



Pointilleux pointillés



COPPIN—ROUSSEL Naël (T^{le})

IBERIT Raphaël (T^{le})

AIT ALI Mélissa (T^{le})

KHELIFI Hanna (T^{le})

Avec l'aide de

- Amina TANDJAOUI, Maîtresse de conférences,
- Edouard DAVIN, Maître de conférences,

Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9013 - LaMcube - Laboratoire de Mécanique, Multiphysique, Multiéchelle, F-59000 Lille, France



Présentation des élèves

<p>COPPIN—ROUSSEL Naël (T^{le}) : Élève nous ayant rejoint dès les débuts du projet. Spécialiste des mesures sur logiciels et rédacteur en chef du rapport, nous lui devons une grande partie de ce qui est écrit ci-dessous !</p>	
<p>IBERIT Raphaël (T^{le}) : Élève nous ayant rejoint l'année dernière lors du début du projet. Le langage informatique étant son domaine, une grande partie des scripts python/décodage python sont signés de son nom !</p>	
<p>AIT ALI Mélissa (T^{le}) : Élève nous ayant rejoint cette année et qui a énormément œuvré sur toutes les mesures physiques réalisées cette année.</p>	
<p>KHELIFI Hanna (T^{le}) : Élève nous ayant rejoint cette année et qui nous a permis grâce à ses longues lectures de rapport de pouvoir le rendre bien plus digeste et qui a apporté beaucoup en vulgarisation du phénomène pour parler du projet au moins calés d'entre nous !</p>	

Présentation des professeurs



<p>Mme.Gronlier</p> <p>Initiatrice du projet, c'est elle qui nous a glissé l'idée d'étude des frottements de la craie et a rendu possible notre projet !</p>	
<p>M.Mahe</p> <p>Mis dans la boucle du projet en milieu d'année dernière, c'est grâce à lui que ce magnifique projet a perduré dans le temps et qu'il continue d'évoluer de semaine en semaine !</p>	

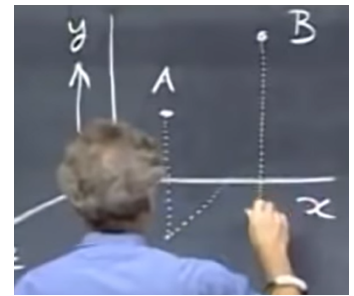
Table des matières

Introduction	1
I. Le frottement de la craie	1
1) Les types de frottement	1
2) Dispositif expérimental	2
3) Frottements statiques	3
4) Frottements dynamiques	4
5) Interprétation microscopique	5
II. Modélisation de la main de Davin	7
1) Première modélisation : modèle stick and slip	7
2) Deuxième modèle : liaison rotule et rappel élastique	8
III. Dispositifs de mesures	9
1) Mesure de la période des pointillés	9
2) Mesure de la vitesse de tracer	9
3) Mesure de l'espacement des pointillés	11
4) Mesure de l'angle de déflexion de la craie	11
IV. Vérification expérimentale de la modélisation	11
1) Influence de l'angle d'attaque	11
2) Influence de la masse de la craie	12
3) Influence de la longueur de la craie	12
4) Influence de la vitesse de tracé	15
5) Influence de la pression exercée	17
Conclusion	18
Liste des annexes	19
Webographie	19

Introduction

Tracer des pointillés avec des craies sur un tableau noir... quelque chose de facile, d'évident. Pourtant, cela nécessite une certaine dextérité et expérience.

Tout a commencé lors du visionnage d'une [vidéo](#) d'un professeur du MIT (Institut de technologie du Massachusetts), l'un des plus importants instituts de recherche américain et université très célèbre des Etats-Unis. Cet institut fondé en 1861 prône les valeurs de la science et de la technologie dont la devise est "Mens et Manus", ce qui donne en français "Esprit et main".



La vue de cette vidéo a directement attisé notre curiosité ainsi que notre envie d'en savoir plus.

Comment un mouvement continu du bras permet-il le tracé précis de pointillés sur un tableau noir ? Quelle inclinaison, quelle vitesse et quel appui doit-on avoir sur la craie pour que le tracé soit optimal ?

Nous savons que l'interaction de deux surfaces en contact qui glissent l'une sur l'autre et qui s'opposent au mouvement crée une force de frottement. C'est le cas ici, lorsque la craie glisse sur le tableau.

I. Le frottement de la craie

Avant de modéliser la main de Davin, il nous faut comprendre l'origine du phénomène qui se trouve dans les frottements statiques et dynamiques.

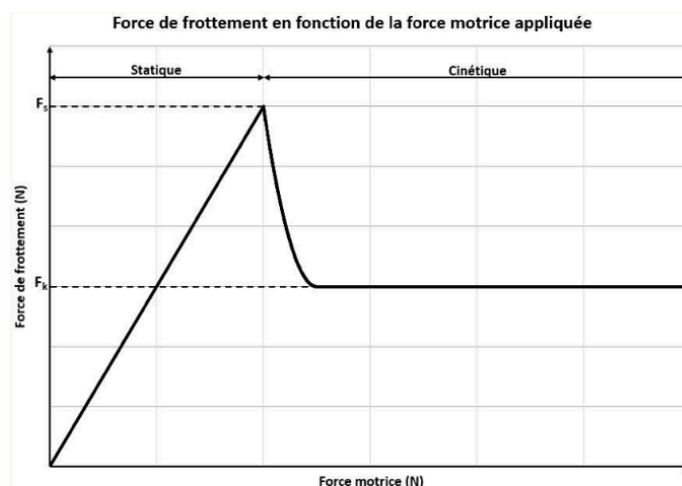
1) Les types de frottement

Nous avons investigué en premier la définition d'un frottement. Le frottement empêche presque tous les objets de se déplacer indéfiniment.

Il y a deux formes principales de frottements :

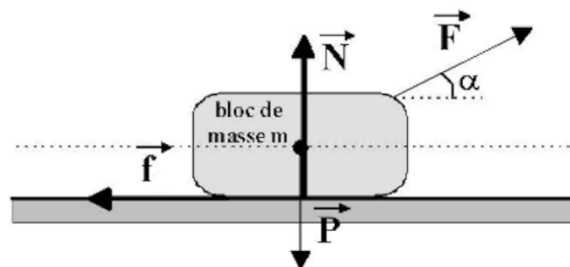
- Le frottement dynamique s'oppose à un mouvement déjà établi.
- Le frottement statique empêche un mouvement de démarrer.

Le frottement statique est un synonyme d'adhérence. Dans ce cas, la force de frottement statique empêche le glissement (ou le mouvement entre les deux objets). Lorsqu'un objet se met en mouvement, ceci signifie que la force motrice exercée sur un objet est supérieure à la force de frottement statique. Alors que lorsque l'objet est en mouvement, la force de frottement dynamique s'applique et, est égale à la force motrice nécessaire pour garder un objet à vitesse constante. Si l'on récapitule, un objet immobile sur lequel on exerce une force motrice offre au départ un frottement statique, mais dès que l'objet se met en mouvement, la force de frottement est dynamique – également appelée cinétique.



Le graphique ci-dessus démontre ce qui se produit lorsqu'un objet immobile est mis en mouvement. Tout d'abord, la force de frottement est statique, car l'objet est immobile. Dès que la force de traction appliquée devient supérieure à la force de frottement statique, l'objet se met en mouvement. La force de frottement diminue rapidement (une phase qu'on appelle glissement adhérent) pour ensuite se stabiliser. La force de frottement, maintenant dynamique ou cinétique, est égale à la force de traction appliquée, ce qui permet de conserver l'état de mouvement de l'objet à vitesse constante.

Le coefficient de frottement permet d'évaluer le degré de résistance d'une surface ou d'un milieu au mouvement d'un corps. Il mesure le ratio entre la force de frottement \vec{f} qui s'oppose au mouvement (initié par une force de traction telle que \vec{F}) et la réaction normale du support \vec{N} : $\mu = \frac{f}{N}$

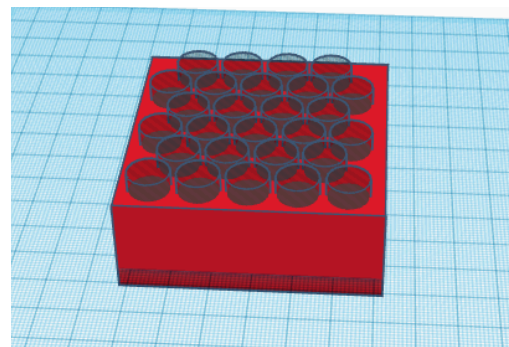


La force de frottement statique maximale étant supérieure à la force de frottement dynamique, on en déduit que $\mu_s > \mu_d$

2) Dispositif expérimental

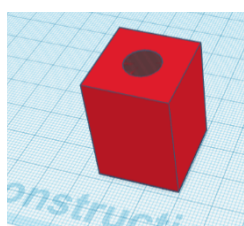
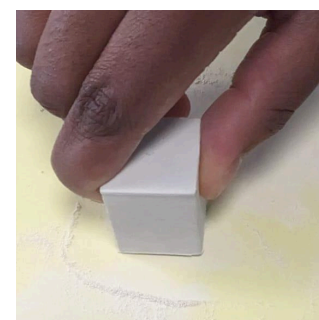
Nous avons voulu mesurer ces deux types de frottements, statique et dynamique, lors de l'interaction craie/tableau et voir si la différence entre le coefficient de frottement statique et dynamique était notable.

Nous avons donc créé un support permettant à plusieurs craies de tenir à la verticale. En changeant le nombre de craies nous modifions ainsi la surface de contact entre les deux corps. Pour cela, nous avons décidé de réaliser un modèle 3D de palet sur Tinkercard© que nous avons imprimé grâce à une imprimante 3D.



Pour être sûr que la craie de diamètre 1 cm puisse s'insérer dans les cavités d'accueil, nous avons décidé de prendre comme diamètre de cavité 1,04 cm pour tenir compte de l'incertitude de 0,2 mm correspondant aux diamètres du fil servant à l'impression. Nous avons donc mis plusieurs trous de diamètre de 1,04 cm dans un palet carré (forme la plus simple à imprimer et à modéliser).

Afin de pouvoir réaliser les mesures, il nous fallait des craies de hauteur identique. Nous avons donc conçu un taille-craie également sous Tinkercard© et imprimé en 3D. Il suffit d'insérer une craie et la poncer/frotter sur du papier jusqu'à ce qu'elle ne dépasse plus du taille-craie. La craie aura alors une taille de 3,0 cm.



Ainsi, les craies obtenues dépassaient toutes de 1,0 cm du palet support d'expérience.

