\lambda = 1,3$ mm. Des calculs de relativité générale permettent d'exprimer le rayon de l'ombre, noté R_{ombre} , en fonction de la masse M du trou noir :

$$R_{\text{ombre}} = \sqrt{27} \frac{GM}{c^2}$$



FIGURE 1 – Répartition des observatoires du réseau de l'EHT. Crédits : [NRAO](#).

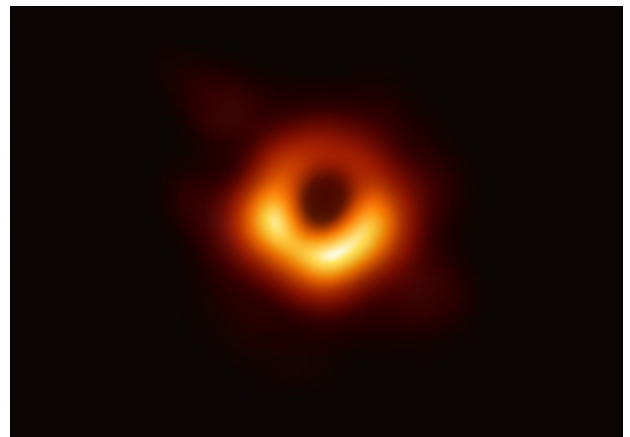


FIGURE 2 – Image du trou noir M87* par l'EHT. Crédits : [EHT collaboration](#).

Q3. Citer un phénomène physique limitant la résolution de tout instrument d'observation en astronomie. En utilisant les figures 1 et 2, montrer que le trou noir M87* possède une masse minimale notée M_{min} dont on donnera l'expression. Faire l'application numérique et exprimer le résultat en masses solaires M_{\odot} . Déterminer la catégorie de trous noirs à laquelle appartient M87*.



La diffraction est un phénomène physique limitant la résolution de tout instrument d'observation en astronomie. D'après la formule fournie donnant le rayon de l'ombre, plus le trou noir est massif, plus l'ombre observée est grande. La figure 2 permet de distinguer clairement une structure, on voit bien une ombre d'apparence sphérique sur un disque lumineux. Par conséquent, le trou noir est suffisamment massif pour que la taille de l'ombre, située à une distance L de l'instrument, soit bien résolue. Avec l'approximation des petits angles, l'angle θ sous lequel l'ombre du trou noir est vue depuis la Terre est

$$\tan \theta = \frac{R_{\text{ombre}}}{L} \quad \text{soit} \quad \theta \approx \frac{R_{\text{ombre}}}{L}$$

La résolution angulaire est notée θ_{res} . Pour avoir $\theta \geq \theta_{\text{res}}$, il faut que

$$\theta_{\text{res}} \leq \frac{R_{\text{ombre}}}{L} = \frac{\sqrt{27} G M}{L c^2} \quad \text{et} \quad M \geq \theta_{\text{res}} \frac{L c^2}{\sqrt{27} G}$$

Il faut maintenant estimer θ_{res} . Pour cela, on assimile comme suggéré l'EHT à un télescope de diamètre D ce qui donne $\theta_{\text{res}} = \lambda/D$. Le rayonnement est à une longueur d'onde λ fournie. On estime D à partir de la figure 1. On constate que les observatoires astronomiques utilisés et donc leurs antennes sont situés presque partout sur la surface de la Terre. On peut en déduire qu'une distance de l'ordre du diamètre terrestre $2 R_T$ est cohérente pour D (toute valeur de cet ordre de grandeur est acceptée : le diamètre de la Terre, son rayon, une valeur proportionnelle au rayon basée sur un calcul géométrique). Ainsi,

$$\theta_{\text{res}} = \frac{\lambda}{2 R_T}$$

Enfin,

$$M \geq M_{\text{min}} = \frac{L \lambda c^2}{2\sqrt{27} G R_T}$$

L'application numérique donne

$$M_{\text{min}} = \frac{50,2 \times 10^6 \times 9,46 \times 10^{15} \text{ m} \times 1,3 \times 10^{-3} \text{ m} \times (3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2\sqrt{27} \times 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times 6,4 \times 10^6 \text{ m}} = 1,25 \times 10^{40} \text{ kg}$$

On trouve une masse minimale de $6,25 \times 10^9 M_{\text{S}}$. Un tel trou noir appartient à la catégorie des trous noirs supermassifs.

Masse minimale d'un trou noir

On souhaite établir l'expression de la plus petite masse possible pour un trou noir, notée M_0 dans la suite. Pour ce faire, on exploite des résultats de mécanique quantique. On assimile le trou noir à une particule quantique de masse M_0 et d'énergie E .

Q4. Par analogie avec un photon, donner la relation entre l'énergie E de cette particule et sa longueur d'onde λ dans le cadre de la dualité onde-corpuscule. En déduire λ_c , appelée longueur d'onde de COMPTON, désignant la longueur d'onde de la particule lorsque son énergie E se réduit à son énergie de masse.

Le cours fournit pour un photon de fréquence ν et d'énergie E_ν la relation de PLANCK-EINSTEIN $E_\nu = h \nu$. La fréquence ν est reliée à la longueur d'onde λ par $\nu = c/\lambda$ si bien que $E_\nu = h c/\lambda$. Par analogie, on propose alors la relation

$$E = \frac{h c}{\lambda}$$

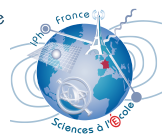
Si l'énergie E de la particule est égale à son énergie de masse $M_0 c^2$ lorsque $\lambda = \lambda_c$, on trouve que

$$M_0 c^2 = \frac{h c}{\lambda_c}$$

si bien que

$$\lambda_c = \frac{h}{M_0 c}$$

Cette particule est confinée dans une boîte de largeur $L = R_{\text{Sch}}$ à une dimension. En notant x la position du trou noir dans la boîte avec l'origine $x = 0$ placée au centre de celle-ci, on admet que la particule est décrite par une fonction ψ , appelée « fonction d'onde », vérifiant :



$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_c} x\right)$$

avec A une constante. Le confinement de la particule se traduit par la condition $\psi(\pm L/2) = 0$.

Q5. Montrer que la plus petite masse possible pour le trou noir vérifie $M_0 = k_3 m_P$ avec k_3 une constante numérique sans dimension de l'ordre de l'unité à exprimer et m_P la masse de PLANCK donnée par

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,18 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

Faire l'application numérique en donnant le résultat en kg. Déterminer la catégorie à laquelle appartiendrait un trou noir ayant cette masse.

Pour un trou noir de masse minimale notée M_0 , le confinement de la particule se traduit par

$$\psi(L/2) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{L}{2} = \pi \times n$$

avec $n \in \mathbb{Z}^*$. On choisit $n = 1$ pour avoir la plus petite valeur positive. Dès lors, on trouve que $\lambda_c = L$. Puisque l'énoncé fournit $L = R_{\text{Sch}} = k_2 G M_0 / c^2$, on trouve que

$$\lambda_c = k_2 \frac{G M_0}{c^2} \quad \text{soit} \quad \frac{h}{M_0 c} = k_2 \frac{G M_0}{c^2}$$

On isole la masse M_0 et on fait apparaître $\hbar = h/(2\pi)$ pour finalement obtenir

$$M_0^2 = \frac{2\pi}{k_2} \frac{\hbar c}{G} \quad \text{donc} \quad M_0 = k_3 m_P \quad \text{avec} \quad k_3 = \sqrt{\frac{2\pi}{k_2}} = \sqrt{\pi}$$

L'application numérique délivre

$$M_0 = \sqrt{\pi} \times 2,18 \times 10^{-8} = 3,86 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

Un tel trou noir appartiendrait à la catégorie des trous noirs primordiaux.

