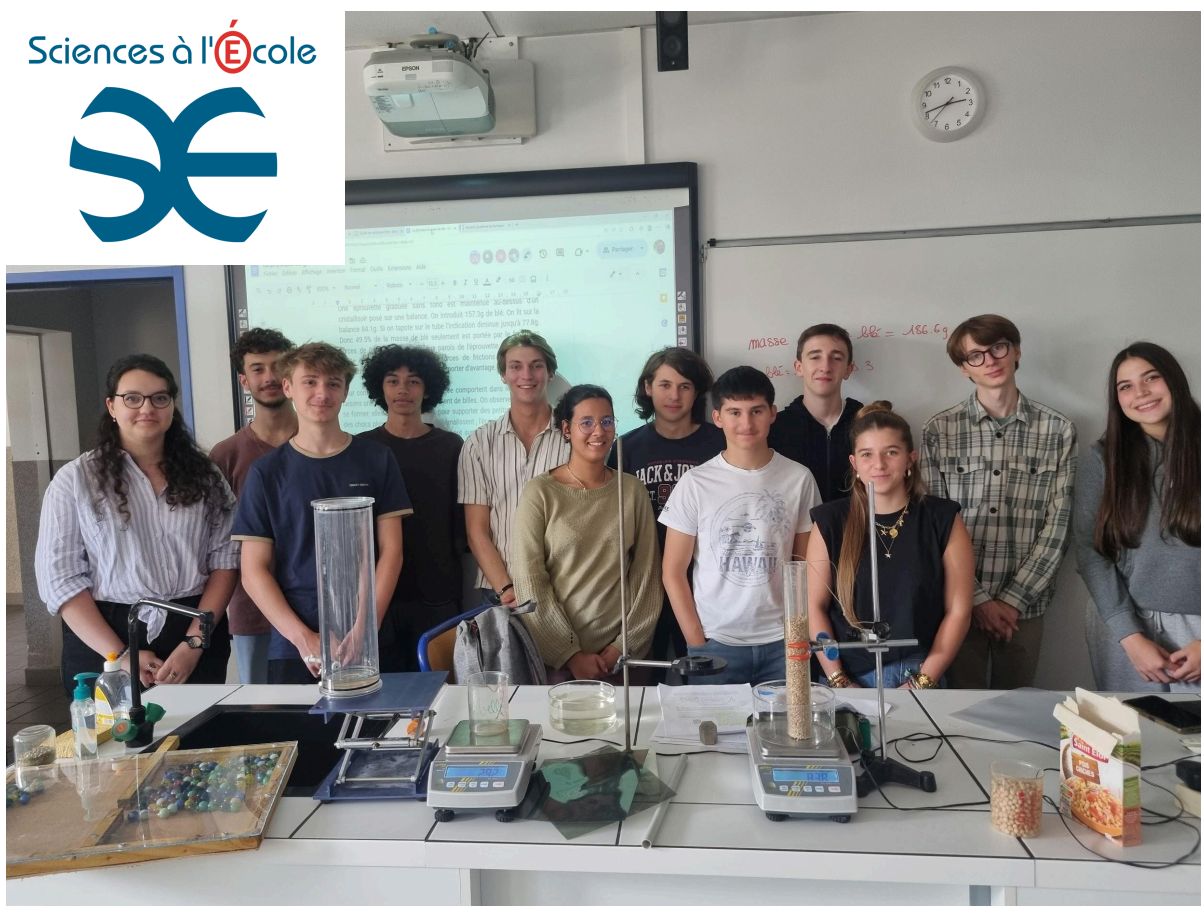


## La physique du grain de blé



Par les élèves de l'atelier physique du lycée Palissy



Avec LACLAVERIE Jean-Michel  
Professeur encadrant  
Lycée Bernard Palissy- AGEN  
Académie de Bordeaux

## Table des matières

[Vidéo du projet: https://youtu.be/iO4cjjc6asg?feature=shared](https://youtu.be/iO4cjjc6asg?feature=shared)

[Problématique](#)

[Remerciements](#)

[Présentation de l'équipe](#)

[Introduction](#)

[A- A la découverte des étonnants milieux granulaires par l'expérience](#)

[A-1 Mise en évidence des frottements](#)

[A-2 La ségrégation](#)

[A-3 Expérience de Reynolds](#)

[A-4 Expérience du silo de Janssen](#)

[B- Etude statique d'un silo de Janssen](#)

[B-1 Équation différentielle du mouvement d'une tranche de matériau granulaire](#)

[B-2 A la poursuite du seuil de Janssen](#)

[B-3 Lenteur du phénomène](#)

[B-4 Visualisation de lignes de forces grâce à des matériaux photoélastiques](#)

[B-4.1 Visualisation d'une bille en lumière polarisée](#)

[B-4.2 Visualisation des chaînes de force .](#)

[C- Etude dynamique de la vidange et du remplissage d'un silo](#)

[C-1 Comparaison liquide-milieu granulaire: Écoulement d'eau](#)

[C-1.1 Etude expérimentale](#)

[C-1.2 Etude théorique](#)

[C-2 Écoulement des matériaux granulaires \( Expériences du 17 septembre 2025, 1er et 8 octobre\)](#)

[C3- Etude quantitative d'un écoulement grâce à des capteurs de force et une webcam](#)

[C4-Avantages du fond conique pour une vidange optimale](#)

[D - Modélisation d'un silo à grain par un circuit RC](#)

[Conclusion](#)

**Vidéo du projet:** <https://youtu.be/iO4cjjc6asg?feature=shared>

## Problématique

Est-il possible de décrire le comportement statique et dynamique de grains de blé ou de sable dans une colonne, pour pouvoir optimiser leur utilisation ?

## Remerciements

Merci à Monsieur Fernando Leal Calderon de l'ENSCPB pour son aide sur la recherche de documentation sur la fabrication des matériaux photoélastiques ainsi qu'à Madame Reynier, professeure ingénieure de notre lycée qui a transmis nos demandes.

Merci à Pierre Verdier, ingénieur docteur retraité pour avoir transmis nos demandes aux ingénieurs de procédés industriels de Syngenta et Novartis.

## Présentation de l'équipe

Nous sommes un groupe de 17 élèves de première et de terminale. Nous suivons tous l'enseignement de la spécialité physique et certains d'entre nous suivent également la spécialité NSI. Le projet a commencé l'année dernière pour sept d'entre nous, en seconde, avec notre professeur monsieur Laclaverie. Cette année, en combinant les compétences des élèves de première et de terminale, nous avons pu mener à bien ce projet.

**Élèves de Première: Anastasia, Clarence, Charlie** pour la réalisation des expériences de mesure de masse volumique et de vidange du silo avec fond conique.

**Arthur**, pour la conception du code python de modélisation de la pression dans le silo pour un circuit RC.

**Margot, Lena, Louis, Yanis**, pour l'étude et la réalisation des expériences qualitatives du début de projet

**Élèves de Terminale: Etienne, Raphaël, Nino** pour l'étude théorique de la pression dans le silo, et la réalisation de l'expérience avec capteurs de force. Nino a aussi contacté Pierre Verdier, ingénieur Novartis et Raphaël a pris contact avec un enseignant chercheur de l'université de Bordeaux Sciences.

**Zayneb, Antoine et Margot** pour l'étude quantitative du remplissage des silos avec divers matériaux.

**Salomé, Eden, Chloé** pour la réalisation et l'étude des matériaux photoélastiques  
(Voir photo du groupe en première page)

## Introduction

Un matériau granulaire est un matériau constitué d'un grand nombre de particules solides distinctes, les grains, qui ne sont pas liés par des liaisons chimiques. Il peut s'agir de sable, de pois chiches, de grains de blé ou de gravier. Même les cailloux de la ceinture d'astéroïdes peuvent être considérés comme des matériaux granulaires. Leur taille doit être supérieure à 100 micromètres. S'ils sont plus petits on parlera de poudres (par exemple la farine) mais leur comportement diffère de celui des milieux granulaires et nous ne les évoquerons pas ici. Cette division en éléments multiples entraîne des comportements particuliers de ces matériaux, souvent indépendamment des propriétés individuelles des grains. Les grains interagissent par contact et friction et les chocs entre grains sont la principale source de dissipation d'énergie lors du mouvement d'un matériau granulaire sec, et sont à l'origine des comportements particuliers de ces matériaux.

Pourquoi s'intéresser aux milieux granulaires? Ils constituent le second matériau le plus utilisé au monde après l'eau et les applications sont nombreuses: mines, géophysique, agroalimentaire... Tous les plastiques par exemple, sont transportés à un moment de leur fabrication sous forme de grains. C'est le cas aussi des médicaments, des aliments pour animaux, des graviers, de la lessive, des céréales... Les matériaux granulaires se retrouvent dans les tempêtes de sable, les glissements de terrain ou les éruptions volcaniques. Il est donc essentiel de comprendre leur comportement. C'est un domaine de recherche assez récent et les chercheurs ont encore du mal à les décrire.

Les matériaux granulaires peuvent présenter, selon l'énergie qu'on leur fournit, des comportements se rapprochant tantôt de ceux d'un solide (une dune de sable), tantôt de ceux d'un fluide (écoulement de sable), ou d'un gaz (tempête de sable). Les écoulements que nous étudierons ici sont difficiles à modéliser et posent de nombreux problèmes dans l'industrie ou l'agriculture.