Sur 30 craies taillées dont on a mesuré la masse : on trouve qu'une craie de 3,0 cm de long a une masse de $m_{\text{craie}} = 3,58 \pm 0,02 \text{ g}$ (masse obtenue avec une balance de précision 0,01g).

3) Frottements statiques

Afin de mesurer le coefficient maximal de frottement statique μ_s , nous avons utilisé sur une planche peinte avec de la peinture pour tableau noir, et notre palet rempli d'un nombre N de craies.

La valeur minimale de l'angle α à partir de laquelle le palet de craies se met en mouvement correspond au moment où la force de frottement statique n'est plus assez importante pour empêcher le palet de bouger.

A la limite du glissement on obtient : $\mu_s = \frac{f}{N} = \frac{R \cdot \sin(\alpha)}{R \cdot \cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$

Ainsi la mesure de l'angle minimal correspond au coefficient de frottement statique.

Initialement, nous mesurons cet angle avec un fil à plomb et un rapporteur. Une incertitude de 2 degrés est à prendre en compte à cause du balancement du fil à plomb et d'un effet de parallaxe.

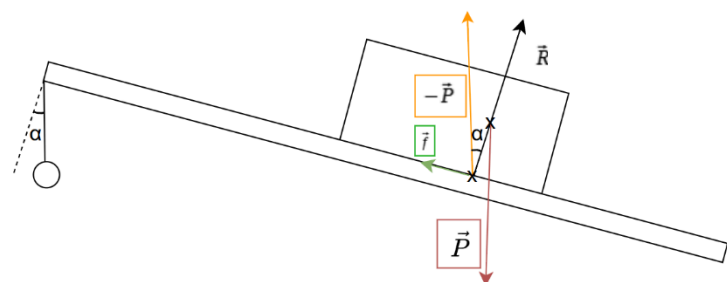
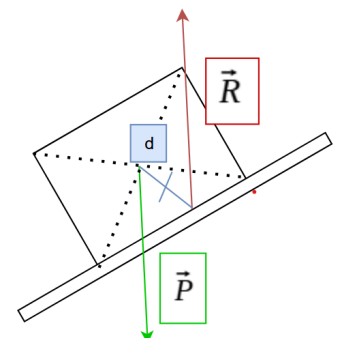


Schéma représentant le modèle de l'expérience

Depuis maintenant l'angle est mesuré grâce à un inclinomètre électronique réduisant drastiquement l'incertitude ($< 1^\circ$).

Un autre problème est également apparu : durant nos premières tentatives d'expériences, le palet à craie basculait au lieu de glisser. Nous avons essayé de coller un poids de laboratoire sur le palet pour l'alourdir, mais il continuait toujours de basculer et dégringolait la planche, les craies minutieusement taillées se cassaient : ce dispositif n'était donc pas efficace.

Le problème vient du fait que le centre de masse du dispositif était trop loin de la surface de contact. La force du poids a pour point d'application le centre de masse du dispositif et la réaction du support le centre de la zone en contact. Tant que le solide est immobile $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$. Les points d'application n'étant pas confondus, séparés d'une distance d , ils exercent un moment qui fait pivoter le système, le pivot étant entre les deux points d'application des forces citées.



Ainsi, nous avons décidé de confectionner une armure en plomb, spécialement pour le palet à craie, avec un bourrelet pour réduire le bras de levier d du système, afin de le maintenir sur la planche tout au long de l'expérience.

La masse du palet en armure sans craies est de : $m_{pA} = 340,6 \text{ g}$

On peut aussi alourdir le système d'une surmasse constitué d'un chapeau de 3 feuillets de plomb, sans qu'il y ait de basculement : $m_{\text{chapeau}} = 190,1 \text{ g}$

Les mesures effectuées sont répertoriées dans le tableau suivant.

Nombre de craies	Armure seule		Armure surchargée de $m=190,1 \text{ g}$	
	α (°)	μ_s	α (°)	μ_s
27	33	0.6494	32	0.6249
22	34	0.6745	33	0.6494
17	32	0.6249	33	0.6494
12	33	0.6494	32	0.6249
7	34	0.6745	32	0.6249
3	32	0.6249	33	0.6494

Il n'y a pas de tendance notable d'évolution du coefficient de frottement statique avec le nombre de craies ou le poids du système. Ainsi, nous constatons que, dans ces expériences, le coefficient de frottement statique ne semble dépendre ni de la masse du système, ni de la surface apparente de la zone de contact du système.

En utilisant les résultats du tableau on en déduit : $\mu_s = 0.643 \pm 0.006$ (par mesure d'incertitude de type B)

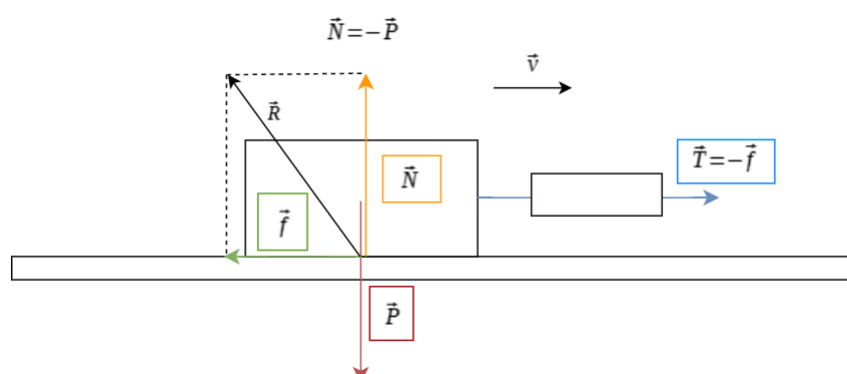
4) Frottements dynamiques

Afin de mieux comprendre le phénomène d'adhérence de la craie, nous avons étudié le frottement dynamique. Le frottement dynamique (auss appelé frottement cinétique), se produit lorsqu'un corps glisse ou se déplace sur une surface. La force de frottement agit dans la direction opposée au mouvement de l'objet. Le frottement dynamique est lié, entre-autre, à la rugosité des surfaces en contact et nécessite une force de traction continue pour maintenir le mouvement contre sa résistance.

Ici : $\mu_s = \frac{f}{N} = \frac{T}{P}$ avec T l'intensité de la traction, P le poids du système F la force de frottement et N la force normale.



Schéma représentant le modèle de l'expérience



Mesures :

Nb	Sans surpoids			Avec surpoids		
	P (N)	F (N)	μ_D	P(N)	F (N)	μ_D
4.000	3,478	2.065	0,5937	3,478	3.255	0,6092
7.000	3,581	2.120	0,5920	3,581	3.340	0,6133
10.00	3,684	2.225	0,6040	3,684	3.380	0,6092
13.00	3,786	2.265	0,5982	3,786	3.465	0,6131
16.00	3,889	2.360	0,6068	3,889	3.510	0,6100
19.00	3,992	2.315	0,5799	3,992	3.645	0,6224
22.00	4,094	2.405	0,5874	4,094	3.680	0,6175
25.00	4,197	2.505	0,5968	4,197	3.745	0,6178
27.00	4,266	2.575	0,6037	4,266	3.790	0,6182

Nous remarquons grâce à ces mesures que le nombre de craies ne semble pas avoir d'impact sur le coefficient de frottement dynamique, mais que cependant, le poids a un impact sur celui-ci.

Sans surpoids : $\mu_D = 0.594 \pm 0.003$

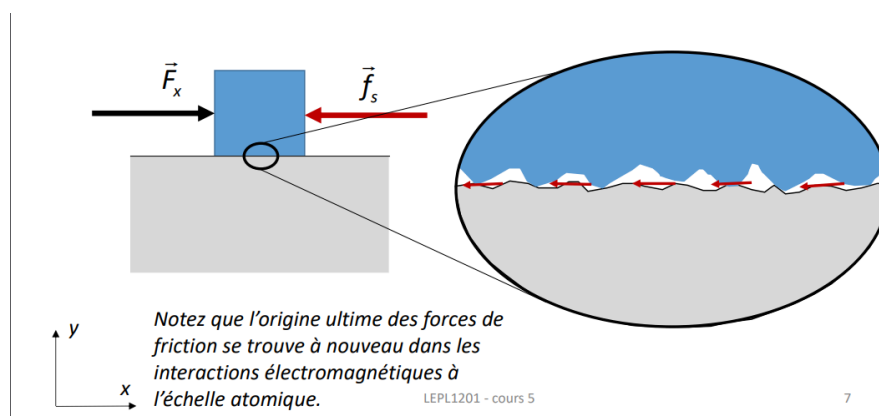
Avec surpoids : $\mu_D = 0.615 \pm 0.002$ (incertitude de type B utilisé)

Grâce à tout cela, le modèle théorique et nos premières expériences, nous arrivons à la conclusion que le coefficient de frottement dynamique dépend de l'intensité du poids, impliquant que la force de frottement dynamique dépend elle aussi de l'intensité du poids.

Nous avons également vérifié que $\mu_S > \mu_D$.

5) Interprétation microscopique

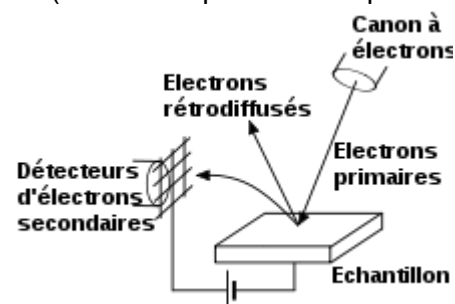
Nous nous sommes demandé d'où viennent ces forces de frottement et comment elles agissent sur nos craies. Nous avons trouvé que l'origine de la force de frottement est microscopique : elle provient des aspérités de surface d'un des corps qui entrent en contact avec les aspérités de l'autre corps, certaines aspérités "butent" les unes contre les autres. il y a un autre aspect lié aux forces d'adhésion (aux points de contact, mais indépendamment de l'orientation locale des surfaces). il y a un aspect encore plus fin, lié au cisaillement de la matière qui existe entre les aspérités ("3eme corps")



Les forces de frottement résultent d'un grand nombre de phénomènes microscopiques (interactions entre molécules), complexes à décrire. La force de frottement globale correspond donc à la somme des petites forces de frottement de chacun de ses points de contact.

Ainsi, la surface effective en contact (celle que l'on ne peut voir sans microscope) est inférieure à la surface totale visible (à l'œil nu). La craie, qui nous paraît parfaitement lisse, ne l'est pas : celle-ci n'est en contact qu'en certains points avec le tableau noir. La surface effective de contact est beaucoup moins importante que la surface totale visible par l'œil humain.