Évolution de la masse d'un trou noir

Cette partie cherche à tester l'hypothèse selon laquelle les trous noirs supermassifs observés dans notre Univers actuel se sont formés à partir de trous noirs primordiaux de très faibles masses, eux-mêmes formés au moment du Big Bang. On suppose que l'énergie d'un trou noir est égale à son énergie de masse. Plusieurs phénomènes peuvent modifier la masse d'un trou noir au cours du temps. On considère la combinaison de trois d'entre eux :

1. Un trou noir rayonne de l'énergie à la manière d'un corps noir, entraînant son évaporation progressive. On donne $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ la constante de STEFAN-BOLTZMANN et on admet que la température T d'un trou noir de masse M est donnée par

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}$$

où k_B désigne la constante de BOLTZMANN.

2. Un trou noir voit sa masse augmenter par accrétion de la matière environnante. Pour un trou noir de masse M , le taux d'accrétion moyen \dot{M}_{acc} est donné par

$$\dot{M}_{\text{acc}} = \frac{M}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = 4,5 \times 10^7 \text{ ans.}$$

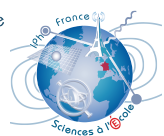
3. Un trou noir peut voir sa masse augmenter en fusionnant avec d'autres trous noirs proches de lui. La quantité de masse récupérée par unité de temps via ce phénomène, notée \dot{M}_{fus} , s'estime selon

$$\dot{M}_{\text{fus}} = \Gamma M.$$

Le taux de fusion de trous noirs Γ est tel que $\Gamma \leq 1 \times 10^{-7} \text{ ans}^{-1}$.

Q6. En étudiant les phénomènes proposés, montrer que la masse M d'un trou noir vérifie l'équation différentielle

$$\dot{M} = \frac{-\alpha}{M^2} + \beta M$$



avec α et β deux constantes à exprimer. En déduire l'expression de la masse minimale que doit avoir un trou noir (en fonction de α et de β), afin de grossir avec le temps. On fournit $\alpha = 3,95 \times 10^{15}$ SI. Faire l'application numérique et proposer une conclusion sur l'hypothèse de cette partie, en commentant la modélisation.

L'énergie E d'un trou noir est égale à son énergie de masse, ainsi $E = M c^2$ avec M sa masse. Le trou noir perd de l'énergie par rayonnement (phénomène 1) et en gagne par accrétion de matière (phénomène 2) et par fusion d'autres trous noirs (phénomène 3). Commençons par traduire le phénomène 1 de rayonnement. La loi de STEFAN-BOLTZMANN fournit la puissance surface P_s du rayonnement du corps noir

$$P_s = \sigma T^4$$

On en déduit la puissance totale P selon

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

La température T est fournie par l'énoncé. On estime R le rayon du trou noir comme étant R_{Sch} . Par conséquent,

$$P = 4\pi \left(\frac{k_2 G M}{c^2} \right)^2 \times \sigma \times \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \right)^4 = \frac{4\pi k_2^2 G^2}{c^4} \sigma \frac{\hbar^4 c^{12}}{(8\pi)^4 k_B^4 G^4} \times \frac{M^2}{M^4} = \frac{k_2^2}{1024\pi^3} \frac{\sigma c^8 \hbar^4}{k_B^4 G^2} \times \frac{1}{M^2}$$

La puissance P est perdue par le trou noir, ce qui correspond à une perte de puissance par rayonnement notée \dot{E}_{ray} qui se traduit par une perte de masse correspondante $\dot{M}_{\text{ray}} = \dot{E}_{\text{ray}}/c^2$. Ainsi,

$$\dot{M}_{\text{ray}} = \frac{\dot{E}_{\text{ray}}}{c^2} = -\frac{P}{c^2} = -\underbrace{\frac{k_2^2}{1024\pi^3} \frac{c^6 \hbar^4 \sigma}{k_B^4 G^2}}_{=\alpha} \frac{1}{M^2} = \frac{-\alpha}{M^2}$$

On somme les deux contributions des phénomènes 2 et 3 pour obtenir le gain de masse total : $\dot{M}_{\text{gain}} = \dot{M}_{\text{acc}} + \dot{M}_{\text{fus}}$. On obtient

$$\dot{M}_{\text{gain}} = \underbrace{\left(\frac{1}{\tau} + \Gamma \right)}_{=\beta} M = \beta M$$

Finalement, la variation complète de la masse est telle que

$$\dot{M} = \dot{M}_{\text{ray}} + \dot{M}_{\text{gain}} = \frac{-\alpha}{M^2} + \beta M$$

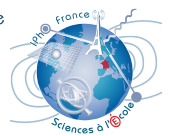
avec $\alpha > 0$. On pose la fonction f définie par

$$f(M) = \frac{-\alpha}{M^2} + \beta M$$

En étudiant sa dérivée, on constate que

$$f'(M) = \frac{2\alpha}{M^3} + \beta > 0$$

car $\alpha > 0$ et $M > 0$. Par conséquent, la dérivée de f étant strictement positive, on en déduit que f est strictement croissante. Ainsi, si la masse initiale M_0 du trou noir est telle que $f(M_0) > 0$, la quantité \dot{M} est toujours strictement positive et le trou noir gagne en permanence de la masse. Autrement, il en perd jusqu'à disparaître. On cherche la masse critique M_{crit} telle que $f(M_{\text{crit}}) = 0$.



Celle-ci vérifie

$$\frac{\alpha}{M_{\text{crit}}^2} = \beta M_{\text{crit}} \quad \text{soit} \quad M_{\text{crit}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/3}$$

On trouve pour la masse critique

$$M_{\text{crit}} = 1,01 \times 10^{10} \text{ kg}$$

Cette masse est bien trop grande devant la masse des trous noirs primordiaux pour que ceux-ci puissent donner des trous noirs supermassifs. Ce modèle exclut l'hypothèse formulée en début de partie.

Commentaire plus poussé : les phénomènes 2 et 3 fonctionnent pour des trous noirs suffisamment massifs, ayant une masse plus grande que la masse critique trouvée. En effet, ces modélisations effectives supposent que le trou noir est suffisamment massif pour persister entre deux fusions de trous noirs ou le temps que la masse accrétée puisse être modélisée proportionnellement à la masse du trou noir. Les trous noirs ayant une masse plus petite que M_{crit} vont simplement s'évaporer trop rapidement pour que les phénomènes 2 et 3 entrent en jeu.

Fin de la partie C

Partie D

Problème 1

Travelling contrarié

Durée conseillée : 1 heure.

Le *travelling contrarié* est un effet de cinéma qui combine un **zoom optique** et un **déplacement réel** de la caméra sur un rail, dans la direction opposée (figure 1). Concrètement, la caméra avance vers le sujet tout en dézoomant, ou recule tout en zoomant, de sorte que la taille apparente du personnage reste constante tandis que l'arrière-plan semble se comprimer ou s'étirer.



FIGURE 1 – Illustration d'une situation de travelling contrarié. Source : thedailyjaws.com

Ce jeu entre mouvement physique et focale modifie la perspective et provoque une sensation de vertige. Inventé par Alfred Hitchcock dans *Sueurs froides* (1958), il a été repris par Steven Spielberg dans *Les Dents de la mer* (1975), lorsque le chef Brody, assis sur la plage, comprend soudain qu'un baigneur vient d'être attaqué par un requin. C'est cette scène particulière, appelée « *Get out of the water* », qui est étudiée dans ce problème (figure 2). Pendant tout le travelling, la mise au point est faite sur la jeune femme placée juste derrière le capitaine Brody.