Nous voulons étudier le remplissage et l'écoulement de grains de blé dans un silo, ainsi que la pression dans un silo plein<sup>1</sup>. Notre travail est divisé en quatre parties. Nous réaliserons d'abord quelques expériences qualitatives pour découvrir le comportement des grains et les forces de friction. Nous étudierons ensuite une colonne statique de grains: c'est l'expérience historique du silo de Janssen que nous explorerons en déterminant le rôle de plusieurs paramètres. Pour cela, nous chercherons à visualiser la formation de voûtes dans le milieu granulaire grâce à des billes de verre, puis avec des matériaux photoélastiques permettant de mettre en évidence les forces s'exerçant sur les billes. Lorsque des grains de sable s'écoulent dans un sablier ou un entonnoir, ce dernier se bouche parfois. Parce que les grains frottent entre eux, ils atteignent à certains moments un seuil de blocage. Cette situation peut être problématique dans de nombreuses applications industrielles, d'où l'importance de bien la comprendre pour l'éviter. Dans notre troisième partie, nous ferons une comparaison entre l'eau et les milieux granulaires lors d'un écoulement. Et enfin, nous chercherons à modéliser la pression dans un silo chargé de grains par la charge d'un condensateur.

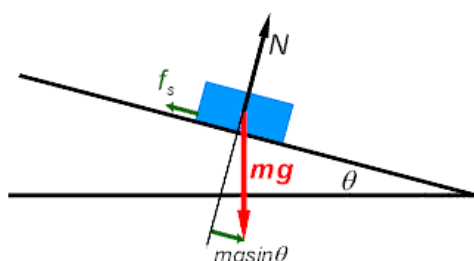
## A- A la découverte des étonnants milieux granulaires par l'expérience

Les matériaux granulaires sont constitués d'un grand nombre de particules interagissant entre elles grâce à des forces de friction complexes. Ils peuvent se comporter de trois manières différentes:

- comme des solides lors d'un empilement statique, et les lois de Newton, la gravitation, la friction permettent de les décrire.
- comme des liquides lors d'un écoulement, et c'est la mécanique des fluides qui sera utilisée pour les étudier

**Lorsque le bloc est immobile...**

$$f_s = mg \sin \theta$$



es et débit lors de la vidange d'un silo de  
che à l'ENS Lyon  
[3/cperge2.pdf](#)

- comme des gazs lors d'une tempête de sable. La physique statistique pourra les modéliser.

La principale force après la gravité est la force de friction, qui s'oppose au mouvement de glissement entre deux corps. Pour un système à l'arrêt, la force de friction qui est tangentielle est proportionnelle à la force normale appliquée sur l'objet<sup>2</sup>.

Soient  $\mu_s$  et  $\mu_c$  étant les coefficients de frottement statique et cinétique. Lorsque les surfaces sont immobiles l'une par rapport à l'autre, la force de frottement statique possède une valeur maximale  $f_{s \max} = \mu_s N$ . Lorsque les surfaces glissent l'une sur l'autre, la force de frottement cinétique  $f_c$  a une valeur constante  $f_c = \mu_c N$ .

Les grains ou les billes exercent des forces de contact qui comportent une composante normale  $F_n$ , perpendiculaire au plan de contact entre les deux solides, et une composante tangentielle  $F_t$ , appartenant au plan de contact. Le glissement entre les deux solides se produit si  $F_n$  et  $F_t$  vérifient la relation de proportionnalité :  $F_t = \mu F_n$ , où  $\mu$  est le coefficient de frottement qui caractérise l'état des deux surfaces en contact. Tant que la force  $F_t$  est inférieure à  $\mu F_n$ , le glissement ne se produit pas, et on parle alors d'adhérence entre les deux solides.



## A-1 Mise en évidence des frottements

Dans une éprouvette de 250 ml, on introduit un tube creux. On introduit des grains entre les deux tubes. On tasse en tapant légèrement sur l'éprouvette. On soulève l'ensemble du montage en tenant uniquement le tube intérieur.

1er cas : Avec du sable. Les forces de friction sont insuffisantes et le tube intérieur est retiré, même en essayant de mobiliser la friction en vibrant l'éprouvette.

2ème cas : Avec de la pierre ponce. Les forces de friction sont suffisantes pour soulever l'ensemble. Pour bouger, le sable doit se dilater s'il a été préalablement tassé. La pression normale augmente ainsi que la friction.

C'est un exemple de couplage friction-dilatance (variation de volume d'un milieu granulaire soumis à un cisaillement)

## A-2 La ségrégation

Remplissons un bocal de sable, de quelques cailloux et d'une bille. En vibrant horizontalement le récipient, on constate que les cailloux et la bille se retrouvent sur le dessus. C'est la percolation, les particules les plus grosses surnageant. Ce phénomène est aussi appelé flottation, et donne l'impression qu'il existe un équivalent de la poussée d'Archimède dans les milieux granulaires vibrés. Les particules sont donc séparées en fonction de leur taille. C'est la ségrégation.

<sup>2</sup> source: <https://babel.cegep-ste-foy.qc.ca/profs/rfoycapsules/frott.html>

## A-3 Expérience de Reynolds

Contrairement à la plupart des autres matériaux solides, un matériau granulaire compacté tend à se dilater lorsqu'on le cisaille. Le phénomène de dilatance décrit cette variation de volume. Nous avons réalisé deux expériences. La première avec un bac à sable humidifié, pour modéliser le bord d'une plage plongeant dans la mer. Si l'on appuie avec un béccher sur le sable humide, on le voit se dessécher. Le milieu se dilate sous la pression et l'eau remplit les espaces vides. Plaçons maintenant un tube dans une poche contenant du sable humide. Versons un peu d'eau dans le tube. Si nous déformons le sable, le niveau d'eau dans le tube diminue. Comme précédemment, le milieu se dilate sous la pression et l'eau remplit les espaces vides.



Le 24 septembre et le 1er octobre 2025, nous avons travaillé sur ces expériences, en ajoutant du bleu brillant pour rendre les mouvements de l'eau plus visibles. Après plusieurs essais, nous avons réussi à rendre visible la baisse du niveau de l'eau. Il est indispensable d'avoir initialement un sable soigneusement tassé, pour que la déformation puisse permettre de diminuer la masse volumique apparente et d'augmenter son volume pour permettre à l'eau de remplir les vides.

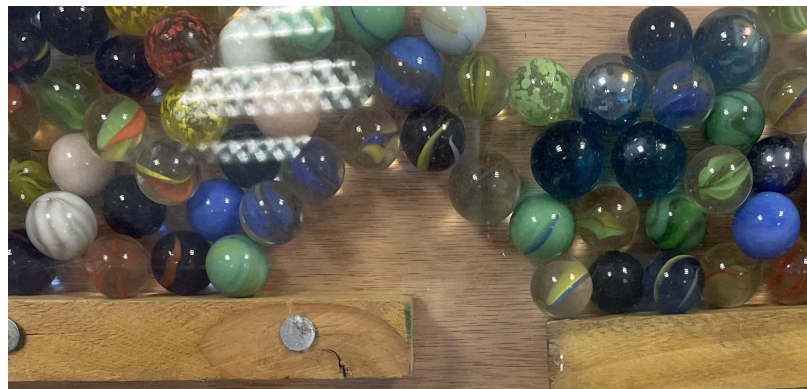
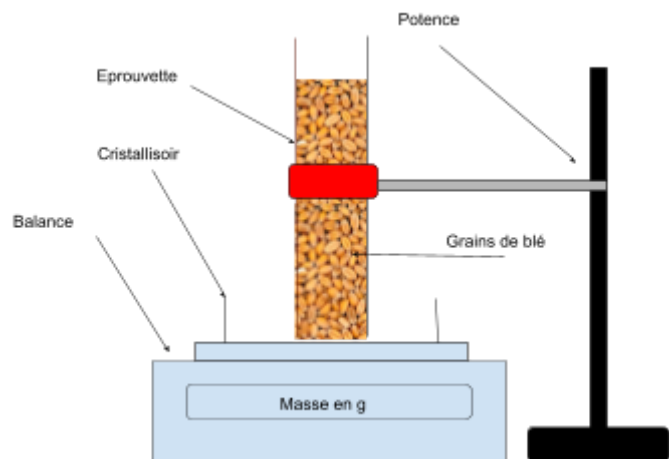
## A-4 Expérience du silo de Janssen

Une éprouvette graduée sans fond est maintenue au-dessus d'un cristalliseur posé sur une balance. On introduit 157.3g de blé. On lit sur la balance 84.1g! Si on tapote sur le tube l'indication diminue jusqu'à 77.8g. Donc 49.5% de la masse de blé seulement est portée par le fond!

L'expérience est reproduite avec des pois chiches et l'effet est encore plus marqué. Un quart de la masse seulement est portée par le fond. en tapotant l'indication de la balance passe de 120.3g à 57.9g !!!!

Les forces de frictions permettent aux parois de l'éprouvette de porter une partie des grains. En tapotant les forces de frictions augmentent et permettent aux parois de l'éprouvette de porter d'avantage.