Afin de constater ces aspérités, nous avons donc observé à l'aide d'un MEB (= Microscope Electronique à Balayage) une craie cassée et une craie avec laquelle on vient d'écrire. Nous nous sommes rendus à l'école centrale de Lille et nous avons été accueillis sur la plateforme du MEB par Amina Tadjoui, enseignante-chercheuse. Afin de pouvoir observer nos craies, nous avons d'abord dû déposer une fine couche d'or sur la craie afin de rendre la surface de la craie conductrice de courant électrique. Cette condition est nécessaire car le MEB utilise le phénomène physique de l'interaction électrons-matière afin de permettre l'obtention d'une image. Éclairée par un faisceau d'électrons, la matière conductrice renvoie des électrons secondaires qui sont collectés par un capteur. La variation de leur nombre permet de rendre compte de la topologie de surface.



Le faisceau d'électrons secondaires n'est donc pas possible si la matière n'est pas conductrice, d'où le dépôt d'or.

Microscope à balayage électronique

Craies dorées

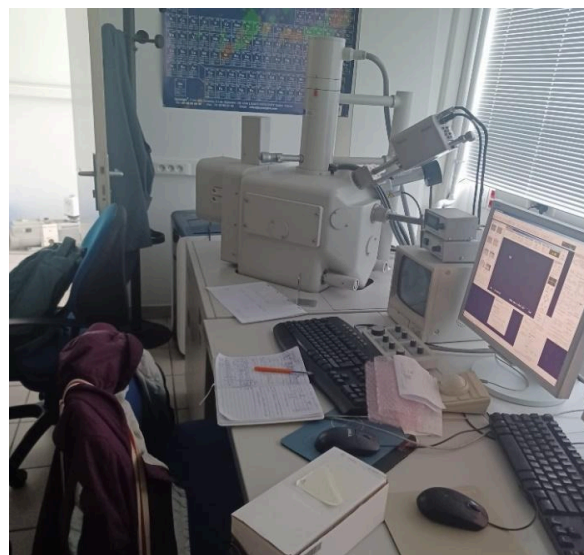
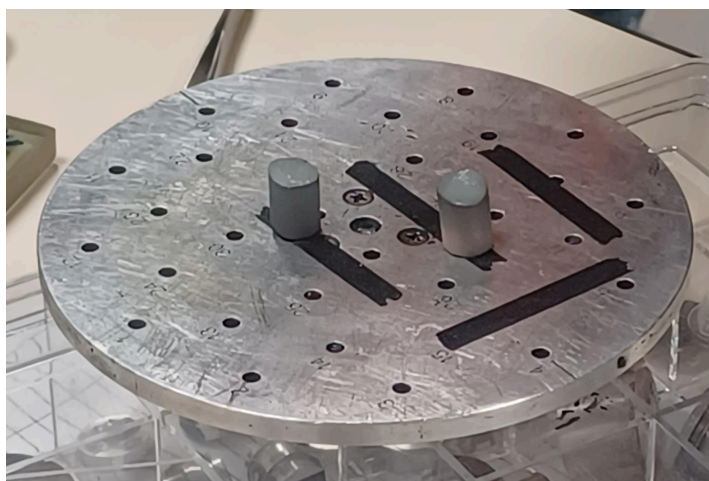
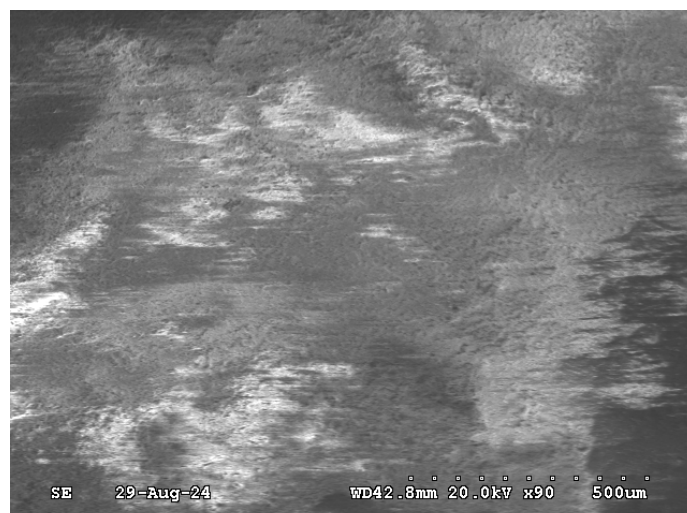
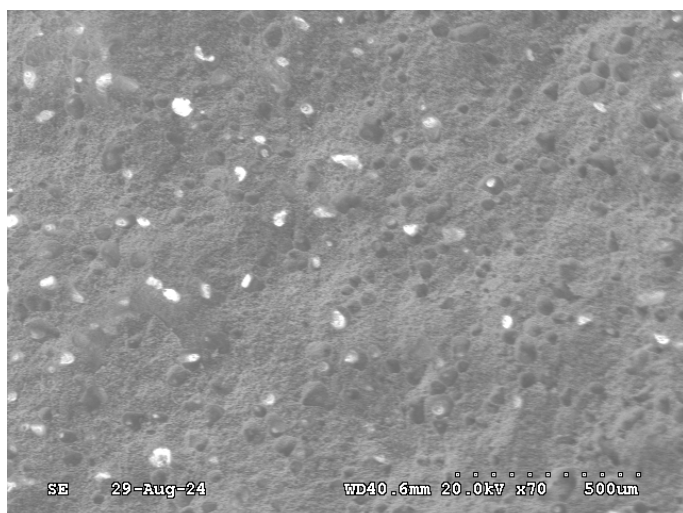


Image au MEB de la surface d'une craie cassée Image au MEB de sa surface après écriture



L'intensité du signal électrique des électrons secondaires dépend de la topographie de l'échantillon au point considéré. Il est ainsi possible, en balayant le faisceau incident sur l'échantillon, d'obtenir une cartographie de la zone balayée.

Sur la craie cassée, on constate une irrégularité de surface, mais aussi des points particuliers plus lumineux ou sombre : il y a donc des trous » (noir) et des petites « bosses (blanc »).

Même si la surface de la craie nous paraît lisse après avoir écrit, on a pu constater que microscopiquement il n'en était rien. Sur l'image, on voit des zones claires et des zones foncées, plus élargies que pour la craie cassée, mais attestant d'une différence de niveau. Les zones claires sont les zones de contact direct avec le support. Les zones plus foncées n'ont pas du tout le même aspect que sur la craie cassée, elles semblent également plus uniformes et étirées. Cela s'explique par la tribologie, que nous a expliqué Edouard Davin, enseignant chercheur à Centrale Lille Institut. Le contact de la craie et du tableau n'est pas forcément direct. En effet, on parle souvent de contact à 3 corps : lorsque la craie laisse une trace sur le tableau, elle dépose une couche de matière qui, coincée entre la craie et le tableau, va modifier leur interaction. Ainsi, la force de frottement peut être modifiée par ce corps résiduel présent sur la surface étudiée et qui va s'accumuler et frotter dans les zones plus creuses de la craie : d'où l'étirement des zones plus sombres au MEB.

Nous pouvons donc émettre 2 hypothèse :

- 1) La surface effective de contact doit augmenter avec la surface totale. Nos mesures n'ont pas pu mettre ce point en lumière, il aurait sûrement fallu un nombre de craies beaucoup plus conséquent pour qu'une augmentation se distingue de nos incertitudes de mesures.
- 2) La surface effective de contact doit augmenter avec l'écrasement de la craie du fait de la pression exercée. Cette hypothèse a été vérifiée dans la mesure du coefficient de frottement dynamique où une augmentation de la pression exercée correspond à l'ajout d'une surmasse.

II. Modélisation de la main de Davin

Il nous faut chercher un modèle simple mais pertinent permettant d'expliquer le phénomène du tracé de pointillés...

1) Première modélisation : modèle stick and slip

Sur Internet, les quelques articles et vidéos explicatives du phénomène des pointillés (dont celle d'[Experimentboy](#)) invoquent le modèle du "stick&slip" sans trop de détails. Selon ce modèle, le système est pendant un premier temps immobile ("stick") puis va glisser lors d'une seconde phase ("slip").



Après réflexion, le modèle stick&slip n'est pas adéquat. Une façon de produire ce modèle est de tirer le palet de craies à l'aide d'un ressort. En tirant vitesse constante, on obtient une oscillation entre friction statique et friction dynamique certes, cependant la trace laissée est continue sur le tableau car il y aura toujours contact. Ce modèle simpliste n'explique pas pourquoi la craie est éjectée de son support et y retourne.

Ce modèle n'est donc pas satisfaisant et il nous est alors apparu que personne n'avait fait une description complète du phénomène : nous devons donc le faire nous-même.

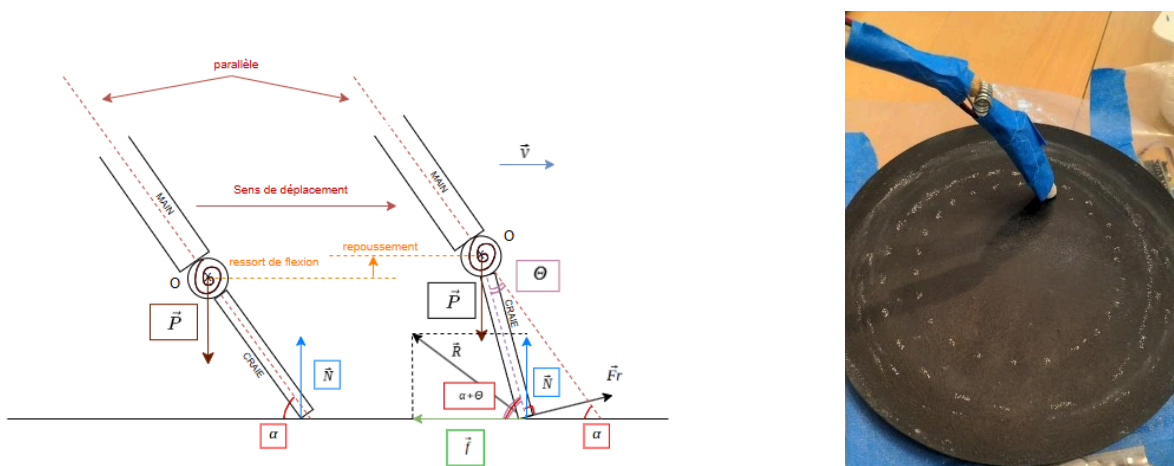
Nous observons que le mouvement de notre système se décompose en 3 phases : “stick”, “slip” suivit immédiatement du saut de la craie.

Afin d’être plus complet, nous allons élaborer notre propre modèle plus fidèle à la réalité.