FIGURE 2 – Illustration du travelling contrarié. Les photos sont extraites de la scène *Get out of the water*

Les photos du tournage de cette scène sont données sur la figure 3.

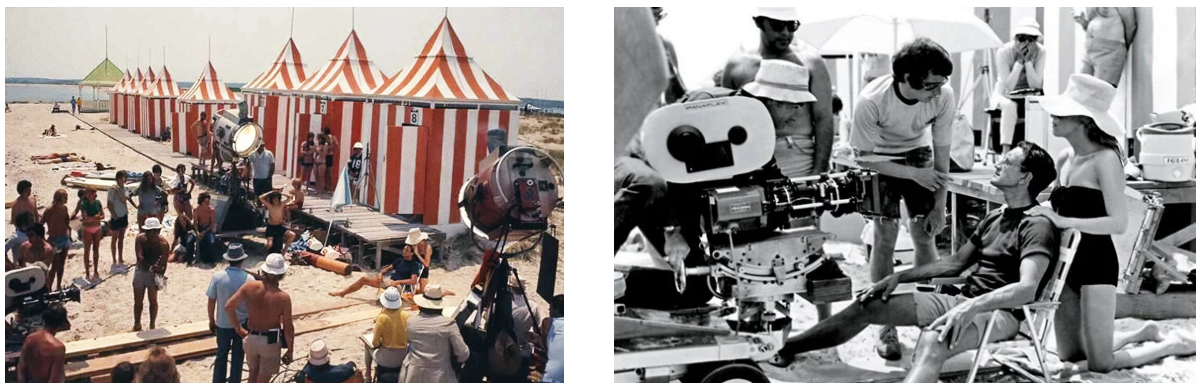


FIGURE 3 – Configuration du tournage de la scène *Get out of the water*. Source : thedailyjaws.com

RELATION UTILE

La relation de conjugaison de Descartes des lentilles minces permet de déterminer la position de l'image connaissant la position de l'objet. Les positions de l'objet et de l'image sont repérées par leurs distances algébriques au centre optique O de la lentille : \overline{OA} et $\overline{OA'}$.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

1 Angle de champ

L'angle de champ (ou champ angulaire) est l'angle α sous lequel la scène photographiée est capturée depuis le centre optique de l'objectif. Il correspond à l'angle formé, au niveau de l'objectif, par deux points de la scène situés aux limites de ce qui est visible sur la photographie. Les images de ces deux points se trouvent sur les bords du cliché (horizontalement, verticalement ou en diagonale; figure 4). Pour s'affranchir de la dépendance de l'angle de champ avec la distance de mise au point – dépendance relativement faible pour les objectifs de focale standard – il est usuellement défini pour une mise au point à l'infini.

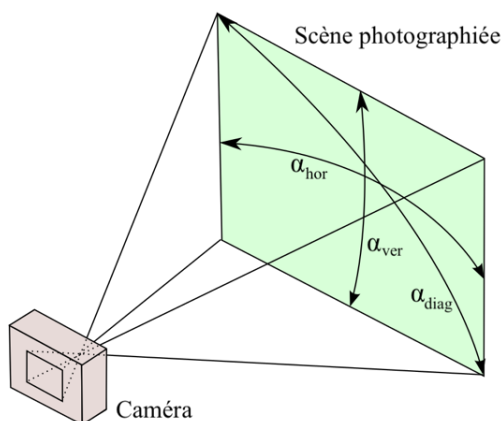


FIGURE 4 – Angle de champ. Source : wikipedia.org

Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de l'angle de champ au cours du travelling, responsable de l'effet de vertige mentionné en introduction. Pour cela, on modélise l'objectif de la caméra utilisée par Spielberg par l'association d'une simple lentille mince convergente \mathcal{L} , de distance focale f' , et d'un capteur photosensible, ici une pellicule \mathcal{P} de taille L . Le système optique étudié est schématisé sur la figure 5.

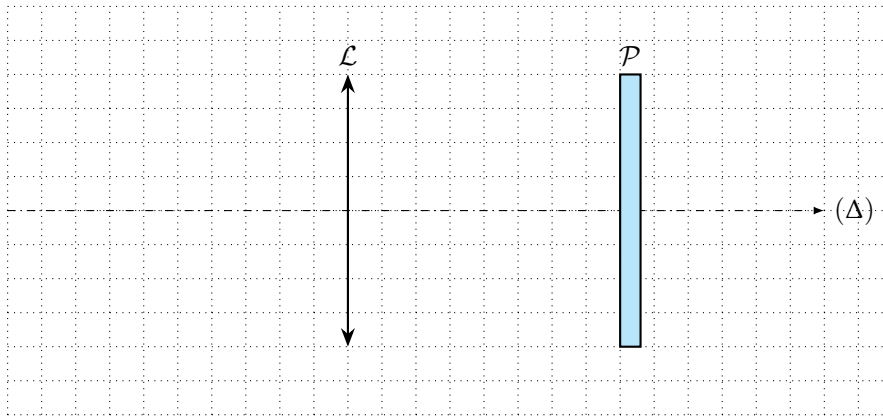


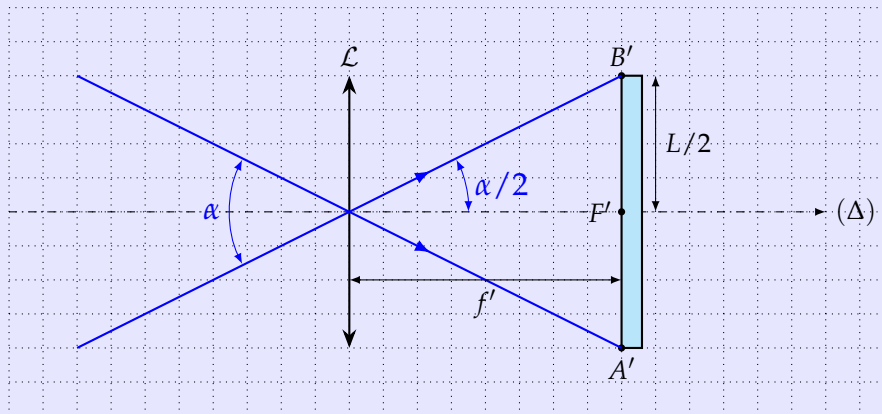
FIGURE 5 – Modèle simplifié de l'objectif de la caméra

Q1. Pour une mise au point à l'infini, préciser où se situe la pellicule \mathcal{P} par rapport à la lentille \mathcal{L} . Justifier.

La mise au point étant faite sur un objet à l'infini, la pellicule \mathcal{P} doit être placée dans le plan focal image de la lentille \mathcal{L} , c'est-à-dire à une distance f' de la lentille \mathcal{L} .

Pour déterminer l'angle de champ, on considère un objet transverse AB situé à l'infini dont les points images conjugués A' et B' se forment sur les bords de la pellicule.

Q2. Sur la figure 5, représenter l'angle de champ α . Établir ensuite son expression en fonction de L et f' .



Géométriquement

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{L}{2f'}$$

On étudie les deux photos ci-dessous, extraites de la scène *Get out of the water*.