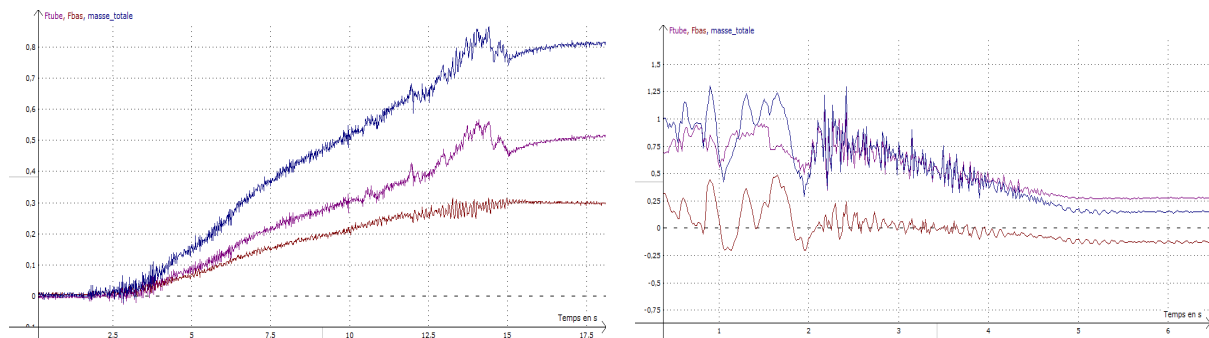
Pour comprendre comment les grains se comportent



dans le tube, nous faisons une analogie avec un écoulement de billes. On observe des voûtes se former, elles sont assez solides pour supporter des petits chocs. Avec des chocs plus importants, elles se démolissent, l'écoulement reprend et d'autres voûtes peuvent se former. On peut supposer que des voûtes se forment dans le silo de Janssen.

Nous cherchons à améliorer l'expérience précédente grâce à des capteurs de force. Un tube creux (éprouvette de 250 mL au fond découpé) est suspendu à un premier capteur de force. Un disque constituant le fond du tube est suspendu à un autre capteur de force. Nous remplissons avec du blé en moins de 20 secondes le tube. Nous traçons trois courbes, la masse totale, celle portée par le fond et celle portée par les parois.

Nous observons que la masse augmente à la fois sur le fond et sur les parois du tube. Le tube est capable de porter une partie de la masse grâce aux forces de friction. Dans ce cas, les parois portent à chaque instant plus que le fond.



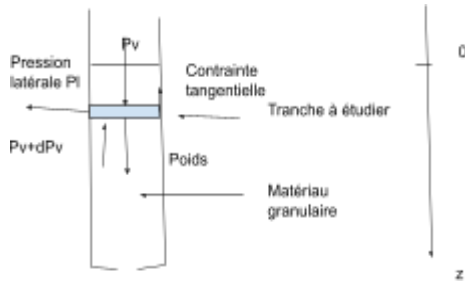
Lors de l'écoulement, par un trou de 22 mm, la masse pendant l'expérience semble presque entièrement portée par les parois du tube. En effet, l'ouverture est presque aussi large que le tube, ce qui laisse peu de place pour que le fond supporte des grains.

L'écoulement du blé est très irrégulier au début, puis la masse totale semble se confondre avec celle portée par le tube dans la seconde partie de l'expérience, le diamètre intérieur du tube étant de 30 mm.

## B- Etude statique d'un silo de Janssen

Nous allons tout d'abord étudier le comportement statique de grains dans un silo. Il s'agit d'un système difficile à décrire car il comporte un grand nombre de particules et d'interactions. Nous étudierons plusieurs paramètres mais pas la température car ses variations sont négligeables. Nous commençons par une description théorique.

### B-1 Équation différentielle du mouvement d'une tranche de matériau granulaire



Les pressions latérales sont les mêmes dans toutes les directions et s'annulent mutuellement. on peut donc faire un bilan de force vertical uniquement

On note  $S_1$  la surface d'un section horizontale du cylindre et  $S_2$  la surface latérale de la section du cylindre.

On a ainsi :

$$S_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$S_2 = \pi \cdot D \cdot dz$$

$F_1$  est la la force pressante exercée par le matériaux granulaire au-dessus de la section considéré et  $F_2$  correspond à la force pressante exercée sous la section.

D'après le principe de l'inertie, on obtient le bilan des forces suivantes :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{\tau} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

$$m \cdot g - S_2 \cdot \tau + P_z \cdot S_1 - (P_z + dP_z) \cdot S_1 = 0$$

On rappelle que  $m = \rho \cdot V$ . Les grains, comme les fluides, peuvent s'écouler, mais leur masse volumique est variable. Nous n'avons pas pu mettre en évidence de variations significatives de la masse volumique apparente des matériaux granulaires que nous avons utilisés. Nous la considérerons comme constante dans nos expériences.

Or  $V = S_1 \cdot dz$

$$\rho \cdot S_1 \cdot dz \cdot g - \pi \cdot D \cdot dz \cdot \tau - dP_z \cdot S_1$$

En divisant par  $dz \cdot S_1$  on obtient :

$$\rho \cdot g - \frac{\pi \cdot D \cdot \tau}{S_1} - \frac{dP_z}{dz} = 0$$

En remplaçant  $S_1$  par son expression en fonction de  $D$  on obtient :

$$\rho \cdot g - \frac{\pi \cdot D \cdot \tau}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{dP_z}{dz}$$

$$\text{Soit } \rho \cdot g - \frac{4 \cdot \tau}{D} = \frac{dP_z}{dz}$$

Or  $\tau = \mu \cdot K \cdot P_z$

$$\text{Donc } \rho \cdot g - \frac{4 \cdot \mu \cdot K \cdot P_z}{D} = \frac{dP_z}{dz}$$

En posant  $\lambda = \frac{D}{4 \cdot \mu \cdot K}$  on obtient :

$$\rho \cdot g - \frac{P_z}{\lambda} = \frac{dP_z}{dz}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre avec second membre constant.

La solution type est de la forme :  $P_z = A + B.e^{\frac{-z}{\tau}}$  avec  $A$ ,  $B$ , et  $\tau'$  trois constantes.

$$\frac{dP_z}{dz}$$

Or  $\frac{dP_z}{dz}$  est la dérivée de la pression en fonction de l'altitude.

Donc en dérivant la solution type :  $\frac{dP_z}{dz} = -\frac{B}{\tau'}.e^{\frac{-z}{\tau}}$

A nouveau en injectant la solution type on a :  $\rho.g - \frac{A}{\lambda} - \frac{B.e^{\frac{-z}{\tau}}}{\lambda} = -\frac{B}{\tau'}.e^{\frac{-z}{\tau}}$

On admettra que les termes constants doivent s'annuler c'est-à-dire :

$$\rho.g - \frac{A}{\lambda} = 0$$

Donc  $A = \lambda.\rho.g$

$$\text{Et } -\frac{B.e^{\frac{-z}{\tau}}}{\lambda} = -\frac{B.e^{\frac{-z}{\tau}}}{\tau'}$$

Donc  $\tau' = \lambda$

Dans le vide si  $z = 0$  alors  $P_z = 0$

En revenant à la solution type :  $A + B.e^{\frac{0}{\tau}} = A + B = 0$

Donc  $B = -A$  c'est-à-dire :  $B = -\lambda.\rho.g$

Finalement  $P_z = \lambda.\rho.g - \lambda.\rho.g.e^{\frac{-z}{\lambda}} = \lambda.\rho.g(1 - e^{\frac{-z}{\lambda}})$

On considère en pression relative, que la pression en surface est nulle. On obtient l'équation de Janssen. C'est une exponentielle décroissante. Donc si la hauteur de poudre  $z$  est suffisante le terme en exponentielle est négligeable et la pression constante. La pression tend donc vers un seuil, si le silo est suffisamment haut.

## B-2 A la poursuite du seuil de Janssen

Pour pouvoir faire le lien entre nos expériences et le modèle de Janssen, nous avons tout d'abord déterminé les masses volumiques des matériaux utilisés (voir annexe).

Pour mettre en évidence la présence d'un seuil, nous devons faire le lien entre la pression seuil de l'équation différentielle  $\lambda\rho g$  et la masse que nous pouvons mesurer à la balance :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{\pi\frac{D^2}{4}} = \lambda\rho g(1 - e^{\frac{-H}{\lambda}}) = \frac{D}{4\mu K}\rho g(1 - e^{\frac{-H}{\lambda}})$$
 avec  $H$  la hauteur de la colonne de grains.

On peut donc exprimer la masse ressentie par la balance au seuil :

$$m_{balance} = \frac{\rho\pi D^3}{16\mu K}(1 - e^{\frac{-H}{\lambda}})$$
 et masse seuil  $m_{seuil} = \frac{\rho\pi D^3}{16\mu K}$  car  $e^{\frac{-H}{\lambda}}$  tend vers zéro. On peut

estimer que si la hauteur de grains  $H$  vaut au moins  $5\lambda$ , l'asymptote est presque atteinte.