2) Deuxième modèle : liaison rotule et rappel élastique

Notre modélisation a été élaborée avec l’aide d’Edouard Davin, enseignant-chercheur à l’école centrale de Lille. Nous avons observé que, quand on tenait une craie dans la main et que l’on écartait la craie de sa position, celle-ci revenait à sa position. La main agit donc comme un ressort qui ramène la craie à sa position initiale après son déplacement. Il ne s’agit donc pas simplement d’une liaison pivot, mais d’un pivot avec un rappel élastique de flexion. Nous avons aussi remarqué que la main rebondit lors du déplacement, qu’elle est poussée par la craie lors de son basculement. Il ne faut donc pas fixer le système craie à la potence mais lui laisser un degré de liberté dans la direction normale au plan afin de permettre le repoussement. Le schéma de notre modélisation est le suivant :

Schéma représentant le modèle adopté pour étudier les frottements de la craie



L’axe de la « tige-main » est libre de glisser dans un tube pour que le mouvement de repoussement puisse s’effectuer.

Le ressort de flexion est situé à l’endroit où la craie est maintenue. La longueur de la craie à considérer n’est pas la longueur totale mais celle comptée à partir de là où elle est tenue.

\vec{P} est la pression d’appui, exercée au niveau du maintien de la craie donc de la liaison pivot-élastique (ressort de flexion), et sera le poids de notre système dans l’expérience.

α est l’angle avec lequel on tient la craie par rapport au support au repos.

θ est l’angle de déflexion de la craie dans la main, provoqué par le frottement statique sur le support lors du mouvement.

On a réalisé un test rapide avec un ressort de pince à linge comme ressort de flexion. L’essai est concluant, on obtient bien des pointillés. Cependant l’angle d’attaque α est difficilement mesurable car le ressort de flexion n’a pas un angle de 180° au repos. De plus il a tendance à tourner sur lui-même : il est difficile de l’attacher à la tige et à la craie.

Nous avons trouvé comme solution de le remplacer par une section de caoutchouc de machine à laver. Cependant, cette solution présente un désavantage, la flexion est possible dans 2 directions.

La modélisation mathématique, à partir des phénomènes de frottements, a été effectuée par notre professeure en ANNEXE. Nous avons, en revanche, appris ce qu’est le moment d’une force. Voici une [vidéo](#) du dispositif et des mesures que l’on peut effectuer.

III. Dispositifs de mesures

La modélisation théorique a mis en lumière que :

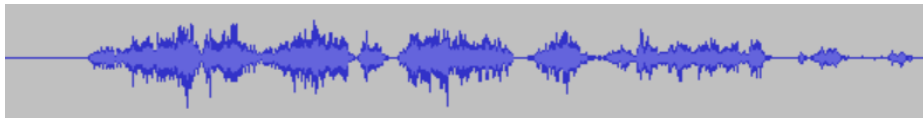
- Plus la pression exercée par la main est grande (P grand), plus la craie est longue (L grande) et moins on serre la craie entre ses doigts (k petit) et plus l'angle de maximal de déflexion θ_{max} avant le saut de la craie sera grand.
- Plus on augmente la vitesse de tracé, plus les points seront espacés.
- il existe un angle minimal de tenue de craie pour lequel on peut produire des pointillés, qui est d'après notre coefficient de mesure statique $\alpha_{min} = 57^\circ$

La longueur de la craie se mesure simplement à la règle. l'angle de tenue de la craie se mesure avec l'inclinomètre numérique. La pression exercée se mesure à l'aide d'une balance puisqu'il s'agira du poids total du système.

Il nous faut maintenant concevoir un dispositif expérimental permettant de réaliser les différentes mesures restantes.

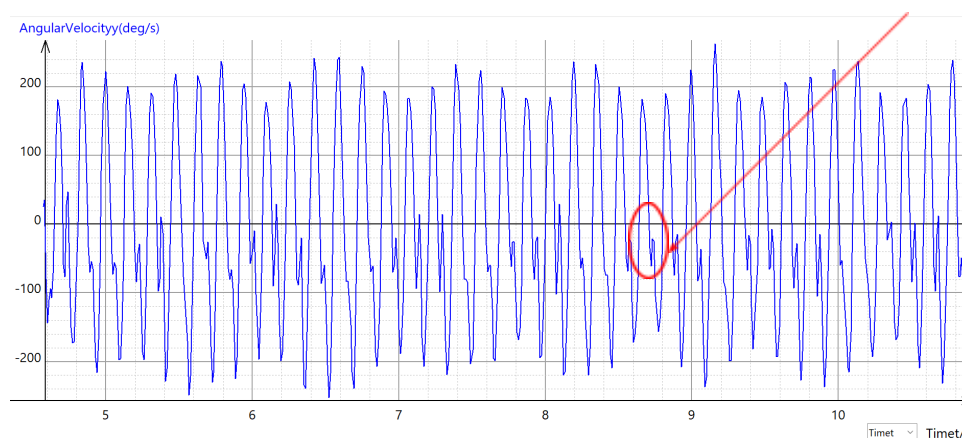
1) Mesure de la période des pointillés

Initialement, nous voulions mesurer la périodicité des pointillés en enregistrant le son émis à chaque choc. Il s'avère que le signal est bruité et les chocs sont difficilement repérables comme l'atteste l'enregistrement ci-dessous.



Nous avons donc eu l'idée de scotcher à la craie une carte arduino Sense BLE qui envoie les mesures gyroscopiques par Bluetooth sur l'application phyphox du téléphone. Il suffit de suivre le tutoriel ci-dessous pour installer le dispositif : https://vulgarisation.fr/projet/arduino_nano/

On constate que les mesures sont beaucoup plus exploitables et on note l'existence d'un rebond au moment où la craie retouche à nouveau le support, ce qui explique que le signal sonore est difficile à exploiter.



2) Mesure de la vitesse de tracer

Afin de réaliser cette mesure, il fallait que la craie se déplace par rapport au tableau. Pour cela, deux options s'offraient à nous : soit la craie se déplace, soit le tableau bouge. Nous avons décidé de choisir cette seconde option car elle était plus facile à construire, avec un plateau tournant, et une vitesse relative de la craie déduite à partir de la vitesse de rotation, aussi appelée vitesse angulaire ω (rad/s).

$$v = \omega \times R$$

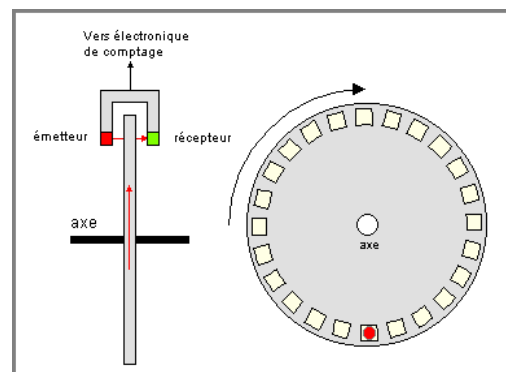
Avec v la vitesse en cm/s , ω la vitesse angulaire (rad/s) et R la distance du tracé au centre de rotation. Le disque a un diamètre de 21,0 cm.

Nous disposons d'un moteur NEMA 17 qui peut être alimenté jusqu'à 35V. Il est piloté par un Driver de moteur pas à pas TB6560 3A et une carte Arduino. Nous avons suivi le protocole disponible sur <https://youtu.be/g-xnanD7vUs>

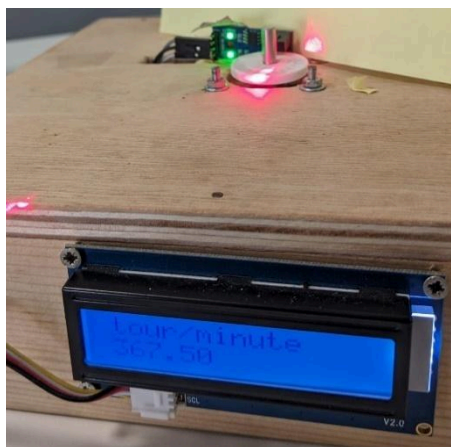
Nous constatons que lorsque nous exerçons une pression sur le plateau, sa vitesse de rotation semble diminuer, aussi la vitesse de consigne n'est pas la vitesse réelle. Il nous faut donc mesurer la vitesse réelle de rotation de notre plateau tournant. Nous avons ajouté au dispositif une roue encodeuse et une fourche optique reliée à une seconde carte Arduino afin de réaliser un compteur de tour.

La roue encodeuse est lue par une fourche optique. La fourche émet un rayon lumineux infrarouge d'une part qui est capté de l'autre part. Lorsque ce rayon n'est pas capté c'est qu'il y a un passage sur une matière.

Pour chaque passage entre matière et vide un signal est émis et est enregistré par la carte Arduino dans une variable appelée «counter». Le programme va compter le nombre de signaux reçus toutes les deux secondes. Sachant qu'il y a 20 trous sur la roue encodeuse, on en déduit la vitesse sur 1 seconde :



$$v = \frac{\text{counter}/2}{20} = 0,5 \times \frac{\text{counter}}{20}$$



D'où la vitesse de rotation en tour/minutes (1 minute=60 secondes) :

$$v = 0,5 \times \frac{\text{counter}}{20} \times 60$$

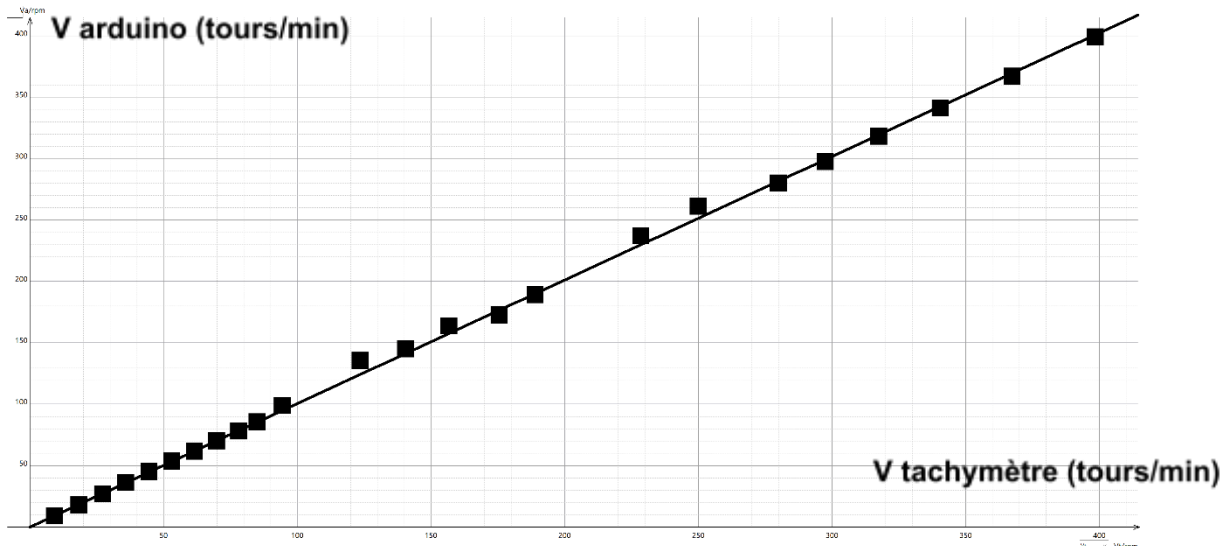
Nous avons ensuite voulu contrôler si la mesure de la vitesse de rotation réalisée par le dispositif Arduino est fiable et si elle a une limite, en comparant avec des mesures faites à l'aide d'un tachymètre que nous avons emprunté.