Q3. Comparer le champ angulaire de ces photos. En déduire celle qui a été prise avec l'objectif de plus grande focale.

On observe que la photo de gauche est prise avec un champ angulaire plus restreint que celle de droite. En notant α_2 le champ angulaire de la photo de gauche et α_1 le champ angulaire de la photo de droite : $\alpha_2 < \alpha_1$.

La fonction tangente étant strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$

$$\tan(\alpha_2/2) < \tan(\alpha_1/2) \quad \text{soit} \quad \frac{L}{2f'_2} < \frac{L}{2f'_1} \quad \Rightarrow \quad f'_2 > f'_1$$

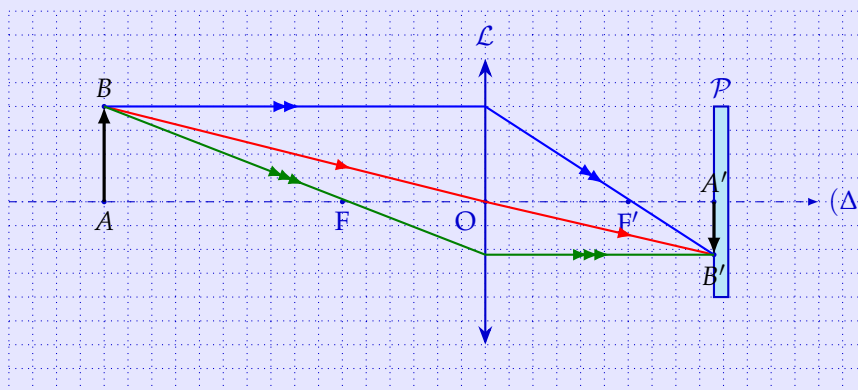
La photo de gauche a donc été prise avec une focale plus grande que la photo de droite.

2 Étude des images de la scène *Get out of the water*

On modélise dans cette partie de façon plus fine la situation du travelling contrarié : l'objectif de la caméra, toujours assimilé à une simple lentille convergente \mathcal{L} de focale f' , est maintenant **mobile**. On rappelle que, par définition du travelling contrarié, la taille apparente du personnage sur lequel la mise au point est faite ne change pas : le grandissement γ est donc constant.

Q4. Sur un schéma, représenter l'objectif \mathcal{L} de la caméra, le personnage sur lequel la mise au point est faite, qu'on assimilera à un objet transverse AB , la pellicule \mathcal{P} ainsi que l'image $A'B'$ qui s'y forme. Le schéma doit représenter la situation de façon réaliste.

On représente la situation sur le schéma ci-dessous :



L'image se forme sur la pellicule \mathcal{P} ; elle est réelle, réduite et renversée.

Q5. On note d la distance entre l'objet sur lequel la mise au point est faite et la lentille \mathcal{L} . Exploiter les relations de Descartes pour exprimer la focale f' en fonction de la distance d et du grandissement transversal γ uniquement.

D'après la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On multiplie par \overline{OA} pour faire apparaître le grandissement γ :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} - 1 = \frac{\overline{OA}}{f'} \quad \text{Or} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{\overline{OA}}{f'}$$

Avec $d = -\overline{OA} > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{-d}{f'} \Rightarrow \frac{-d}{f'} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{d\gamma}{\gamma-1}}$$

Q6. En exploitant la photo ci-dessous et en détaillant votre démarche, estimer la valeur du grandissement transversal γ au cours du travelling.

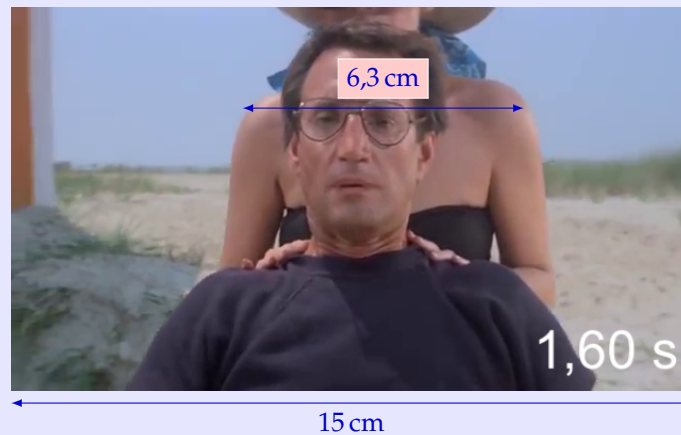


DONNÉES UTILES

- Dimension du négatif sur la pellicule utilisée par Spielberg : $32,5 \text{ mm} \times 18,6 \text{ mm}$.
- Pendant tout le travelling, la mise au point est faite sur la jeune femme placée juste derrière le capitaine Brody.
- Largeur moyenne des épaules d'une femme adulte : $D = 35 \text{ cm}$.



On commence par estimer la taille x de l'image des épaules de la jeune femme (sur laquelle la mise au point est faite) sur la pellicule. On utilise la proportionnalité entre la taille de la pellicule et les mesures sur la photo.



On obtient

$$x = \frac{6,3 \text{ cm} \times 32,5 \text{ mm}}{15 \text{ cm}} = 14 \text{ mm}$$

Ainsi, le grandissement γ a pour valeur

$$\gamma = -\frac{x}{D} = -\frac{13,65 \text{ mm}}{35 \text{ cm}} = \boxed{-3,9 \times 10^{-2}}$$

On attend la valeur de γ avec un ou deux chiffres significatifs.

En observant les photos du tournage (figure 3), on peut estimer les distances minimale et maximale d_{\min} et d_{\max} entre l'objectif de la caméra et le plan de mise au point au cours du travelling de la scène *Get out of the water* :

$$d_{\min} \approx 1 \text{ m} \quad \text{et} \quad d_{\max} \approx 6 \text{ m}$$

Q7. En déduire une estimation des focales minimale et maximale f'_{\min} et f'_{\max} de l'objectif de la caméra utilisée lors de cette scène.

D'après la question 5

$$f'_{\min} = \frac{d_{\min} \gamma}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad f'_{\max} = \frac{d_{\max} \gamma}{\gamma - 1}.$$

Les applications numériques donnent, en ne gardant qu'un seul chiffre significatif

$$\boxed{f'_{\min} = 4 \text{ cm}} \quad \text{et} \quad \boxed{f'_{\max} = 0,2 \text{ m}}.$$

C'est-à-dire environ 40 mm et 200 mm (cohérent avec l'objectif réellement utilisé pour tourner la scène!). On attend les valeurs des focales f'_{\min} et f'_{\max} avec un seul chiffre significatif.

3 Principe de fonctionnement d'un objectif à focale variable

La nécessité de faire varier la focale au cours du travelling a été mise en évidence. Il faut donc désormais affiner la modélisation de l'objectif de la caméra en étudiant le principe de fonctionnement d'un objectif à focale variable.

Les objectifs utilisés en prise de vue cinématographique sont des systèmes optiques très sophistiqués, constitués d'une vingtaine de lentilles. Dans cette partie, on modélise l'objectif de la caméra utilisée par Spielberg par un simple doublet de deux lentilles minces :

- celle du côté objet, appelée « lentille frontale », est convergente de distance focale $f'_1 = 100 \text{ mm}$ et de centre O_1 . Elle est fixe par rapport à la pellicule ;
- celle du côté image, appelée « lentille arrière », est divergente de distance focale $f'_2 = -50 \text{ mm}$ et de centre O_2 . Elle est mobile par rapport à la pellicule.