Nous avons essayé de déterminer les valeurs des coefficients de friction statique pour nos granulats avec le plastique des éprouvettes<sup>3</sup>. Pour cela nous plaçons un grain sur le l'éprouvette que nous inclinons jusqu'à ce que le grain se mette à glisser. Nous avons reproduit 10 fois l'expérience avec à chaque fois des résultats différents, car les grains sont tous différents. Le tableau en annexe contient les moyennes de nos résultats et l'incertitude

<sup>3</sup> <https://www.nagwa.com/fr/videos/210196583418/>

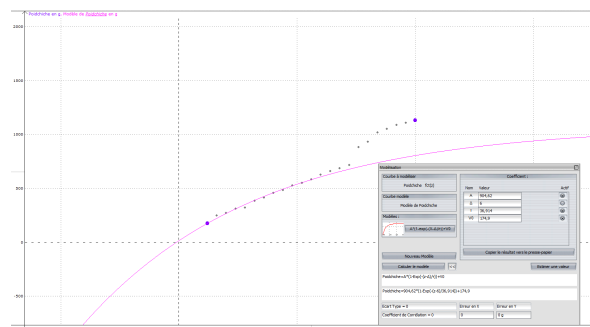
calculée à partir de l'écart type et du nombre de mesures. On a alors:  $\mu = \tan \alpha$  avec  $\alpha$  l'angle d'inclinaison de l'éprouvette. Pour pouvoir essayer de prévoir la masse seuil pour chacune de nos expériences, ainsi que la longueur caractéristique  $\lambda$ , il nous faut connaître la constante de Janssen  $K$ . Pour un fluide  $K$  vaut 1, de même pour des billes de quelques centaines de  $\mu\text{m}$  comme dans le mémoire de recherche de l'ENS que nous avons utilisé. Mais pour nos expériences, les grains sont beaucoup plus gros par rapport au diamètre du tube et de forme complexe. Nous avons trouvé une seule référence nous donnant quelques valeurs de  $K$  (comprises entre 0.8 et 1.2).<sup>4</sup> Le coefficient de Janssen  $K$  dépend de la masse volumique et de la forme et taille des grains. Dans l'impossibilité de prévoir le seuil à cause de l'inconnue  $K$ , nous allons essayer de déterminer cette constante par nos expériences. Nous disposons d'un tube de 62,0 cm de hauteur, et de diamètre de 6.5 cm, tenu par une pince et placé juste au-dessus d'une balance, sans contact. L'indication de la balance est donc de 0 g au début de l'expérience. Après avoir pesé notre granulat, nous le versons dans le tube tout en tapotant les parois pour augmenter la friction. Nous observons la balance lors du remplissage.

### Pois-chiche:

Nous avons versé 1668 g de pois chiches et lu 1058 g comme indication finale de la balance. L'indication a constamment augmenté. Nous n'avons pas atteint le seuil. La hauteur du tube nous limite. Nous obtenons

$\lambda = 36.9 \text{ cm}$  et  $m_{\text{seuil}} = 1050 \text{ g}$ .

$$m_{\text{seuil}} = \frac{\rho \pi D^3}{16 \mu K} \text{ donc } K = \frac{\rho \pi D^3}{16 \mu m_{\text{seuil}}} = 0.17$$



### Sable:

Nous pesons le sable en plusieurs fois due aux limites de la balance (2000 g max). Nous versons 3 kg de sable dans le tube vibré mais n'atteignons pas le seuil mais seulement la limite de notre balance. Nous reproduisons l'expérience avec un tube plus petit de hauteur: 29.0 cm et de diamètre 3.5 cm. Seuil inaccessible.

$\lambda = 20,25 \text{ cm}$

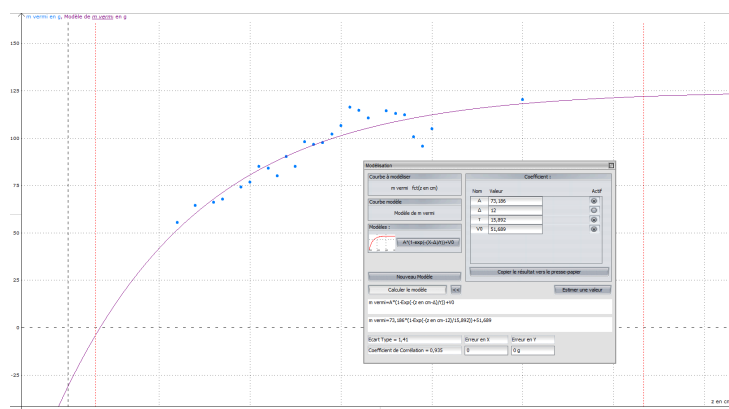
$m_{\text{seuil}} = 1250 \text{ g}$  donc  $K = 0.19$

### Vermiculite (mineral ressemblant à du liège):

Nous versons 228.9 g de vermiculite et nous atteignons une masse de 63.5g.

$m_{\text{seuil}} = 125 \text{ g}$  donc  $K = 0.14$

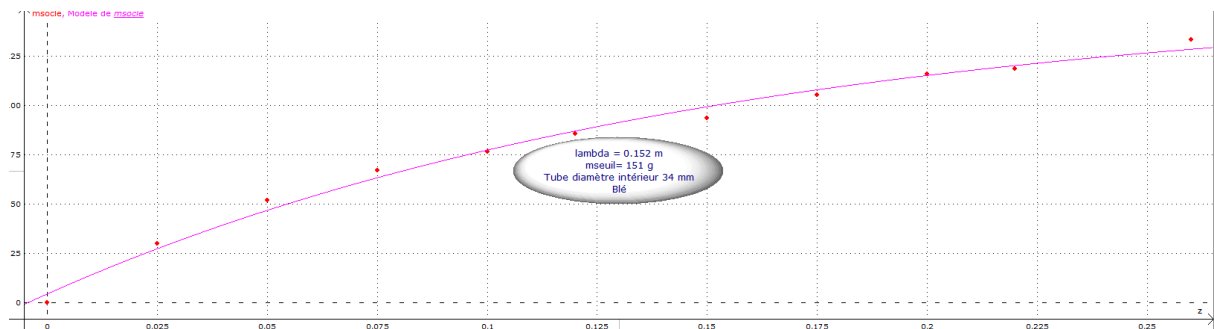
$\lambda = 15.89 \text{ cm}$



<sup>4</sup> [http://www.legfr.fr/IMG/pdf/Revue/Vol3/Ovarlez\\_Vol.3\\_pp30-38\\_2003.pdf](http://www.legfr.fr/IMG/pdf/Revue/Vol3/Ovarlez_Vol.3_pp30-38_2003.pdf)

### Blé:

Le premier tube utilisé dans ce cas a un diamètre intérieur de 3.5 cm. Nous versons 219.1 g et nous atteignons une masse finale de  $m_{\text{seuil}} = 151$  g donc  $K = 0.07$  et  $\lambda = 15.2$  cm



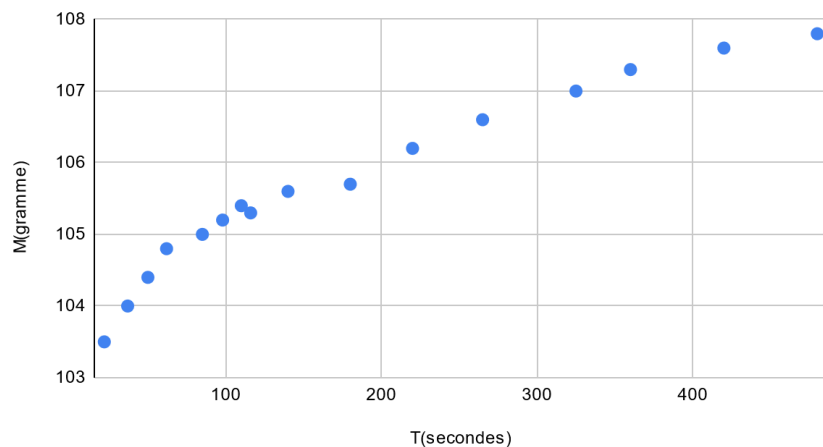
Le second tube utilisé a un diamètre intérieur de 4.7 cm. Nous versons 461.0 g et nous atteignons une masse finale de  $m_{\text{seuil}} = 273$  g donc  $K = 0.10$  et  $\lambda = 11.9$  cm

**Conclusion:** Nous avons réussi à déterminer la valeur de K pour quatre types de grains, mais sans pouvoir vérifier nos résultats par manque de documentation sur le sujet. L'incertitude est importante, notamment à cause de l'incertitude sur le coefficient de friction.

### B-3 Lenteur du phénomène

Pendant leur année de Seconde, 7 d'entre nous avaient déjà commencé à étudier le silo de Janssen. Remplissons un silo de pierres ponces et attendons 8 minutes, sans toucher l'expérience. La masse donnée par la balance évolue lentement car l'empilement n'est pas

M en fonction de T



stable. L'expérience reproduite plusieurs fois ne donne pas le même résultat, la masse pouvant diminuer, en fonction des lignes de force entre grains qui s'établissent ou se brisent. Pour éviter cette évolution, il faut mobiliser les forces de friction en tapotant le cylindre.

### B-4 Visualisation de lignes de forces grâce à des matériaux photoélastiques

Amàco accompagne les professionnels et futurs professionnels de la construction, de l'architecture et du design dans la conception et la réalisation de projets transformant les matières naturelles disponibles localement en matériaux de construction. Sur leur site nous avons trouvé une remarquable expérience de visualisation des lignes de forces grâce à des

matériaux photoélastiques ( <https://amaco.org/sous-la-poussee-des-grains/> ). Nous les avons contactés mais sans aucune réponse de leur part. Nous avons donc cherché à reproduire cette expérience par nos propres moyens.

Grâce à Madame C. Reynier, professeur et ingénieure de notre lycée, nous avons pu entrer en contact avec M. F. Calderon de l'école de chimie et de physique de Bordeaux, qui nous a indiqué une référence en anglais pour la fabrication des grains photoélastique en gélose.

La technique de photoélasticimétrie permet de visualiser les chaînes de force. Les forces se propagent par le réseau des grains, par contact. Grâce à une lumière polarisée, un matériau photoélastique change de couleur quand on lui impose une force. Nous espérons ainsi pouvoir visualiser les lignes de force amenant la formation de voûtes.