Nous avons ajouté une bande réfléchissante sur le bord du plateau. Le tachymètre optique utilise le principe de réflexion de la lumière. La vitesse est mesurée en comptant la fréquence à laquelle le faisceau est réfléchi sur la bande réfléchissante car chaque réflexion correspond à un tour complet du plateau.

Quelques mesures effectuées :

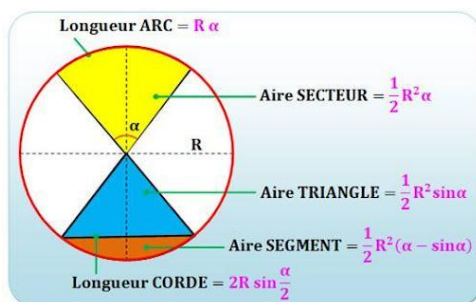
Mesure arduino (tours/min)	9.000	27.00	45.00	61.50	85.50	145.0	189.0	280.0	341.0
Mesure tachymètre (tours/min)	9.200	27.20	44.50	61.60	85.00	140.5	189.0	280.0	340.6

Si l'on compare graphiquement la mesure arduino et la mesure tachymétrique, on tombe bien sur une relation de proportionnalité de coefficient directeur 1 : notre système de mesure est donc valide.



3) Mesure de l'espacement des pointillés

Pour connaître la distance parcourue par la craie à chaque saut, on va mesurer à la règle la distance moyenne d entre deux points consécutifs : il s'agit donc de la longueur de la corde. La distance réellement parcourue correspond à la longueur de l'arc l .



$$d = 2R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{d'où } \alpha = 2 \times \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

$$\text{d'où } l = R \cdot \alpha = 2R \times \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

4) Mesure de l'angle de déflexion de la craie

Enfin, on a filmé la craie et tenté de mesurer l'angle de déflexion maximal, c'est -à -dire avant de quitter le point de contact, en utilisant le logiciel kinovea. Cependant, la mesure est très approximative, du fait que le caoutchouc permet une flexion dans toutes les directions, que la captation est sensible à l'angle sous lequel la craie est perçue, et que le nombre d'images par seconde n'est pas suffisant. Ces mesures seront qualitatives.

IV. Vérification expérimentale de la modélisation

Maintenant que nous avons notre modèle et nos dispositifs de mesures, nous pouvons vérifier notre modèle théorique.

1) Influence de l'angle d'attaque

Notre modélisation impose : $\frac{1}{\tan(\alpha)} \leq \mu_s$ (voir ANNEXE)

Nous allons vérifier ici l'accord entre la modélisation théorique et l'expérimental.

On trouve alors, avec $\mu_s = 0.643$, que $57^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ pour obtenir des pointillés.

Afin de constater l'influence de l'angle d'attaque, nous avons utilisé un plateau tournant, ayant une vitesse de rotation fixée. Sur celui-ci, une craie enfoncée d'1



cm dans un tube creux en caoutchouc, était en contact avec le plateau. De l'autre côté du tube en caoutchouc, une tige en bois était maintenue dans une direction fixe par un tuyau dans lequel elle est libre de glisser.

Grâce à l'inclinomètre numérique fixé sur le tuyau, nous mesurons la direction de la tige de bois.

Nous avons incliné progressivement la craie depuis la position verticale et vers 52° environ, le système n'était plus stable et alterne les deux comportements : parfois il trace des pointillés et parfois le trait est continu, comme sur la photo. Ainsi 52° est la valeur limite en deçà de laquelle il n'y a plus de pointillées, la craie trace en continu. Au dessous de 52°, Nous observons toujours des pointillés. Du fait des vibrations et du mouvement de la tige dans le tube guide, l'incertitude sur la mesure d'angle est de 3°. Pour cela nous avons mesuré, en collant l'inclinomètre à la tige de bois, de combien celle-ci pouvait s'incliner dans le tube.

$$z_{score} = \frac{|57-52|}{3} = 1,7 < 2$$

La mesure expérimentale confirme donc la prévision théorique.

Si elle est légèrement inférieure c'est parce que, d'une part la surface du plateau tournant n'a pas exactement la même rugosité que la planche sur laquelle on a déterminé le coefficient statique μ_s . D'autre part, la craie appuie sur une petite surface, donc le poids du système écrase la craie sur une petite zone ce qui augmente la surface effective de contact donc μ_s .

2) Influence de la masse de la craie

La masse de la craie intervient dans la périodicité des rebonds :

$$T = \sqrt{\frac{m_{craie} \cdot L^2}{3 \cdot k}}$$

Avec T la périodicité des pointillés, m_{craie} la masse de la craie, L la longueur de la craie et k le coefficient de rappel élastique (la pression exercée par les doigts sur la craie lors de son maintien).

Donc si on alourdit la craie, alors la période, donc l'espacement entre les pointillés doit augmenter.

Cependant, la relation précédente suppose une masse uniformément répartie dans un cylindre. Il nous est impossible de vérifier strictement cette relation car nous ne pouvons augmenter uniformément la masse de la craie, mais seulement vérifier si l'ajout d'une masselotte sur la craie augmente sa période.

On a fixé la vitesse de rotation à 120 tours/minutes et un angle d'attaque à 62° et on a scotché des petites masses à quelques millimètres du bord de la craie qui touche le support.

Masse ajoutée (g)	0	20	30	40
T (s)	0,07890	0,1607	0,1719	0,1728

Qualitativement, plus la craie est lourde et plus la période du rebond est grande, donc plus les pointillés seront espacés.

3) Influence de la longueur de la craie

La longueur de la craie intervient à deux endroits du phénomène : sur la période d'oscillation libre et sur l'angle maximal de déflexion.

$$\theta_{max} = \frac{P \cdot L}{k} \cdot (\mu_s \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha))$$

Avec θ_{max} l'angle de déflexion maximum, P le poids du système, L la longueur de la craie, k le coefficient de rappel élastique, μ_s le coefficient de rappel élastique et α l'angle formé entre la craie et le support.

$$T = \sqrt{\frac{m_{\text{craie}} \cdot L^2}{3 \cdot k}}$$

Avec T la périodicité des pointillés, m_{craie} la masse de la craie, L la longueur de la craie et k le coefficient de rappel élastique (la pression exercée par les doigts sur la craie lors de son maintien).

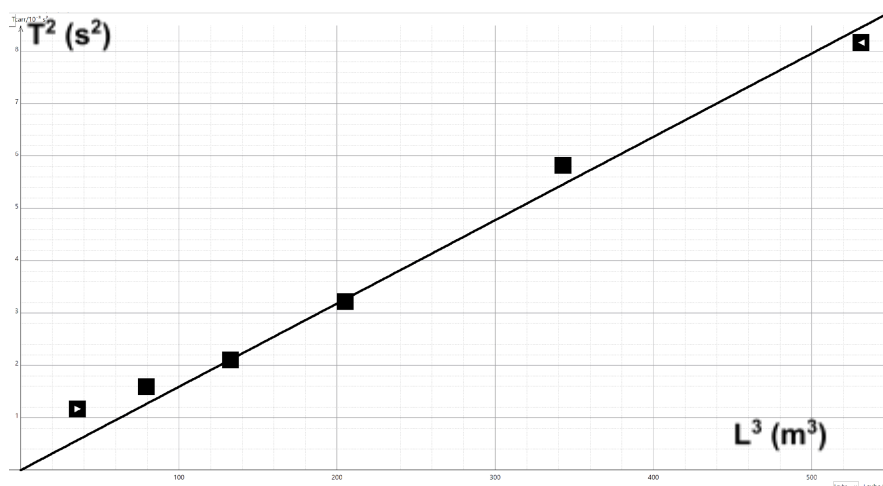
La craie étant cylindrique, on suppose que sa masse est proportionnelle à sa longueur : $m_{\text{craie}} = m_L \cdot L$ avec m_L sa masse linéique. On doit alors vérifier la relation :

$$T^2 = \frac{m_L \cdot L^3}{3 \cdot k}$$

On a donc placé des craies de taille différente dans le tube caoutchouteux. Nous avons fixé la vitesse de rotation à 120 tour/minute, l'angle d'attaque à 58° et la pression exercée par la main en ajoutant une masse de 100g. La craie traçait à environ 3 cm du bord extérieur (donc sur un cercle de $10,5 - 3,0 = 7,5$ cm de rayon) ce qui correspond donc à une vitesse de tracé de $v = 7,5 \times 10^{-2} \times \frac{120 \times 2\pi}{60} \cong 0,95$ m/s.

Avant chaque essai nous avons aussi mesuré la pression exercée par le système en mesurant la masse du système sur une balance de cuisine. Nous avons constaté que, grâce à l'ajout de masse, la pression exercée est à peu près constante à chaque essai malgré un changement de taille de craie, donc de masse de la craie. La variation de la masse de craie a ainsi une influence négligeable et le système exerce une pression correspondante au poids d'une masse de 136 ± 2 g. Ensuite grâce au capteur gyroscopique d'arduino sense nous avons pu mesurer la vitesse angulaire pour déterminer graphiquement la période des oscillations pour chaque longueur de craie.

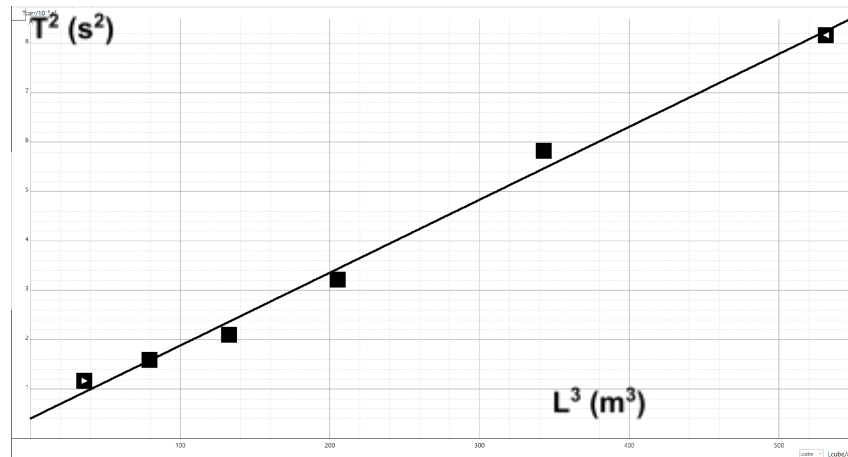
L(cm)	3.3	4.3	5.1	5.9	7.0	8.1
m(g)	138	136	136	135	135	137
T(s)	0.03414	0.03984	0.04580	0.05669	0.07627	0.09700



On trouve $T^2 = 15,9 \times L^3$ avec L en m.