Le système optique étudié est schématisé sur la figure 6 avec $e = \overline{O_1O_2} = 200$ mm.

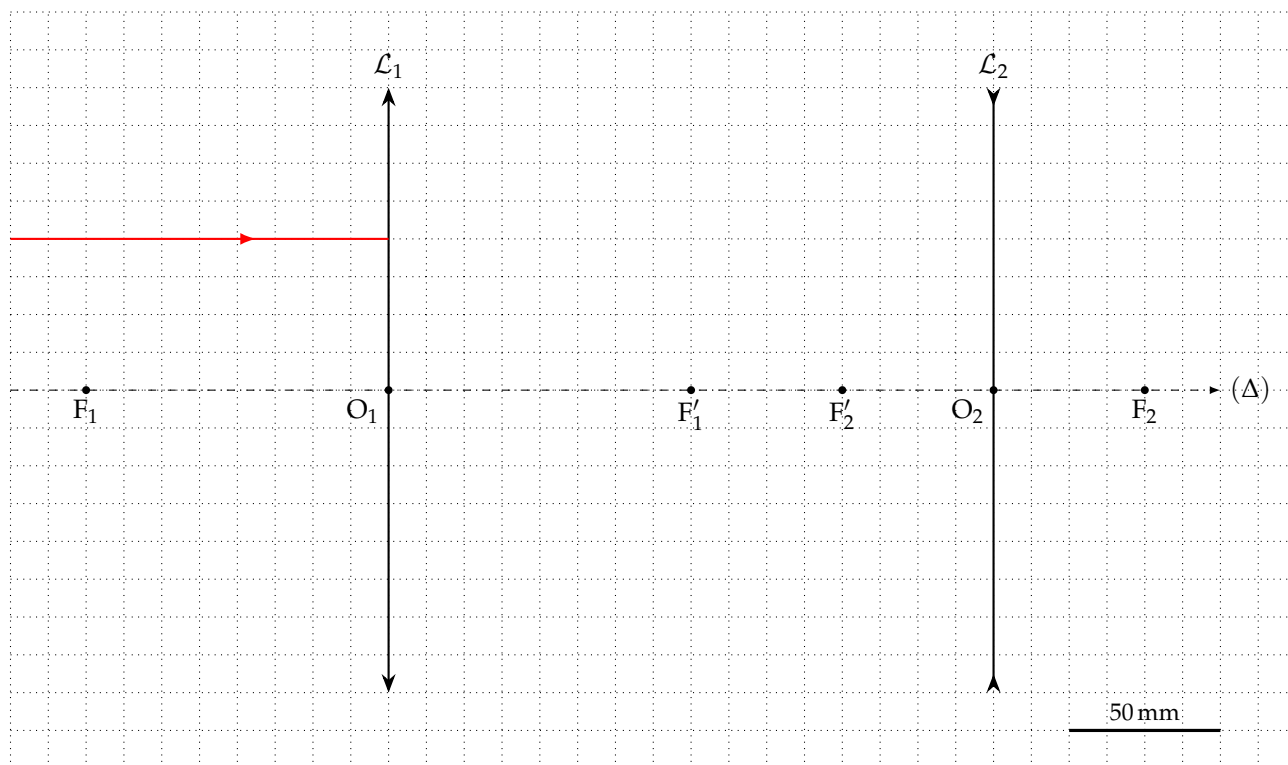
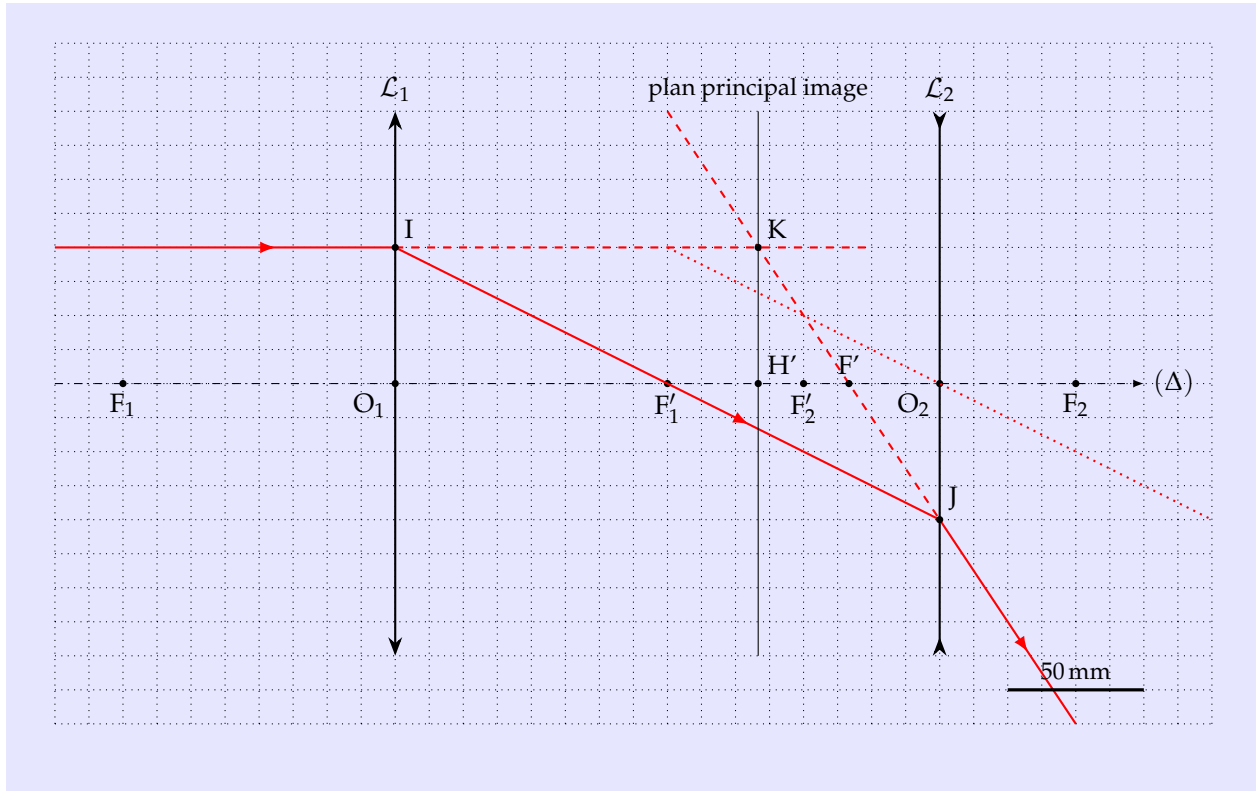


FIGURE 6 – Modèle à deux lentilles d'un objectif photographique

Le but de cette partie est de déterminer l'expression de la distance focale f' de l'objectif photographique. On confrontera ce résultat avec son encombrement lors du tournage de la scène *Get out of the water*.

On considère un rayon incident sur la lentille frontale \mathcal{L}_1 parallèle à l'axe optique.

Q8. Tracer sur la figure 6 la marche complète de ce rayon. En déduire la position du foyer principal image F' du doublet.



La distance focale image f' du doublet est la distance entre son foyer principal image et le plan principal image. On positionne ce plan en trouvant l'intersection entre le prolongement d'un rayon incident parallèle à l'axe optique arrivant sur le doublet et le prolongement du rayon correspondant émergent du doublet. On trace ensuite le plan perpendiculaire à l'axe optique qui contient ce point.

On note H' le point d'intersection entre le plan principal image et l'axe optique. La distance focale image du doublet est alors par définition $f' = \overline{H'F'}$.