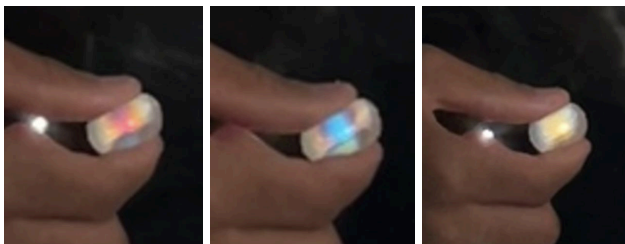
### B-4.1 Visualisation d'une bille en lumière polarisée

Une source de lumière blanche éclaire deux filtres polarisant croisés. On obtient du noir. L'expérimentateur introduit une bille de gélose à 12 % (meilleur compromis entre solidité et transparence après des essais à 10% et 15 %) entre les filtres et appuie dessus. La bille sombre s'éclaire en lumière blanche sous une faible pression puis, sous une pression plus élevée, des lignes rouges puis bleues apparaissent. Lorsqu'on étudie un empilement de bille, on voit apparaître des lignes colorées. La lumière est bleue au point de contact et rouge au centre des billes.

La lumière blanche de la source est polarisée dans une direction privilégiée par le premier polariseur. Elle traverse la bille puis est bloquée par le second polariseur croisé. La bille apparaît sombre. Lors d'une contrainte légère, la bille devient lumineuse. On peut en déduire que le plan de polarisation de la lumière blanche a tourné grâce à la contrainte et peut maintenant passer à travers le second polariseur croisé. Puis si la contrainte augmente, seul le rouge puis le bleu apparaissent. On suppose que la rotation du plan de polarisation de la lumière dépend de la contrainte et de la longueur d'onde:

contrainte faible: rouge visible

contrainte forte: bleu visible



expérience du 24/09/2025

La biréfringence est la propriété physique d'un matériau dans lequel la lumière se propage grâce à la double réfraction, c'est-à-dire qu'un rayon lumineux pénétrant dans le cristal est divisé en deux. L'indice de réfraction dépend de la polarisation et de la direction de propagation de la lumière. Lorsqu'un matériau transparent est soumis à une contrainte, il présente une biréfringence proportionnelle à la contrainte appliquée, ce qui permet de visualiser les formes de contrainte. En faisant passer de la lumière polarisée à travers le matériau, les changements de polarisation provoqués par la contrainte peuvent être

observés sous forme de motifs colorés, appelés franges, qui correspondent à la distribution de la contrainte<sup>5</sup>.

Lorsqu'un rayon de lumière traverse un matériau photoélastique, ses composantes d'onde électromagnétique subissent des indices de réfraction différents suivant deux directions. La différence des indices de réfraction conduit à une différence de chemin optique entre les deux composants et donc à des interférences ( décrites par la loi de Brewster que nous n'évoquerons pas ici). Les franges obtenues correspondent à des zones de contrainte identique.<sup>6</sup> Ce sont des isochromes.

## B-4.2 Visualisation des chaînes de force .



Nous avons réalisé cette expérience la première fois le 8 octobre, grâce à un montage support transparent réalisé par l'une d'entre nous. L'ensemble est sombre sans qu'une pression soit exercée. Lorsque la pression augmente nous voyons apparaître

des lignes lumineuses mettant en évidence dans notre exemple, une arche sur 4 billes au centre de l'image. Ces endroits sont plus lumineux, car les contraintes sont plus fortes. Puisqu'il est plus difficile d'appuyer sur un ensemble de bille que sur une seule, nous voyons des zones blanches ou rouges mais pas bleues.

## C- Etude dynamique de la vidange et du remplissage d'un silo

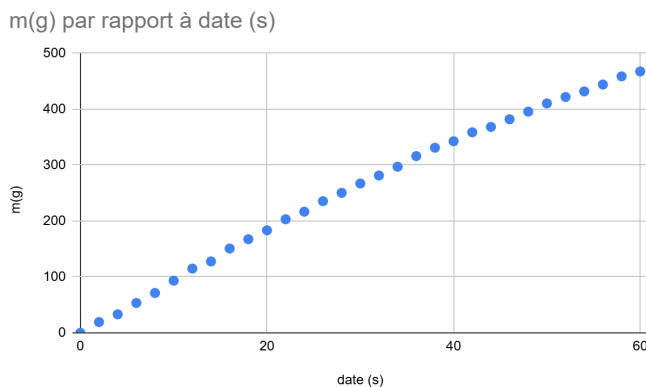
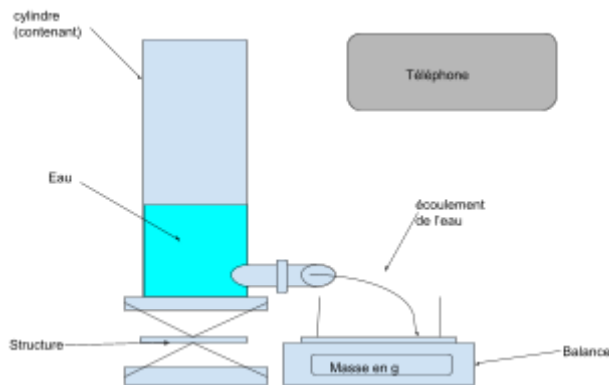
### C-1 Comparaison liquide-milieu granulaire: Écoulement d'eau

#### C-1.1 Etude expérimentale

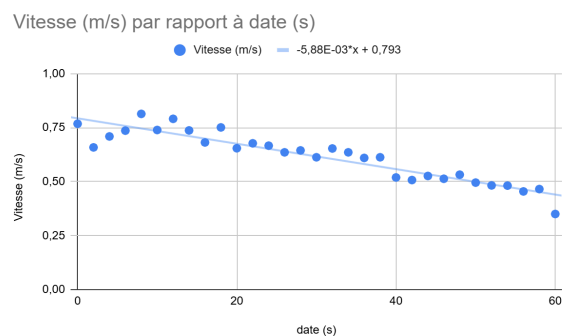
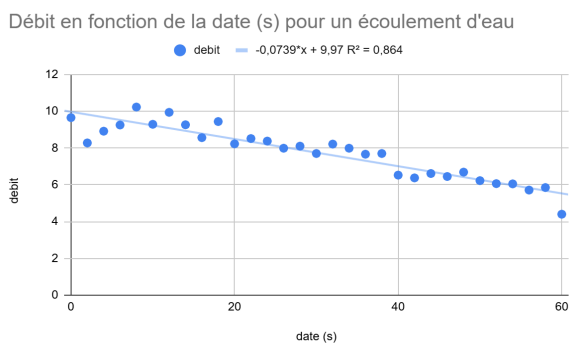
<sup>5</sup> d'après <https://www.samaterials.fr/blog/photoelasticity-stress-analysis-through-light.html>

<sup>6</sup> [https://cours.polymtl.ca/mec6405/Labo%20H06/MEC6405\\_lab5\\_h06.pdf](https://cours.polymtl.ca/mec6405/Labo%20H06/MEC6405_lab5_h06.pdf)

Nous étudions l'écoulement de l'eau depuis un large vase, muni d'une ouverture de 4 mm de diamètre. Pour cela, nous plaçons une balance tarée avec un cristalliseur pour recevoir l'écoulement, et nous filmons l'expérience.



Nous traçons l'évolution de la masse d'eau écoulée en fonction du temps. La pente de la tangente à la courbe diminue. La masse d'eau qui s'écoule chaque seconde, c'est-à-dire le débit  $D$ , diminue au cours du temps.  $D=v.s$  avec  $v$  la vitesse d'écoulement et  $s$  la section de sortie. La sortie a un diamètre de 4 mm, donc un section  $s= 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ . Nous pouvons ainsi tracer l'évolution du débit et de la vitesse d'éjection.



Nous observons un jet d'eau avec une portée de plus en plus courte. Plus la hauteur d'eau diminue dans le tube, plus la vitesse d'éjection diminue. La vitesse de l'eau en B est la même que celle d'un système en chute libre d'une hauteur  $h$ .

**Conclusion: Le débit de l'eau diminue au cours du temps et dépend de la hauteur d'eau restante dans le vase**

### C-1.2 Etude théorique

Nous avons voulu en faire une étude théorique, à partir de la relation de Bernoulli.