Les points ne sont pas parfaitement alignés sur une relation de proportionnalité car la longueur à considérer est la longueur jusqu'à l'axe pivot situé quelque part dans le caoutchouc. Il y a donc une incertitude sur la longueur à considérer jusqu'au pivot qui ne correspond pas exactement à la longueur de la craie. La longueur à considérer devrait être $L' = L + l$. Expérimentalement, puisqu'il y a une partie de caoutchouc, la masse de la craie n'est pas linéique sur la longueur totale, ce qui ne permet pas d'obtenir un modèle simple. Cette incertitude se reporte donc sur la période mesurée qui doit être supérieure à celle correspondant à L seul.

On peut préférer alors une modélisation affine en raffinement :



On trouve $T^2 = 14,8 \times L^3 + 408 \times 10^{-6}$ avec L en m et T en s.

On en déduit que le coefficient de proportionnalité est d'environ $\frac{m_L}{3 \cdot k} = 15 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$

Puisque 3,0 cm de craie a une masse de $m_{\text{craie}} = 3,49 \pm 0,02 \text{ g}$, on en déduit

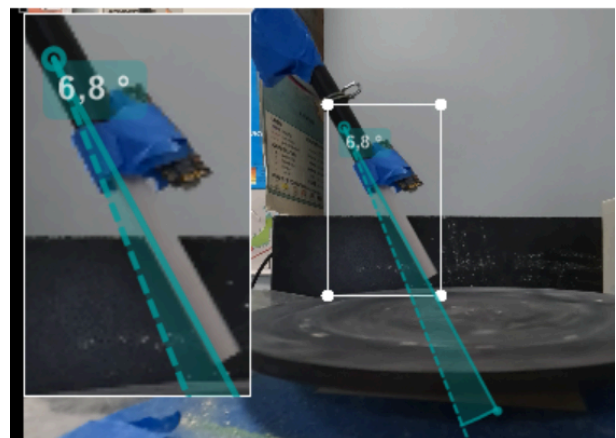
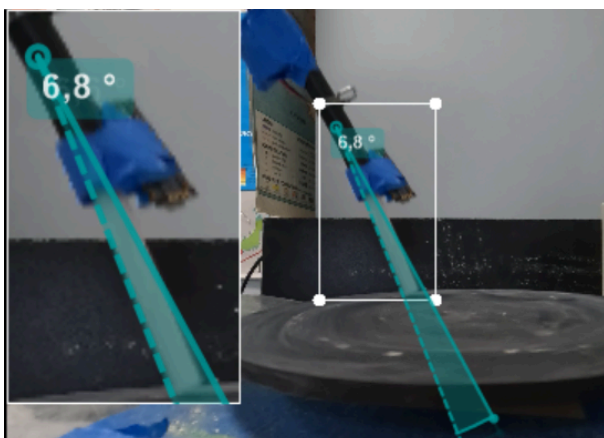
$$m_L = \frac{3,49 \times 10^{-3}}{3,0 \times 10^{-2}} = 1,16 \times 10^{-1} \text{ kg/m}$$

Alors l'estimation du coefficient de couple de rappel élastique est :

$$k = \frac{m_L}{3 \times 15} = \frac{1,16 \times 10^{-1}}{3 \times 15} = 2,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

On a voulu mesurer l'influence de la longueur de la craie sur l'angle de déflexion θ_{max} . Pour cela nous avons utilisé le logiciel Kineova qui permet de mesurer un angle sur des images vidéo. Les données trouvées ont une incertitude très élevée estimée à plus de 1° ce qui est énorme par rapport aux valeurs trouvées. Les vidéos analysées n'étaient pas filmées en slow motion et la position de la caméra variait entre chaque expérience, ce qui n'aide pas à mesurer correctement les angles.

Ajustement de la direction de la craie pour $-\theta_{\text{max}}$ **Ajustement de la direction de la craie pour $+\theta_{\text{max}}$**



L(cm)	4.0	5.1	5.9	7.0	8.1
$2\theta_{\text{max}}$ (°)	3.25	4.2	4.7	4.9	6.8

Cette expérience est donc très qualitative. Elle montre bien cependant une augmentation de l'angle maximal de déflexion θ_{max} avec la longueur de la craie L .

4) Influence de la vitesse de tracé

On sait que la longueur du saut de la craie est régie par l'équation :

$$l = \frac{3}{4} v \cdot T = \frac{3}{4} v \sqrt{\frac{m_{craie} \cdot L^2}{3 \cdot k}} = \frac{3}{4} R \cdot \omega \sqrt{\frac{m_{craie} \cdot L^2}{3 \cdot k}}$$

Avec l la longueur du saut de la craie, v la vitesse du plateau tournant, T la périodicité des pointillés, m_{craie} la masse de la craie, L la longueur de la craie, k le coefficient de rappel élastique, R le rayon du cercle inscrit par la craie et ω la vitesse angulaire

Donc, pour une craie de longueur donnée (8,0 cm), à une distance R du centre de rotation, la longueur parcourue par la craie entre deux rebonds ne dépend que de la vitesse de rotation ω .

On a donc testé plusieurs vitesses de rotation. Comme la craie s'usait, il fallait la changer entre chaque mesure et par conséquent, elle n'était pas placée exactement au même endroit sur le plateau, ce qui ne permet pas de faire une comparaison directe. On va donc considérer le paramètre $\frac{l}{R}$:

$$\frac{l}{R} = \frac{3}{4} \omega \sqrt{\frac{m_{craie} \cdot L^2}{3 \cdot k}}$$

Il va falloir calculer à chaque fois la longueur parcourue grâce à la formule :

$$l = R \cdot \alpha = 2R \times \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Alors :

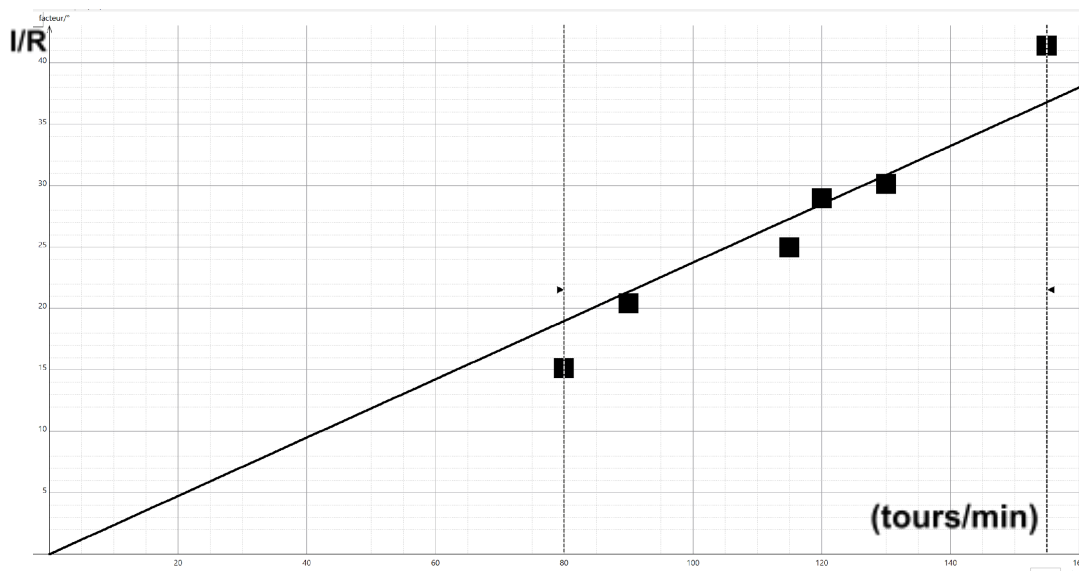
$$\frac{l}{R} = 2 \times \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Avec, l la longueur du saut, R la rayon du cercle inscrit par la craie et d la distance entre les pointillés.

Vitesse de rotation (tour/min)	80	90	115	120	130	155
d (cm)	2,0±0,2	2,8±0,2	3,5±0,2	4±0,2	4,0±0,2	5,3±0,2
R (cm)	7,6±0,2	7,9±0,2	8,1±0,2	8,0±0,2	7,7±0,2	7,5±0,2
l/R	15,12	20,42	24,95	28,96	30,11	41,38

L'expérience peut sembler simple, mais le changement de craie pour chaque expérience prend énormément de temps et nous n'avons pu tester que quelques valeurs de vitesses. La vitesse mesurée par la fourche optique n'est pas constante et varie de quelques de 5 tour/min.