Q9. Tracer sur la figure 6 le plan principal image du doublet. Positionner H' , puis mesurer f' .

Compte tenu de l'échelle, on mesure une distance $\overline{H'F'}$ de 33 mm.

Q10. En observant attentivement la construction géométrique des deux questions précédentes, expliquer pourquoi une modélisation complète d'un objectif à focale variable comporte au moins une lentille supplémentaire, appelée *lentille compensatrice parfocale*, indispensable pour permettre la formation de l'image sur la pellicule.

Les objets photographiés étant à des distances grandes devant la focale de l'objectif, l'image se forme non loin de F' . On a alors une image virtuelle, impossible à observer sans système de projection (la lentille compensatrice).

Dans les objectifs réels, la position de la lentille compensatrice est mécaniquement asservie pour maintenir la mise au point quand on change la focale. Lors d'un travelling contrarié, le cameraman ne contrôle donc que la focale sans se préoccuper de la mise au point.

Q11. À l'aide d'un théorème géométrique, exprimer la distance $\overline{O_2F'}$ en fonction de f' , f_1' et $e = \overline{O_1O_2}$.



D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{-\overline{O_2F'}}{-\overline{O_2J}} = \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'K}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{F'_1O_2}}{-\overline{O_2J}} = \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_1I}}.$$

Puisque $\overline{O_1I} = \overline{H'K}$, il vient :

$$\frac{\overline{O_2F'}}{\overline{H'F'}} = -\frac{\overline{F'_1O_2}}{\overline{O_1F'_1}} \quad \text{soit} \quad \frac{\overline{O_2F'}}{f'} = -\frac{e - f'_1}{f'_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_2F'} = -\frac{f'(e - f'_1)}{f'_1}}.$$

Q12. Identifier le point conjugué du foyer principal image F' par la lentille arrière \mathcal{L}_2 . Exploiter cette conjugaison et la relation établie à la question précédente pour montrer que

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}.$$

En décomposant la conjugaison, on constate que F' est le point conjugué de F'_1 par \mathcal{L}_2 . En effet :

$$A_{\infty \text{ sur } \Delta} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'$$

Puisque F' est le conjugué de F'_1 par \mathcal{L}_2 , on a :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{soit} \quad -\frac{f'_1}{f'(e - f'_1)} - \frac{1}{-(e - f'_1)} = \frac{1}{f'_2},$$

d'où :

$$-\frac{f'_1}{f'(e - f'_1)} = -\frac{1}{(e - f'_1)} + \frac{1}{f'_2}$$

et donc :

$$\frac{1}{f'} = -\frac{e - f'_1}{f'_1} \left(-\frac{1}{(e - f'_1)} + \frac{1}{f'_2} \right) = \frac{1}{f'_1} - \frac{e - f'_1}{f'_1 f'_2}$$

et finalement :

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}}.$$

Pour le tournage de la scène *Get out of the water*, la caméra était équipée d'un objectif *Angénieux 25-250mm High Precision* (Source : camescoop.com), qui est présenté sur la figure 7. Les distances focales minimale et maximale de cet objectif sont : $f'_{\min} = 25$ mm et $f'_{\max} = 250$ mm. Le diamètre de la lentille frontale est de 136 mm.



FIGURE 7 – Objectif ANGENIEUX 25–250mm HP. Source : rcservice.es

Q13. Estimer l'encombrement de l'objectif *Angénieux 25-250mm High Precision* en calculant la valeur maximale de la distance inter-lentille e . Vérifier la vraisemblance des valeurs obtenues avec les photographies des figures 3 et 7.

On a

$$e = f'_1 f'_2 \left(\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{f'} \right).$$

L'application numérique donne

$$e_{\max} = 250 \text{ mm}.$$

Ce calcul semble indiquer que la taille de l'objectif de la caméra utilisée est environ de 30 cm.

Cet ordre de grandeur correspond bien à ce que l'on peut voir sur les figures 3 et 7. En effet :

- ➔ sur la figure 3 à droite, on peut voir que l'objectif n'est pas plus grand qu'un avant-bras, ce qui donne quelques dizaines de centimètres en OdG (si la qualité de l'impression ne permet pas de distinguer ce détail sur la photo, le candidat pourra utiliser le second argument) ;
- ➔ sur la figure 7, on peut voir que l'objectif est environ trois fois plus grand que le diamètre de sa lentille frontale, dont le diamètre est de l'ordre de la dizaine de centimètres (donné dans le texte).

4 Hypothèses sur le mouvement de *travelling*

Les photographies du tournage montrent que la caméra est déplacée sur un chariot conduit par des rails. *Attention, sur la figure 3, ces rails semblent inclinés par rapport à la plage; ils ne sont donc pas nécessairement horizontaux.*

La figure 8 représente l'évolution au cours du temps de la distance d entre la caméra et le sujet. Cette distance a été mesurée par un pointage image par image de la scène. On se propose d'exploiter ces données afin de caractériser le mouvement du chariot, puis d'en déduire la nature des forces qui s'exercent sur lui pendant la prise de vue. Les moyens techniques disponibles à l'époque ne permettent pas d'envisager une motorisation du chariot. Son mouvement résulte donc d'une action mécanique extérieure.

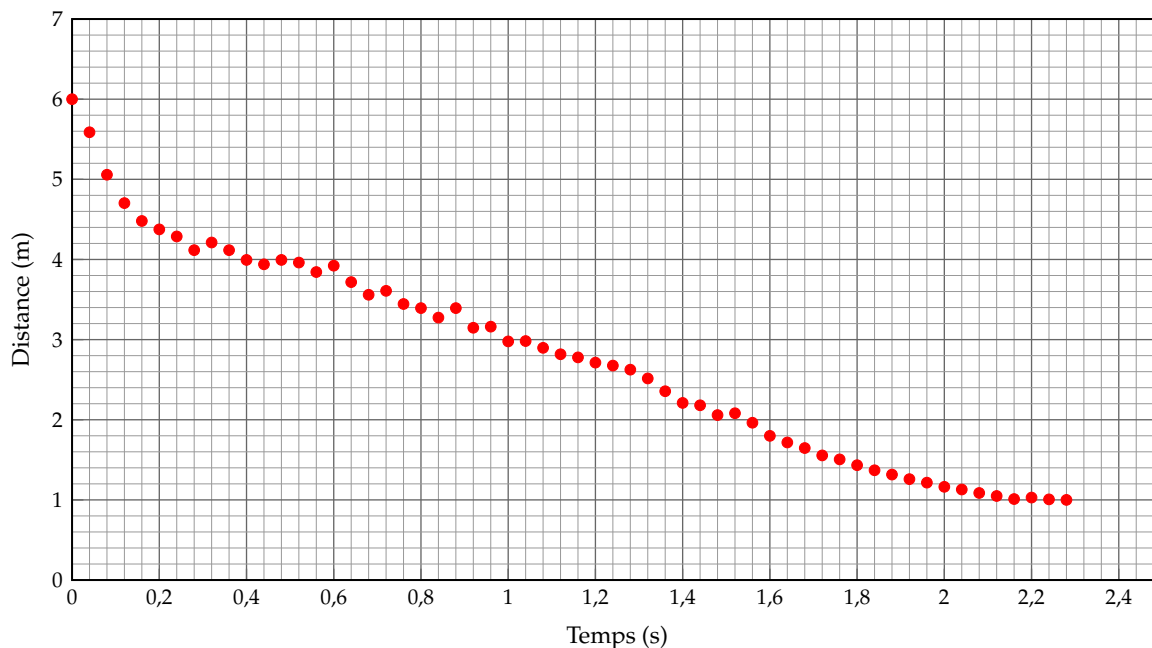


FIGURE 8 – Évolution temporelle de la distance sujet-caméra dans la scène *Get out of the water*.