On cherche à déterminer la vitesse d'écoulement de l'eau. Pour cela on s'appuie sur la formule de Bernoulli, en considérant deux points :

-A à la surface de l'eau

-B au robinet

On obtient alors :

$$P_A + \rho \cdot g \cdot z_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_B + \rho \cdot g \cdot z_B + \rho \frac{v_B^2}{2}$$

On constate aisément que  $P_A = P_B = P_{atm}$ , on peut alors simplifier l'équation :

$$\rho \cdot g \cdot z_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = \rho \cdot g \cdot z_B + \rho \frac{v_B^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow g \cdot z_A + \frac{v_A^2}{2} = g \cdot z_B + \frac{v_B^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow g(z_A - z_B) = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}$$

Si on admet que  $v_A \ll v_B$ , en posant de plus  $h = z_A - z_B$  on a :

$$g \cdot h = \frac{v_B^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

**Conclusion: Donc la vitesse d'écoulement dépend de la hauteur h de liquide restante dans le vase. Elle diminue donc au cours du temps**

## C-2 Écoulement des matériaux granulaires ( Expériences du 17 septembre 2025, 1er et 8 octobre)

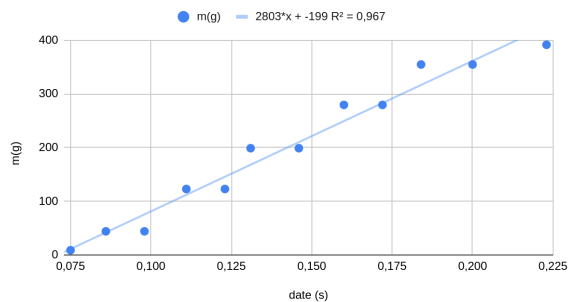
Nous choisissons une éprouvette de 30 mm de large et une ouverture réglable de 0 à 25 mm. Nous étudions l'écoulement de graviers, de blé, de pois chiches et de sable dans une balance. Nous choisissons de les introduire dans l'éprouvette avec un bécier et de ne pas les tasser, donc de ne pas tapoter le tube. Comme pour l'eau, nous filmons l'expérience pour en faire une étude quantitative de la masse en fonction du temps.

Nous observons que l'écoulement n'est pas toujours possible. Écoulement impossible pour le blé, les graviers et les pois chiches si le diamètre de l'ouverture est inférieur à 20 mm. Pour le sable, l'écoulement se bloque pour un diamètre de l'ouverture de 5 mm.

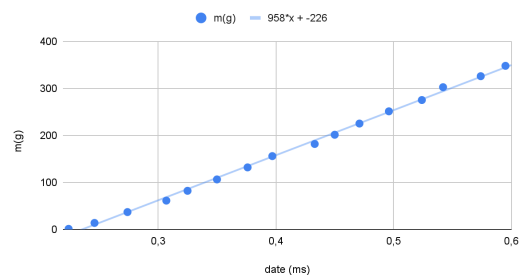
Voici nos résultats d'écoulement pour le sable, pour 4 ouvertures différentes. Dans tous l'évolution de la masse en fonction du temps est modélisable par une droite avec un coefficient de corrélation proche de 1.

**Conclusion: L'écoulement du sable s'effectue avec un débit constant, quelque soit la hauteur restante dans le silo. C'est la loi de Beverloo(1961).**

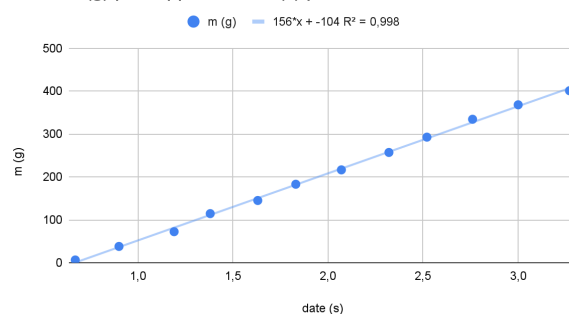
m(g) par rapport à date (s) d=25 mm



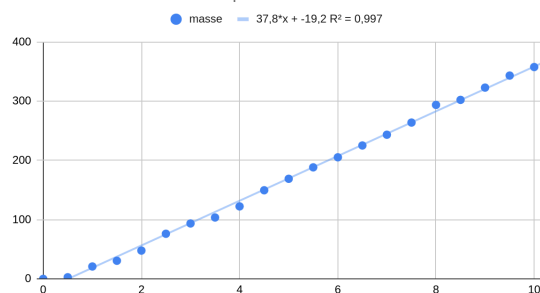
msable(g) par rapport à date (s) pour d=20 mm



m sable (g) par rapport à date (s) pour d= 15 mm



msable en fonction du temps d= 10 mm



Nous avons comparé l'écoulement de l'eau et de matériaux granulaires. Leur comportement diffère. Même si les matériaux granulaires peuvent couler, ils ne le font pas comme les liquides en ce qui concerne l'évolution de leur débit et la vitesse d'éjection.

### C3- Etude quantitative d'un écoulement grâce à des capteurs de force et une webcam

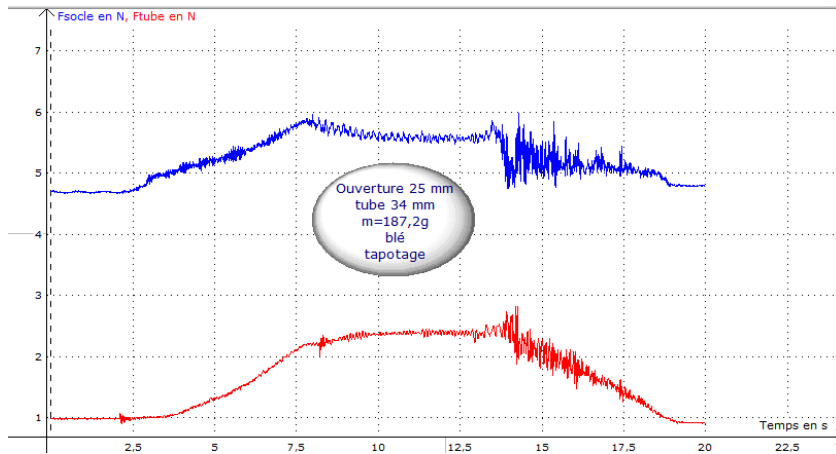
Deux outils s'offrent à nous pour l'étude de l'écoulement des grains:

- les capteurs de forces pour différencier la masse portée par le socle et celle portée par les parois.
- Une caméra pour étudier le mouvement de grains particuliers contre les parois.

Avec le même montage que présenté au début de ce travail (paragraphe A4), nous étudions le remplissage, la mobilisation et l'écoulement de divers matériaux granulaires contenus dans une éprouvette de 250 ml à ouverture réglable, et nous filmons les parois pour établir des profils de vitesse dans le tube. (Expériences du 01/10/2025)

La mobilisation est le moment où en tapotant les parois on favorise l'établissement de forces de frottements entre les grains et avec les parois. Nos enregistrements font apparaître des oscillations lors de la vidange dont nous déterminons la période. Elles sont dues au choc des grains sur les limites de l'orifice de sortie et sont liées à la vitesse d'écoulement des grains. Connaissant la masse volumique des grains et le diamètre du tube, nous pouvons retrouver la hauteur de grain à chaque instant, connaissant la masse totale présente dans le montage. Nous comparons la vitesse des grains à trois hauteurs différentes dans le tube en fonction du temps.

Expérience 1: blé et D= 20 mm.



Nous versons une masse de blé dans un tube de diamètre intérieur 34 mm et d'ouverture inférieure 25 mm.

Nous mesurons des forces à partir desquelles nous pouvons calculer les masses correspondantes. L'indication des capteurs n'est pas nulle à  $t=0$  à cause du poids du tube et du fond. Connaissant la masse volumique du

grain, nous pouvons calculer la hauteur de grain dans le tube, dans la feuille de calcul de LatisPro:

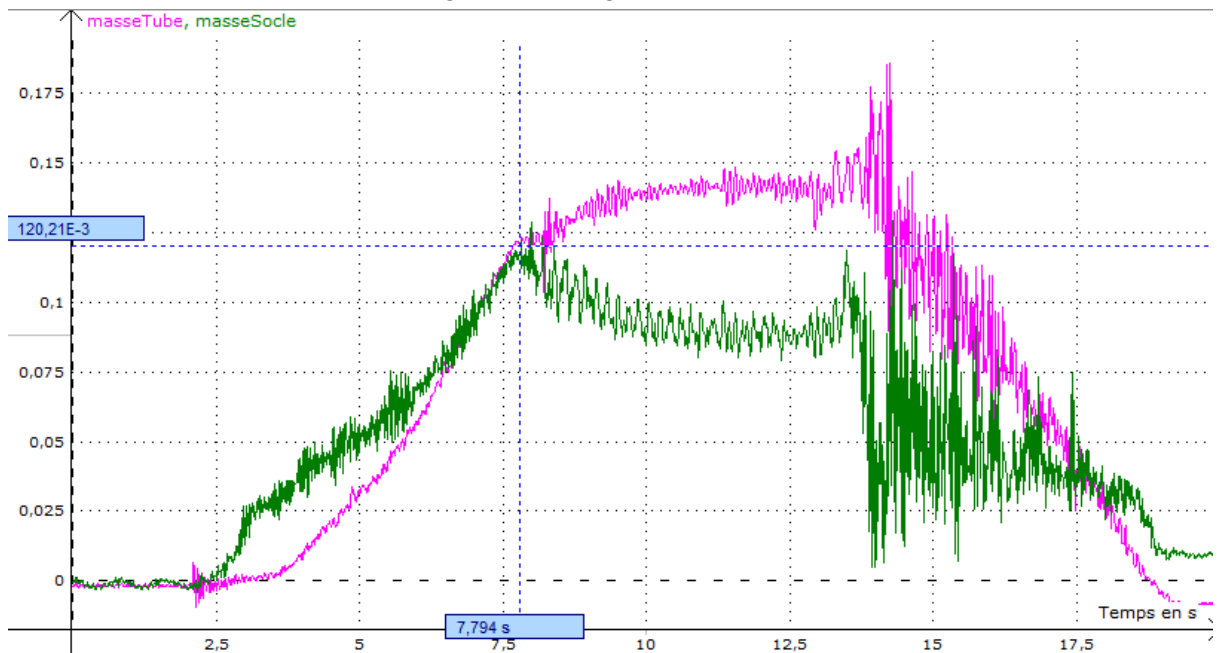
$$\text{masseTube} = (\text{Ftube} - 1) / 9.81$$