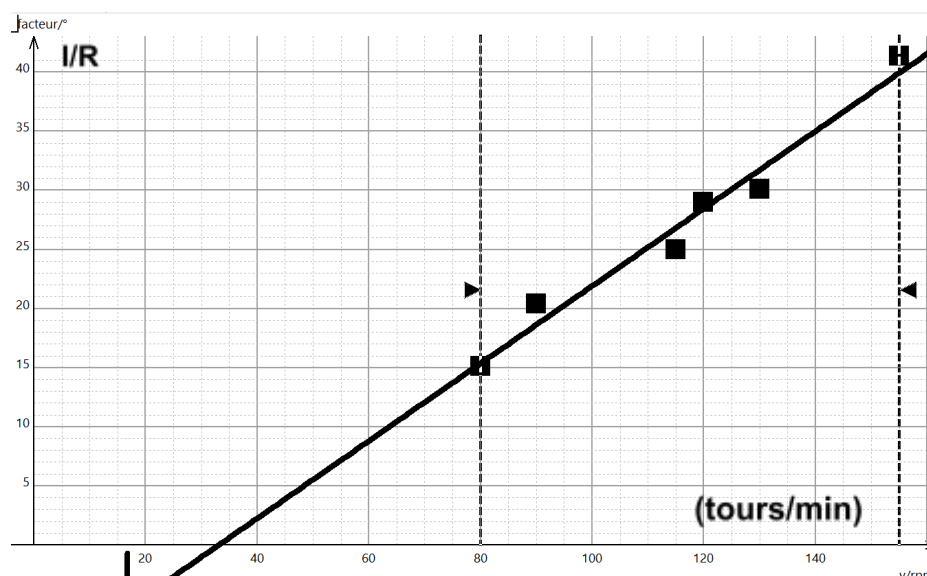
Sur les quelques mesures faites, on retrouve bien une tendance de relation de proportionnalité :



La modélisation indique $\frac{l}{R} = 0,237 \times \omega$ avec ω en tours/min

Soit $\frac{l}{R} = \frac{2\pi \times 0,237}{60} \times \omega$ avec ω en rad/s

Comme précédemment, les points ne sont pas parfaitement alignés sur une relation de proportionnalité car la longueur à considérer est la longueur jusqu'à l'axe pivot situé quelque part dans le caoutchouc. Il y a donc une incertitude sur la longueur, supérieure à la longueur de la craie, et par conséquent sur la période mesurée qui se reporte sur la distance parcourue. On peut préférer alors une modélisation affine :



Dans ce cas $\frac{l}{R} = \frac{2\pi \times 0,328}{60} \times \omega - 10,8$ avec ω en rad/s

En ordre de grandeur, on estime en ordre de grandeur

$$\frac{3}{4} \sqrt{\frac{m_{craie} \cdot L^2}{3 \cdot k}} \cong \frac{2\pi \times 0,3}{60}$$

Avec un produit en croix, une craie de 8,0 cm a une masse de $m_{craie} = \frac{3,49 \times 8,0}{3,0} = 9,3 \text{ g}$

On en déduit le coefficient de couple de rappel élastique :

$$k = \frac{m_{craie} \cdot L^2}{3} \left(\frac{3 \times 60}{4 \times 0,237} \right)^2 = \frac{9,3 \times 10^{-3} \cdot (8,0 \times 10^{-2})^2}{3} \left(\frac{3 \times 60}{4 \times 0,237 \times 2\pi} \right)^2 = 1 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Nous n'obtenons pas la même valeur que précédemment pour la simple raison que la longueur de caoutchouc n'est pas identique : ici elle a beaucoup été raccourcie car nous avons constaté que la craie avait tendance à aussi fléchir dans la direction perpendiculaire à la trajectoire quand le tube était plus long.

A ce stade, on peut juste dire que plus le flexible en caoutchouc est court, plus le coefficient de couple de rappel élastique est grand. Il faudrait refaire toutes nos mesures en fixant une bonne fois pour toutes la longueur de caoutchouc pour comparer. Nous avons alors rétréci le tube en caoutchouc, ce qui règle notre problème. Pourtant nous ne pouvons toujours pas définir le coefficient de rappel élastique avec certitude, car isoler ce facteur dans les formules nous est difficilement accessible (il aurait fallu du matériels supplémentaire).

Un autre point, pour l'expression littérale, il était considéré que la craie touche le sol en $\theta = 0$ suite à un mouvement d'oscillation libre. Or ce modèle ne prend pas en compte le poids du système et donc le mouvement vertical de la tige. A cause du mouvement de chute vertical du système entraîné par son poids, la craie retouchera le sol bien avant et la distance parcourue par la craie sera alors inférieure à la prévision, ce qui se traduit par une ordonnée à l'origine négative dans le modèle affine.

5) Influence de la pression exercée

D'après notre modélisation théorique, la pression exercée par la main intervient seulement sur l'angle maximal de déflexion :

$$\theta_{max} = \frac{P \cdot L}{k} \cdot (\mu_s \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha))$$

Avec θ_{max} l'angle de déflexion de la craie maximal, L la longueur de la craie, k le coefficient de rappel élastique, μ_s le coefficient de frottement statique et α l'angle entre le support et la craie, ici, P représente le poids de l'ensemble main+craie. Pour obtenir la pression exercée p, il suffit de diviser cette force par la surface de contact s : $p = P/s$

On a donc pris une craie de longueur 8 cm que nous avons insérée dans le tube en caoutchouc. La vitesse de rotation du plateau tournant était fixée à 85,50 tours/minute. Nous avons ajouté deux masses, de chaque côté de la tige en bois, afin de faire varier la pression exercée par le système, car la pression augmente linéairement avec la masse.

Avant chaque essai nous avons vérifié que la distance au bord restait similaire ($4,4 \text{ cm} \pm 0,7 \text{ cm}$) et que l'angle d'attaque était presque identique ($75,20^\circ \pm 0,5^\circ$). La masse du système seul était de 48g.

Nous avons constaté qu'au plus la pression exercée augmente, au plus l'angle maximal de déflexion θ_{max} avait tendance à augmenter.

Masse ajoutée (g)	40g	100g	200g	300g
T(s)	0,0621	0,0620	0,0615	0,0620
$2 \theta_{max}$ (°)	3,5	4,6	7,2	7,4

Avec ces dernières mesures, on se rend compte qu'effectivement la période des oscillations, c'est-à-dire des sauts de la craie sur le plateau, n'est pas affectée par la pression exercée sur la craie.

Comme précédemment, les mesures d'angles sont entachées de grosses incertitudes liées au défaut de parallaxe lors de l'enregistrement et du nombre d'images par secondes insuffisant pour réaliser des mesures correctes. Cependant on constate encore une fois qualitativement que nos prévisions théoriques sont respectées, l'angle maximal donc l'amplitude des oscillations augmentent lorsque la pression exercée augmente. Cependant la période n'est pas affectée, donc l'espacement des pointillés reste constant, seule

la marque d'impact est plus nette avec la pression car le dépôt de matière est plus important avec la pression.

Conclusion

Tracer des pointillés à la craie en effectuant un mouvement continu est possible. La main joue un rôle important : elle agit comme une force de rappel élastique de flexion. Lorsque celle-ci est plus grande que la force de frottement statique, la craie saute en repoussant la main et s'immobilise plus loin dû au frottement statique, jusqu'à ce que la force de rappel élastique de flexion l'arrache à nouveau etc... Ce cycle se répète laissant des pointillés sur le tableau.

Au début de nos recherches, la seule explication que nous avons trouvée sur Internet, pour ce phénomène, était le stick and slip, nous avons vu qu'en réalité, cela n'explique pas les sauts de la craie. Ainsi, durant plusieurs semaines, nous avons réalisé notre propre modélisation théorique afin d'essayer de comprendre ce phénomène. Nous avons ensuite réalisé un dispositif expérimental et des instruments de mesures afin de pouvoir vérifier la validité de notre modèle. Nous sommes fiers d'être les premiers à proposer une modélisation théorique validée par nos expériences et qui rend compte des observations faites du phénomène.

Ce modèle n'est cependant pas parfait car il ne prend pas en compte la longueur du tube en caoutchouc, mais sa prise en compte nécessiterait de revoir toutes les équations. Néanmoins, il se montre satisfaisant et certaines dépendances entre paramètres ont pu être vérifiées qualitativement ou quantitativement.

Afin de réaliser nos mesures, nous avons été confrontés à plusieurs problèmes : tout d'abord, Phyphox se déconnectait souvent de l'Arduino Sense et l'application plantait plus de 7 fois sur 10 ! De plus, changer de craie ou tailler une craie peut prendre un certain temps. Il est difficile de maintenir tous les paramètres constants pour n'en faire varier qu'un seul lorsque les mesures s'étalent sur plusieurs séances à une semaine d'intervalle. Également, le temps nécessaire pour monter le dispositif expérimental et pour réaliser les manipulations est assez conséquent, pour peu de valeurs obtenues finalement.

Nous n'avons pas eu le temps de nous intéresser à l'influence de l'aire apparente de contact de la craie avec le support sur la réalisation des pointillés. Néanmoins, avec plus de temps, notre dispositif permet une telle étude.

Enfin, nous pouvons ouvrir un stage pour les enseignants pour la maîtrise du tableau noir ! Afin de tracer des pointillés rapidement, il faut incliner la craie de plus de 57° par rapport à l'horizontale, et pour obtenir des pointillés resserrés il faut : avoir un geste lent (v petit), tenir une craie courte (L petit et m_{craie} petit) et fermement (k grand). Bien évidemment, pour obtenir des pointillés espacés, c'est tout l'inverse, mis à part l'inclinaison de la craie.

Certes, notre travail ne va pas changer la phase du monde mais a le mérite d'approfondir la compréhension du phénomène de pointillés lors d'un tracé franc à la craie. Nous avons, à notre niveau, contribué à l'enrichissement du savoir scientifique en posant les bases théoriques et conceptuelles de ce phénomène. Nous avons, par ce biais, pu faire l'expérience du métier de chercheur où la production de savoirs fondamentaux constitue un élément essentiel du progrès scientifique.

Liste des annexes

Programme arduino du compte-tour

Moment d'une force

Équations de modélisation de la main de Davin

Webographie

<https://www.alloprof.qc.ca/fr/elevés/bv/physique/la-force-de-frottement-p1018>

<https://perso.uclouvain.be/vincent.legat/documents/epl1201/epl1201-cours5-frottement.pdf>

https://vulgarisation.fr/projet/arduino_nano/

<http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/Cercle/Arccorde.htm>

<https://www.techno-science.net/definition/1732.html>

<https://energie-nucleaire.net/physique/classique/dynamique/moment-force>

<https://www.maxicours.com/se/cours/le-moment-d-une-force-par-rapport-a-un-axe-de-rotation/>

<https://www.physagreg.fr/mecanique-21-theoreme-moment-cinetique.php>

<https://youtube.com/shorts/xXr5Fa5FZbg?si=v4Y01UdWsjT82SMU>

ANNEXE : programme Arduino du compte-tour

```
int encoder = 2;

volatile unsigned int counter;

float rpm;

void setup() {

    pinMode(encoder, INPUT_PULLUP);
    attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(encoder), countpulse,RISING);
    lcd.begin(16, 2);
}

void countpulse(){
    counter++;
}

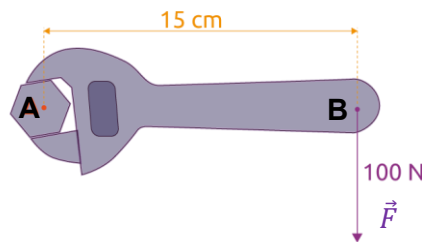
void loop() {
    static uint32_t previousMillis;
    if (millis() - previousMillis >= 2000) {
        rpm =0.5*(counter*60)/nb_trous;
        counter = 0;
        previousMillis += 2000;

        lcd.clear(); // effacer l'écran
        lcd.setCursor(1, 0); // mettre le curseur à la cinquième colonne, première ligne
        lcd.print("tour/minute"); // afficher "Arduino"
        lcd.setCursor(1, 1); // mettre le curseur à la deuxième colonne, deuxième ligne
        lcd.print(rpm);
    }
}
```