Q14. À partir de la figure 8, décrire le mouvement du chariot au cours de la scène, puis proposer une hypothèse vraisemblable sur les forces susceptibles d'agir sur lui et la discuter.

Compte tenu de la situation étudiée, on peut envisager deux hypothèses sur les forces à l'œuvre :

- Hypothèse 1 : le chariot débute la scène immobile puis accélère sous l'effet de son propre poids. Il est soumis à son poids et à l'action du sol, avec un effet négligeable des frottements. La vitesse du chariot serait initialement nulle puis augmenterait avec le temps.
- Hypothèse 2 : le chariot est lancé avant le début de la scène puis ralentit sous l'effet des frottements et de l'action des machinistes sur le plateau. La vitesse du chariot serait d'abord maximale puis diminuerait avec le temps.

On étudie le mouvement du chariot dans le référentiel terrestre et on choisit la position initiale de la caméra comme origine du repère. On s'intéresse à l'évolution temporelle de la valeur de la vitesse que l'on obtient en prenant la valeur absolue de la dérivée de la distance d .

Sur la figure 8, on observe que la distance diminue fortement initialement puis de plus en plus lentement avec le temps. On a donc une vitesse initiale importante qui diminue jusqu'à s'annuler en fin de scène.

Ces observations sont en accord avec l'hypothèse 2 et en contradiction avec l'hypothèse 1.

Fin de la partie D

Partie E

Problème 2

Radioactivité alpha

Durée conseillée : 1 heure.

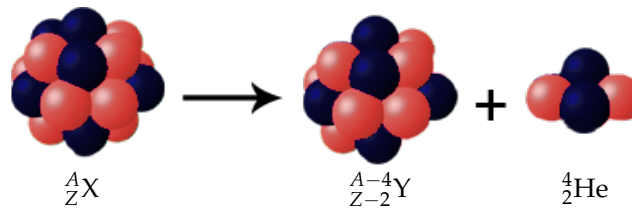
Ne pas rendre cette page

Le noyau d'un atome X , noté ${}^A_Z X$, est constitué de A nucléons : Z protons de charge $+e$ et $N = A - Z$ neutrons dépourvus de charge. On considère que ces nucléons ont un rayon r_0 de l'ordre de quelques femtomètres ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

Document 1 : Radioactivité alpha et taille des noyaux

« La cohésion du noyau résulte de l'interaction forte qui est portée par le pion, une particule de masse $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2$ pouvant être considérée comme quasi-ponctuelle. L'échange de pions entre nucléons crée une liaison nucléaire ayant une énergie, notée B , de l'ordre de quelques MeV (voir Document 2).

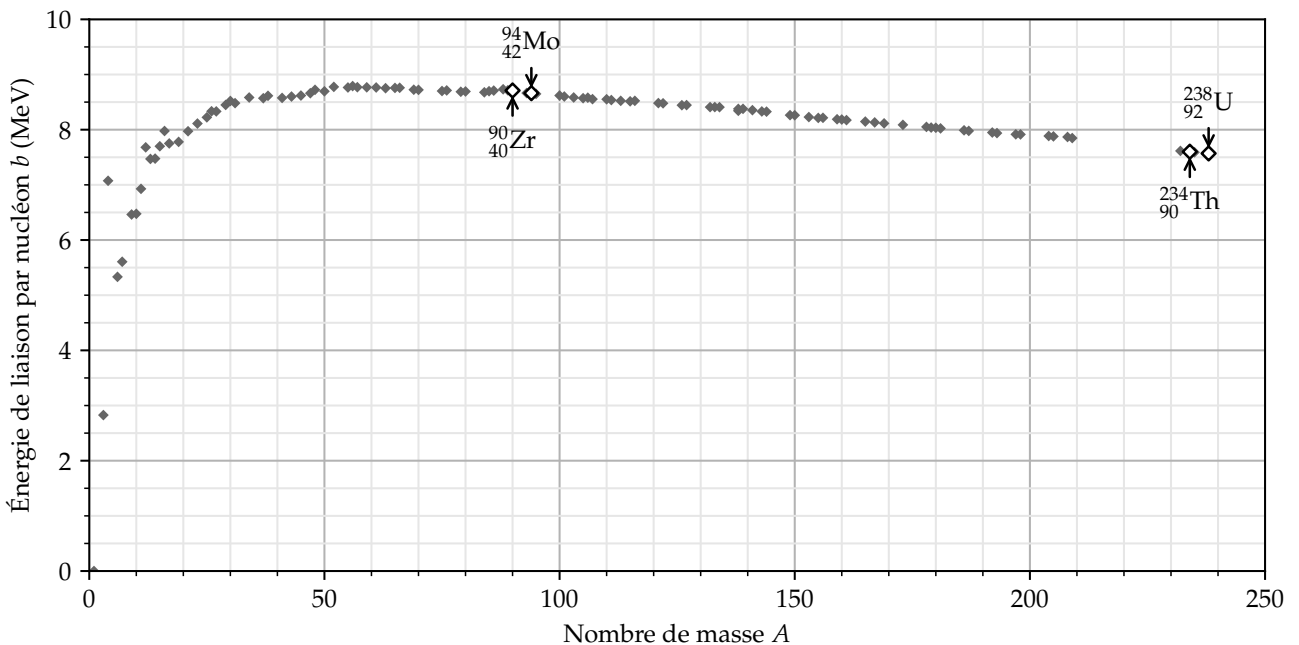
Certains noyaux lourds (tels que $A \gg 1$) se désintègrent spontanément par radioactivité alpha en éjectant une particule alpha (c'est à dire un noyau de ${}^4_2\text{He}$) :



Cela se produit lorsqu'il est énergétiquement plus favorable de rompre les liaisons nucléaires entre le noyau fils et la particule alpha que de les maintenir en présence de l'interaction coulombienne répulsive. »

Adapté de S. Wong, Introductory Nuclear Physics

Document 2 : Courbe d'Aston : Énergie de liaison par nucléon pour différents noyaux



Nom :

Lycée :

Prénom :



La question **Q1.** peut être traitée indépendamment des suivantes.

Q1. Retrouver l'ordre de grandeur du rayon d'un nucléon r_0 par analyse dimensionnelle, en fonction de la masse du pion m_π , de la constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et d'une autre constante fondamentale.

On adopte pour la suite la valeur $r_0 = 1,3$ fm.

Q2. En précisant les hypothèses effectuées, donner une relation entre le rayon du noyau R_A , le nombre de masse A , et le rayon d'un nucléon r_0 .

Q3. En précisant les hypothèses effectuées, déterminer l'énergie de séparation S en MeV de toutes les liaisons du noyau père qui sont rompues lors de la désintégration alpha.

Q4. En précisant les hypothèses effectuées, donner un critère sur le nombre de masse A à partir duquel un noyau peut être radioactif alpha. En déduire, selon ce critère, si le ${}_{42}^{94}\text{Mo}$ et le ${}_{92}^{238}\text{U}$ sont des noyaux radioactifs alpha. Commenter.