$$\text{masseSocle} = (\text{Fsocle} - 4.7) / 9.81$$

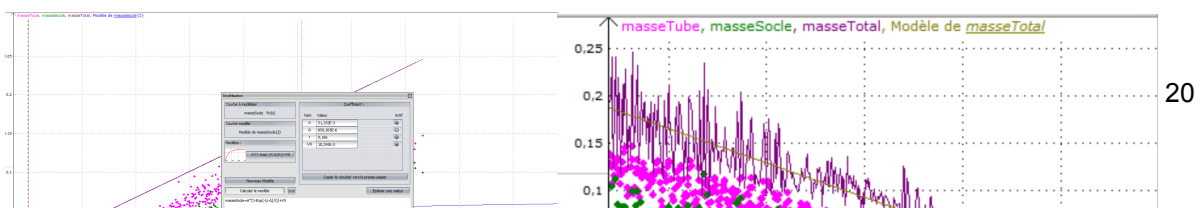
$$\text{masseTotal} = \text{masseTube} + \text{masseSocle}$$

$$z = 4 * \text{masseTotal} * 10000 / (740 * 3.14 * (3.4 * 3.4))$$

Nous visualisons l'augmentation de la masse portée par le tube et par le fond pendant le remplissage. Elles n'évoluent pas de la même manière, mais atteignent dans cet exemple la même valeur à la fin du remplissage, soit 120 g.



Nous mobilisons ensuite les forces de friction en tapotant le tube: la masse portée par le tube augmente jusqu'à 143 g, et celle par le fond diminue jusqu'à 97 g. A cet instant l'effet Janssen est visible. Christophe Perge indique dans son travail que l'effet Janssen n'est observable qu'à partir de l'instant où la friction sur les parois est entièrement mobilisée. C'est ce que nous avons fait et observé. Lors de la vidange, il y a beaucoup de vibrations dues aux chocs des grains sur l'ouverture du fond. Les pics les plus importants au début de la vidange correspondent au moment de retrait du papier empêchant l'écoulement des

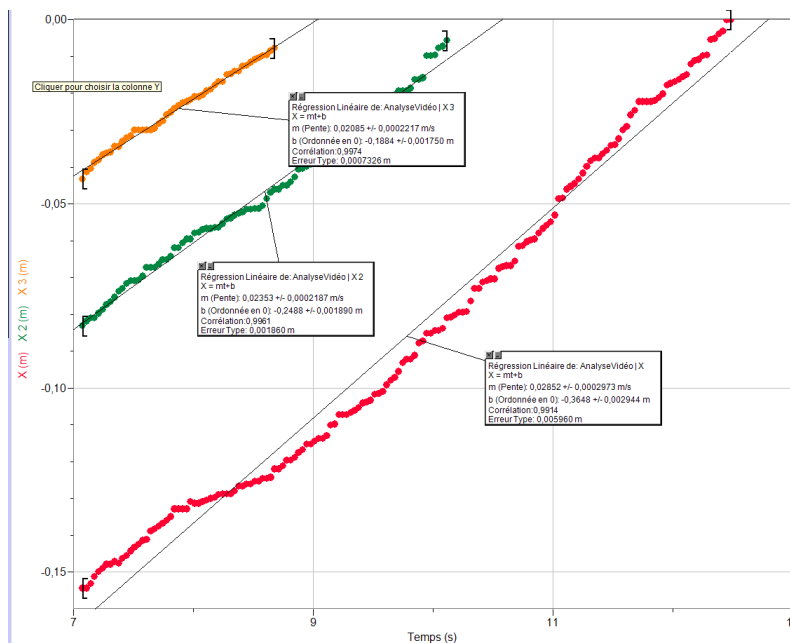


grains. Durant la vidange, c'est d'abord la masse portée par le fond qui diminue rapidement. C'est la chute rapide des grains situés sous les premières voûtes. Ensuite la masse portée par le tube diminue rapidement, puis celle portée par le fond à partir de l'instant 18,5s pour les derniers grains. La vidange s'effectue à débit constant de 36.2 g/s. La débit de la masse portée par le tube est de 26.8 g/s, et celui du socle de 6.3 g/s. A cause des nombreuses oscillations dues aux chocs de grains, les modèles de Latispro manquent de précision. En modélisant l'évolution de la masse du socle pour la dernière partie de la vidange on trouve  $\lambda_{\text{dynamique}} = 16.6 \text{ cm}$  et une masse seuil de 51 g. Le coefficient est proche de celui obtenu en statique:  $\lambda_{\text{statique}} = 15.2 \text{ cm}$

Conclusion:

**Nous avons mis en évidence un effet Janssen dynamique lors de la vidange.**

L'étude des profils de vitesse sur LoggerPro sur un écoulement nous montre que pendant l'ensemble de la vidange la vitesse des grains en contact avec la paroi (ceux que nous pouvons filmer) est légèrement plus élevée en haut, qu'au milieu ou en bas pour les pois chiches, la pierre ponce et le blé. Impossible à déterminer pour le sable à cause de la petitesse des grains, même s'il semble sans mesure que ce soit la même chose. Par exemple pour un vidange de durée totale 15s de pierre ponce d'un tube de 3.4 cm de diamètre par une ouverture de 14 mm, L'écoulement semble se produire sans zones mortes.



La vitesse est de 0.029 m/s pour un grain initialement en haut du tube, 0.024 m/s pour un grain initialement situé au milieu et 0.021 m/s pour un grain situé dans la partie basse.

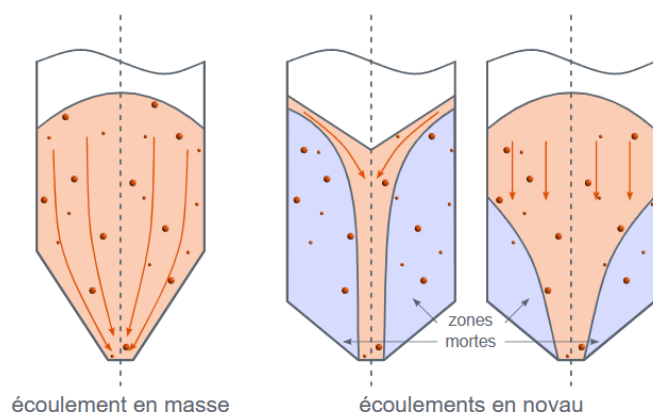
**Conclusion: La vitesse de chaque grain est constante au cours de la vidange.** Nous retrouvons le résultat de la loi de Beverloo

## C4-Avantages du fond conique

### pour une vidange optimale<sup>7</sup>

Le fond conique pour une cellule à grains peut présenter de nombreux atouts par rapport aux fonds plats traditionnels et permettre une

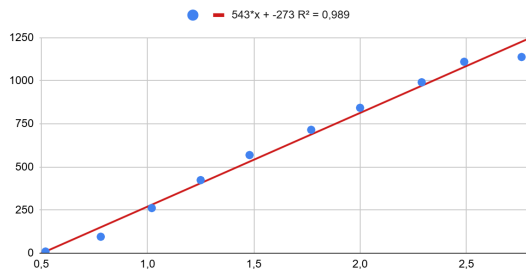
<sup>7</sup> source: <https://nte.mines-albi.fr/STP>  
<https://ingenieursdeparis.fr/2025/01/2-ation-silos-agricoles-industriels/>



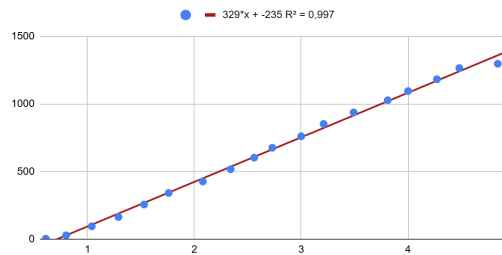
vidange presque complète du silo grâce une meilleure fluidité des produits lors de la vidange et une diminution des zones mortes où les grains peuvent stagner ainsi qu'une réduction du temps nécessaire pour vider complètement le silo.

Le mercredi 1er octobre, Anastasia, Louis, et Yanis ont réalisé la comparaison de l'écoulement avec fond plat et avec fond conique (entonnoir plastique d'angle 45°) pour l'écoulement du sable dans un silo éprouvette de 3,5 cm de diamètre intérieur. La vidéo de l'écoulement montre l'absence de zone morte avec cône.

Graphique représentant le temps en fonction de la masse (expérience 2 avec entonnoir)



Graphique représentant le temps en fonction de la masse (expérience 3 avec grossissement 25)



On observe une vitesse plus importante lorsqu' un cône est utilisé. Donc pour favoriser et permettre un écoulement plus rapide il faut utiliser un cône.

## D - Modélisation d'un silo à grain par un circuit RC

Il existe un champ électrique dans un condensateur qui stocke des charges électriques et un champ gravitationnel dans un silo plein de grains. Les deux sont uniformes. La constante de temps du circuit électrique peut modéliser la constante de longueur du silo à grains. La tension du générateur modélise la pression maximale qui peut être atteinte au fond du silo ou la masse mesurée par la balance. Pour le circuit RC, la tension du condensateur augmente au cours du temps. C'est en fonction de la profondeur que la pression augmente dans un silo. Les deux équations différentielles sont du premier ordre à coefficients constants avec second membre. La principale différence entre les deux vient du lien existant entre les coefficients pour l'évolution de pression, qui n'existe pas pour le circuit RC. E est indépendant de RC. Mais  $\rho g \lambda$  dépend de la constante de longueur  $\lambda$ .