ANNEXE : moment d'une force

Définition moment

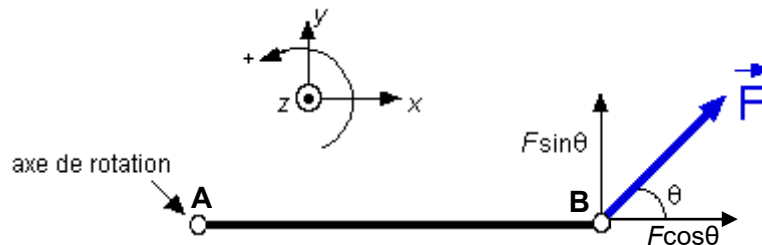
Le moment \mathcal{M}_A d'une force \vec{F} par rapport à un axe de rotation p) passant par A, exprime la rotation que cette force peut imposer à un corps autour de cet axe. Il est égal au produit du bras de levier AB joignant l'axe de rotation au point d'application de la force par la valeur de la force.



$$\mathcal{M}_A = AB \times F$$

Cette formule s'applique lorsque la force \vec{F} et la direction (AB) sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Dans les situations où la force \vec{F} et la direction (AB) ne sont pas perpendiculaires, il est nécessaire de décomposer la force en ses composantes perpendiculaires et parallèle à (AB) :



$$\mathcal{M}_A = AB \times F \cdot \sin(\theta)$$

Il s'agit du résultat d'un produit vectoriel :

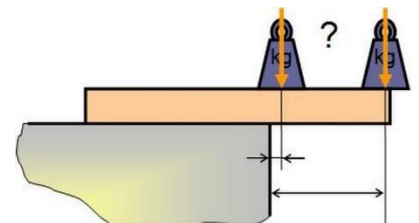
$$\mathcal{M}_A = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

Le moment d'une force est un scalaire (nombre), qui s'exprime en N.m, et dont le signe est donné par la convention de signe suivante :

- si la force \vec{F} tend à faire tourner le solide sur lequel elle agit dans le sens trigonométrique autour de A, le moment est positif.
- le moment est négatif si la rotation est en sens inverse.

Exemple

Prenez une planche en équilibre au bord d'un muret. Pour la déséquilibrer on peut poser une charge sur la partie en porte-à-faux. La capacité de cette charge à faire basculer la planche n'est pas la même suivant qu'elle est posée près du muret ou au bout de la planche. De même, on peut au même endroit, placer une charge plus grosse et constater la différence de comportement.

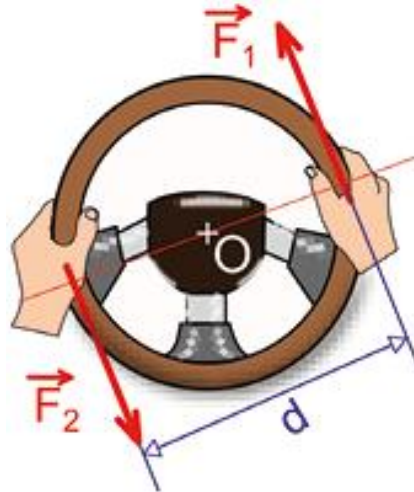


Le pouvoir de basculement dépend donc de l'intensité de la force, mais aussi de la distance entre le point d'application de la force et du point de rotation.

Dans les mouvements de rotation il est préférable d'utiliser un autre théorème que le principe fondamental de la dynamique : ce théorème s'appelle le théorème du moment cinétique.

D'après le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \sum \vec{F}$, si la somme des forces extérieures au système se compense $\sum \vec{F} = \vec{0}$, alors la trajectoire n'est pas modifiée.

D'après le théorème du moment cinétique autour d'un axe de rotation A : $\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{a} = \sum \mathcal{M}_A$, même si les forces se compense, leur moment peut ne pas se compenser et l'objet se mettra en rotation autour de A.



Ici, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$: d'après le principe fondamentale de la dynamique, le volant ne se déplace pas.

$\mathcal{M}_O(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_O(\vec{F}_2) = \frac{d}{2} \times F_1 + \frac{d}{2} \times F_2 = d \times F_1$ car $F_1 = F_2$: le volant va donc tourner dans le sens positif par rapport à l'axe de rotation passant par O.

ANNEXE : Equations de modélisation de la main de Davin

Merci à notre prof de physique d'avoir établi ces calculs qui dépassent nos connaissances.

PHASE DE FROTTEMENT-FLEXION

Avec \vec{f} la force de frottement, \vec{N} la réaction normale du support et \vec{F}_R la force de rappel élastique.

La force de rappel élastique que subit l'extrémité de la craie se déduit du moment de rappel élastique au point O:

$$\mathcal{M}_O = k \cdot \theta = F_R \cdot L$$

$$F_R = \frac{k \cdot \theta}{L}$$

Avec k le coefficient de rappel élastique et L la longueur de la craie.

La réaction normale du support compense essentiellement le poids du système : $N \cong P$

D'après le théorème du moment cinétique en O:

$$-f \cdot \sin(\alpha + \theta) \cdot L + N \cdot \cos(\alpha + \theta) \cdot L + F_R \cdot L = 0$$

A la limite de décollement, la force de frottement statique est maximale $f = \mu_S \cdot N = \mu_S \cdot P$ (avec $\mu_S = 0.643 \pm 0.006$ déterminé en I.3) et l'angle correspond à l'angle de flexion maxima θ_{max}

$$-\mu_S \cdot P \cdot \sin(\alpha + \theta_{max}) + P \cdot \cos(\alpha + \theta_{max}) + \frac{k \cdot \theta_{max}}{L} = 0$$

Comme $\alpha > \theta$ on fera l'approximation de négliger θ devant α pour obtenir une estimation simple de θ_{max} :

$$\theta_{max} = \frac{P \cdot L}{k} \cdot (\mu_S \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha))$$

Plus la pression exercée par la main est grande (P grand), plus la craie est longue (L grande) et moins on serre la craie entre ses doigts (k petit) et plus l'angle de flexion θ_{max} , donc la déflexion de la craie, sera grande.

Cette relation impose également $\mu_S \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \geq 0$

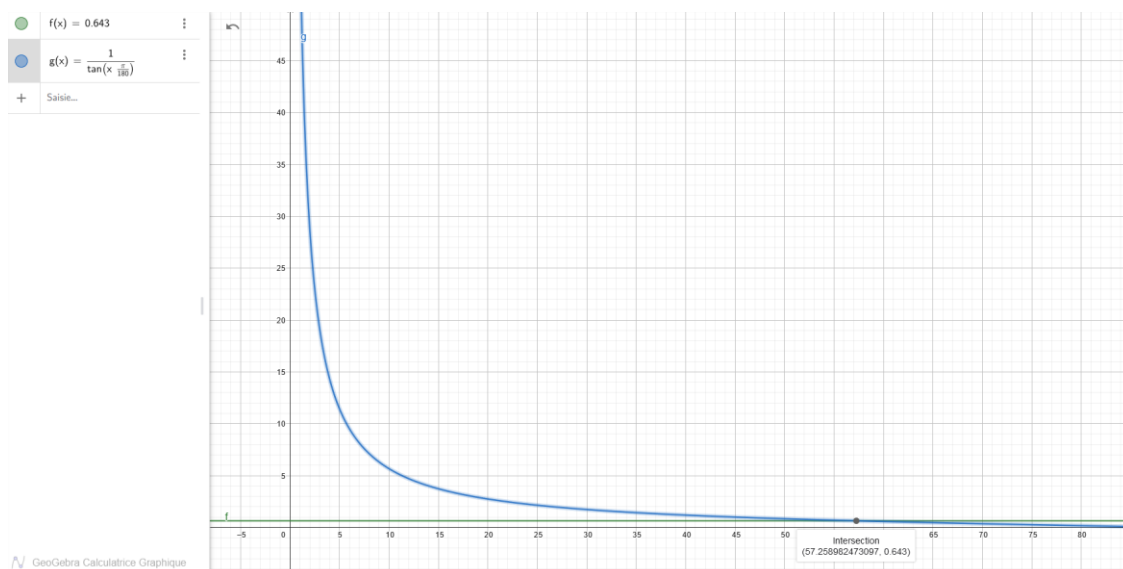
Ce qui implique :

$$\frac{1}{\tan(\alpha)} \leq \mu_S$$

Ainsi, uniquement certaines inclinaisons de craie sont possibles et ne dépendent que du coefficient de frottement statique de la craie sur le support.

En utilisant une représentation graphique sur géogebra, on en déduit que :

$57^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ pour obtenir des pointillés.



PHASE DE SAUT

Lorsque la force de rappel élastique est suffisante pour compenser la force de frottement, la craie glisse et décolle de son support : elle décrit alors un mouvement de rotation autour du centre de la liaison pivot formée au contact avec la main. La craie n'est alors soumise qu'à la force de rappel élastique.

D'après le théorème du moment cinétique appliqué en O :

$$J \cdot \ddot{\theta} = -k \cdot \theta$$

(Le signe – rappelle que la force de rappel élastique est de direction opposée à celle de l'augmentation de θ)

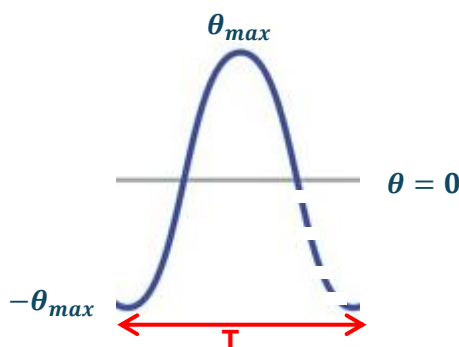
Le moment d'inertie d'une tige par rapport à un axe passant à son extrémité est $J = \frac{1}{3} m_{craie} \cdot L^2$ (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

On obtient comme équation, celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{\theta}{T^2} = 0$$

Avec une période $T = \sqrt{\frac{m_{craie} \cdot L^2}{3 \cdot k}}$

On estime que la craie retouche le sol en $\theta = 0$:



La durée du saut est donc de $\tau = \frac{3}{4}T$ et pendant cette durée, la craie aura parcouru la distance $d = v \cdot \tau$ avec v la vitesse de tracé. Plus on augmente la vitesse de tracé, plus les points seront espacés.

La longueur parcourue entre les points doit donc être :

$$l = \frac{3}{4}v \sqrt{\frac{m_{craie} \cdot L^2}{3 \cdot k}}$$

D'un point de vue technique, pour obtenir des pointillés resserrés il faut :

- Avoir un geste lent (v petit)
- Tenir une craie courte (L petit et m_{craie} petit)
- Tenir la craie fermement (k grand)