R 1. Nous prenons ici en compte la masse du pion m_π , la constante de Planck réduite \hbar et la vitesse de la lumière c . L'équation aux dimensions est :

$$[r_0] = [m_\pi]^\alpha [\hbar]^\beta [c]^\gamma.$$

Sachant que $[r_0] = L$, $[\hbar] = ML^2T^{-1}$ et $[c] = L.T^{-1}$, nous en déduisons :

$$L^1 = M^\alpha M^\beta L^{2\beta} T^{-\beta} L^\gamma T^{-\gamma} \implies \begin{cases} 1 = 2\beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta \\ 0 = -\beta - \gamma \end{cases}$$

Les équations 2 et 3 donnent directement $\alpha = -\beta = \gamma$. Il nous suffit d'injecter ceci dans l'équation 1 et obtenir γ :

$$1 = 2 \times (-\gamma) + \gamma \implies \gamma = -1$$

Nous en déduisons directement $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. Ainsi :

$$r_0 \sim \frac{\hbar}{m_\pi c}$$

Nous pouvons ainsi donner un ordre de grandeur de r_0 (sachant que $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2 = 2,4 \times 10^{-28} \text{ kg}$) :

$$r_0 \sim \frac{\hbar}{m_\pi c} = \frac{1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{299\,792\,458 \text{ m/s} \times 2,4 \times 10^{-28} \text{ kg}} = 1,5 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Qui correspond à l'ordre de grandeur du rayon d'un nucléon (donné en début d'énoncé).

R 2. Nous pouvons raisonner en termes de volume ici. Pour cela, nous considérons les nucléons et le noyau comme sphériques. Le noyau a un rayon R_A :

$$V_{\text{noyau}} = \frac{4}{3} \pi R_A^3$$

Un nucléon a un volume $V_{\text{Nucléon}}$ tel que :

$$V_{\text{Nucléon}} = \frac{4}{3} \pi r_0^3$$

Comme le noyau possède A nucléons, alors le volume du noyau est égal à $A \times V_{\text{Nucléon}}$. Ainsi :

$$\frac{4}{3} \pi R_A^3 = A \times \frac{4}{3} \pi r_0^3 \implies \boxed{R_A = r_0 \times A^{1/3}}$$

R 3. En supposant que le noyau fils est au repos après désintégration du noyau père, l'énergie de séparation s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} S &= B(X) - B(Y) \\ &= Ab_X - (A - 4)b_Y \\ &= 4b_Y + A(b_Y - b_X) \end{aligned}$$

On peut voir, par lecture sur la courbe d'Aston, que le dernier terme est négligeable devant l'autre. En effet, si on considère que $b_Y - b_X$ vaut environ un dixième de graduation, à savoir $0,02 \text{ MeV}$, alors $A(b_Y - b_X) \simeq 2 \text{ MeV}$ pour $A = 100$. Dans ce cas :

$$S \simeq 4b_Y.$$

Cela donne $S \simeq 4 \times 7,5 \text{ MeV} = 30 \text{ MeV}$ pour ${}^{238}_{92}\text{U}$, $S \simeq 4 \times 8,5 \text{ MeV} = 34 \text{ MeV}$ pour ${}^{94}_{42}\text{Mo}$. En l'état, il est équivalent d'estimer que cette énergie est aussi l'énergie pour former la particule alpha puisque :

$$4b_\alpha \simeq 4 \times 7 \text{ MeV} = 28 \text{ MeV}.$$



R 4. D'après le document 1, il y a radioactivité alpha quand l'énergie des liaisons nucléaires entre le noyau fils et la particule alpha est comparable à l'énergie d'interaction coulombienne :

$$S \simeq \frac{2e \times (Z - 2)e}{4\pi\epsilon_0 R_A}$$

Nous avons ici considéré que la distance entre le noyau fils et la particule alpha était $R_A = r_0 A^{1/3}$. On suppose qu'après la séparation, le noyau fils et la particule alpha sont quasiment au contact : la distance typique entre le centre du noyau fils et le centre de la particule alpha est à peu près R_A (autre façon plus formelle : comparer $(A - 4)^{1/3}$ et $A^{1/3}$ et voir que les rayons associés sont équivalents pour des noyaux lourds).

Nous pouvons donner un encadrement de A en supposant que $N/Z \in [1; 1,5]$. Cherchons A_{\min} dans les deux cas :

— $N \simeq Z$:

$$1 \sim \frac{e^2(A - 4)}{4\pi\epsilon_0 R_A S} \underset{A \gg 1}{\sim} \frac{e^2 A}{4\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3} S} = \frac{e^2 A^{2/3}}{4\pi\epsilon_0 r_0 S}$$

À partir de là, nous pouvons isoler le nombre de nucléons et ainsi définir le nombre minimal de nucléons nécessaires à la radioactivité alpha :

$$A_{\min}^{N \simeq Z} = \left(\frac{4\pi\epsilon_0 r_0 S}{e^2} \right)^{3/2}$$

L'application numérique donne :

$$A_{\min}^{N \simeq Z} = \left(\frac{4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 1,3 \times 10^{-15} \times 4 \times 8 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{(1,6 \times 10^{-19})^2} \right)^{3/2} \simeq 156$$

— $N \simeq 1,5Z$ (la démarche est la même) :

$$A_{\min}^{N \simeq 1,5Z} = \left(\frac{5\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 1,3 \times 10^{-15} \times 4 \times 8 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{(1,6 \times 10^{-19})^2} \right)^{3/2} \simeq 217$$

Le critère obtenu montre que la radioactivité alpha devient possible pour des noyaux dont le nombre de nucléons est compris approximativement entre $A \simeq 156$ et $A \simeq 217$, selon le rapport N/Z choisi. Dans ces conditions, ${}_{42}^{94}\text{Mo}$, avec $A = 94$, est très en dessous du seuil minimal : il ne peut donc pas être α -radioactif. En revanche, ${}_{92}^{238}\text{U}$, avec $A = 238$, est au-dessus de ce seuil : l'émission d'alpha y est énergétiquement possible. On conclut que ${}^{94}\text{Mo}$ est stable vis-à-vis de la désintégration α , tandis que ${}^{238}\text{U}$ est radioactif alpha.

Dans la nature, les noyaux lourds commencent à être radioactifs alpha pour $A \gtrsim 150$: notre estimation est donc relativement satisfaisante par rapport à l'expérience. Cependant, les hypothèses classiques que nous avons faites sont très simplistes et ne prennent pas en compte le caractère quantique des noyaux. En effet, la résolution a supposé plusieurs approximations discutables :

- l'énergie de séparation ne dépend pas seulement de l'énergie de liaison, mais aussi des énergies cinétiques du noyau fils et de la particule alpha ;
- l'énergie d'interaction coulombienne a été calculée en supposant que le noyau fils et la particule alpha étaient ponctuels, ce qui n'est pas exact en pratique ;
- l'approximation géométrique selon laquelle la distance entre le noyau fils et la particule alpha est très simplificatrice car en réalité, ces deux noyaux ne sont plus au contact après séparation (ce qui modifie l'interaction coulombienne) ;
- l'effet tunnel n'a pas été pris en compte dans la compétition entre le potentiel fini du noyau et la barrière coulombienne (aucun calcul semi-classique issu du modèle de Gamow n'a été effectué) ;
- nous avons choisi d'encadrer N/Z entre 1 et 1,5, alors qu'une loi empirique liant A et Z existe. Cette simplification peut inclure des noyaux qui ne sont pas réellement radioactifs alpha.

Nom :

Lycée :

Prénom :

Sciences à l'École



Fin de la partie E