Matériau	Sable	Pois chiche	Vermiculite	blé
masse volumique	1.8 g/ml	0.84 g/ml	0.14 g/ml	0.74 g/ml
$\rho g$ (N/m <sup>3</sup> )	$18 \cdot 10^3$	$8,4 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^3$	$7.4 \cdot 10^3$
k(V/s)	$18 \cdot 10^3$	$8,4 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^3$	$7.4 \cdot 10^3$
$\mu$	0.42	0.25	0.42	0.58

$\lambda = \frac{D}{4\mu K}$ (m)	0.21	0.38	0.27	0.16
----------------------------------	------	------	------	------

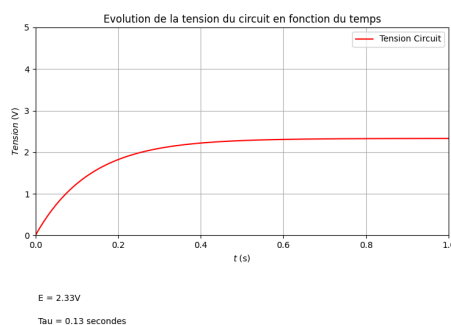
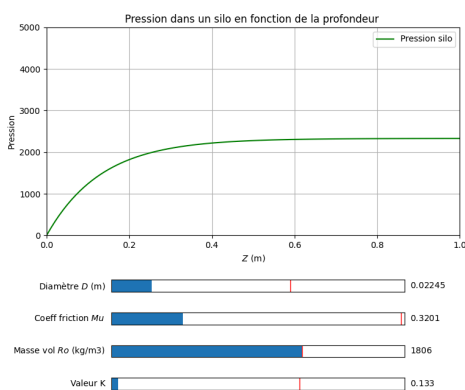
Pour D=6.5 cm de diamètre.

Nous choisissons de modéliser la pression dans le silo obéissant à l'équation

$\rho g \lambda = P + \lambda \frac{dP}{dz}$  soit  $\rho g \frac{D}{4K\mu} = P + \frac{D}{4\mu K} \frac{dP}{dz}$  par la tension d'un condensateur dans un circuit

RC obéissant à l'équation  $k\tau = Uc + \tau \frac{duc}{dt}$  soit  $E = kRC = Uc + RC \frac{duc}{dt}$ . Donc:

- la profondeur z(m) est représentée par le temps t (s)
- $\rho g$  est représentée par le coefficient  $k = \frac{E \cdot 1000}{RC}$ . (Le coefficient 1000 permet d'obtenir des tensions de quelques volts.)



## Conclusion

Grâce à ce projet, nous avons réussi à explorer le monde fascinant des matériaux granulaires. 15 élèves de Première et Terminale ont participé à ce travail avec notre professeur Jean-Michel Laclaverie. Nous avons choisi ce thème car il est d'importance dans le monde actuel où les matériaux granulaires sont partout, de l'agriculture, au bâtiment, à l'industrie...

Nous avons pu réinvestir nos connaissances de Terminale pour établir et exploiter l'équation différentielle de la pression dans le tube de Janssen, et ainsi explorer le comportement solide et liquide des grains.

Nous avons pu mettre en évidence qu'un fond conique permettait un écoulement plus rapide des grains. C'est pour cette raison qu'il est largement utilisé par exemple dans les silos agricoles.

Enfin, nous avons modélisé par un circuit RC la pression dans un silo chargé de grains.

Nos pistes de travail pour améliorer notre travail sont nombreuses. Nous voudrions essayer de déterminer les coefficients de friction ainsi que les constantes de Janssen K avec une autre méthode pour obtenir des résultats plus fiables. Nous voudrions refaire nos expériences avec des tubes plus grands pour mettre plus facilement en évidence le seuil de Janssen. Il nous faut améliorer la précision de notre travail pour faire correspondre nos mesures et nos prévisions par le calcul plus correctement. Merci pour l'attention que vous avez portée à notre travail.

## Annexes: La physique du grain de blé

### B-2 Détermination des masses volumiques et coefficient de friction

Matériau	Sable	Pois chiche	Vermiculite	blé
masse	165g	93.6g	19.1g	81.5g
volume	92 ml	112 ml	136 ml	110 ml
masse volumique	1.8 g/ml	0.84 g/ml	0.14 g/ml	0.74 g/ml

Remarque: Nous avons trouvé sur le site d'une coopérative agricole que le poids spécifique est une mesure physique de la masse volumique apparente des grains, exprimée en kilogramme par hectolitre en agriculture. Le poids spécifique est proche de 76 kg/hl pour le blé tendre soit 76 kg pour 100 l. Cette valeur est proche de la masse volumique que nous avons mesurée pour notre échantillon de blé.

matériau	angle $\alpha$ °	Coeff de friction $\mu$
blé	30 ± 8	0.58
gravier	40 ± 12	0.84
sable	23 ± 9	0.42
vermiculite	23 ± 10	0.42
Pois chiches	14 ± 6	0.25

### D - Modélisation d'un silo à grain par un circuit RC

Programme python

#Fait par Arthur Cormouls-Houles 1G9 le 14/10/2025

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import text, patches
import numpy as np
from matplotlib.widgets import Slider
from matplotlib.gridspec import GridSpec
```

```

import math
#Fonction d'actualisation des courbes
ESliderVal = 0
def update(val):
    global ESliderVal
    roVal = Ro.val
    dVal = D.val
    muVal = Mu.val
    kVal = K_Slider.val

    y1=roVal*g*dVal/(4*muVal*kVal)*(1-np.exp(-z/(dVal/(4*muVal*kVal))))
    p1.set_ydata(y1)

    ESliderVal = roVal*g*(dVal/(4*muVal*kVal))/1000
    tau = dVal/(4*muVal*kVal)

    y2=ESliderVal*(1-np.exp(-z/(tau)))
    p2.set_ydata(y2)

    text_eVal.set_text("E = " + str(round(roVal*g*(dVal/(4*muVal*kVal))/1000, 2)) + "V")
    text_tau.set_text("Tau = " + str(round(dVal/(4*muVal*kVal), 2)) + " secondes")

#y1=initial_Ro*g*initial_D/(4*initial_Mu)*(1-np.exp(-z/(initial_D/(4*initial_Mu))))
def init_graphs():
    global p1, p2, fig
    fig, ax = plt.subplots()
    plt.subplot(2, 2, 1)
    plt.axis([0, 1, 0, 5000])
    plt.xlabel('$Z$ (m)')
    plt.ylabel('Pression')
    plt.title('Pression dans un silo en fonction de la profondeur ')
    plt.grid()
    p1, = plt.plot(z, y1, '-g',label=r'Pression silo')

    plt.legend()

    plt.subplot(2, 2, 2)
    plt.axis([0, 1, 0, 5])
    plt.xlabel('$t$ (s)')
    plt.ylabel('$Tension$ (V)')
    plt.title('Evolution de la tension du circuit en fonction du temps')
    plt.grid()
    p2, = plt.plot(z2, y2, '-r',label=r'Tension Circuit')

    plt.legend()

def init_sliders():

```

```

global Ro, Mu, D, ESlider, RSlider, CSlider, K_Slider
global e_text
#----- Slider Graph 1 -----#
rectangle_a = plt.axes([0.18, 0.325, 0.25, 0.02])
Ro = Slider(rectangle_a, 'Masse vol $Ro$ (kg/m3)', 500,2500, valinit=initial_Ro)

rectangle_b = plt.axes([0.18, 0.38, 0.25, 0.02])
Mu = Slider(rectangle_b, 'Coeff friction $Mu$ ', 0.1, 1, valinit=initial_Mu)

rectangle_c = plt.axes([0.18, 0.435, 0.25, 0.02])
D = Slider(rectangle_c, 'Diamètre $D$ (m)', 0.01, 0.1, valinit=initial_D)

rectangle_k = plt.axes([0.18, 0.27, 0.25, 0.02])
K_Slider = Slider(rectangle_k, "Valeur K", 0.1, 1.5, valinit=initial_K)

#----- Text Graph 2 -----#

#Conditions initiales
initial_Mu = 0.99
initial_Ro = 1800
initial_D = 0.065
initial_K = 1

g=9.81
# Définitions des courbes
z=np.linspace(0.,20.,2000)
y1=initial_Ro*g*initial_D/(4*initial_Mu)*(1-np.exp(-z/(initial_D/(4*initial_Mu))))

z2=np.linspace(0., 20., 2000)
y2=initial_Ro*g*(initial_D/(4*initial_Mu*initial_K))/1000*(1-np.exp(-z/((initial_D/(4*initial_Mu*initial_K))))))

print(y2)

init_graphs()
init_sliders()

text_eVal = fig.text(0.55, 0.42, "E = " +
str(round(initial_Ro*g*(initial_D/(4*initial_Mu*initial_K))/1000, 2)) + "V")
text_tau = fig.text(0.55, 0.38, "Tau = " + str(round(initial_D/(4*initial_Mu*initial_K), 2)) + "
secondes")
# appel de la fonction update lorsque le curseur est actionné
Mu.on_changed(update)
Ro.on_changed(update)
D.on_changed(update)

```

```
K_Slider.on_changed(update)
```

```
#Affichage
```

```
plt.show()
```