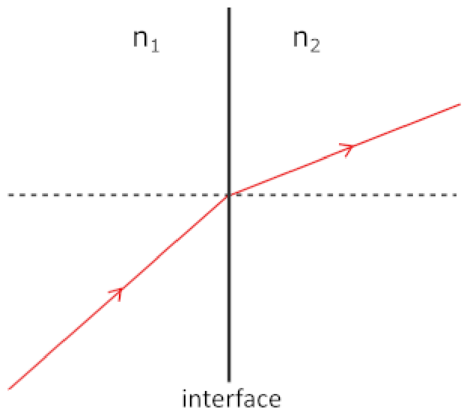
Sciences à l'École

Partie A
Questionnaire à choix multiples

Durée conseillée : 1 heure.

Pour chaque question, les candidats entoureront la réponse de leur choix sur le document réponse.
Il n'y a qu'une réponse correcte par question. Aucune justification n'est demandée.

Q1. On considère l'interface entre deux plaques de plastique transparentes homogènes sur laquelle est envoyée un rayon lumineux. On présente ci-dessous sa trajectoire :



Indiquer les indices optiques possibles pour les deux plaques permettant d'obtenir cette situation :

(a) $n_1 = 1,25$ et $n_2 = 1,00$;
(b) $n_1 = 1,35$ et $n_2 = 1,65$;
(c) $n_1 = 1,65$ et $n_2 = 1,35$;
(d) $n_1 = 1,00$ et $n_2 = 1,25$.

Éléments de solution : D'après loi de Snell-Descartes, si $i_2 < i_1$ alors $n_2 > n_1$. Les deux réponses possibles sont alors la (b) et la (d). Or pour un plastique, l'indice de réfraction est strictement supérieur à 1 (précisément entre 1,3 et 1,65), la réponse (d) n'est donc pas possible.
La réponse juste est la réponse (b).

Q2. Un photon vient ioniser un atome d'hydrogène au repos. Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur la longueur d'onde λ de ce photon ?

(a) $\lambda < 3,5 \times 10^2$ nm ;
(b) $\lambda > 3,5 \times 10^2$ nm ;
(c) $\lambda < 9,1 \times 10$ nm ;
(d) $\lambda > 9,1 \times 10$ nm.

Éléments de solution : Le photon incident doit avoir au minimum une énergie de ΔE=13,6 eV, ainsi sa longueur d'onde maximale est $\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$ égale à 91,2 nm.

Q3. On plonge une barre d'acier de 600 g chauffée dans un calorimètre contenant 0,5 L d'eau à température ambiante ($\theta_{amb} = 25$ °C). On considère que l'ensemble forme un système isolé et on néglige les transferts thermiques avec les parois.
Les capacités thermiques massiques entrant en jeu sont : $c_{eau} = 4\,185$ J.kg^{-1}.K^{-1} et $c_{acier} = 440$ J.kg^{-1}.K^{-1}
Quelle est la température θ minimale de l'acier pour amener l'eau à ébullition ?

(a) $\theta = 109\,°\mathrm{C}$;
(b) $\theta = 494\,°\mathrm{C}$;
(c) $\theta = 594\,°\mathrm{C}$;
(d) $\theta = 694\,°\mathrm{C}$.

Éléments de solution : Par conservation de l'énergie, on écrit

$$m_{acier}\, c_{acier} \left(\theta_f - \theta\right) = -m_{eau}\, c_{eau} \left(\theta_f - \theta_{amb}\right)$$

On a donc $\theta = \theta_f + \frac{m_{eau}\, c_{eau}}{m_{acier}\, c_{acier}} \left(\theta_f - \theta_{amb}\right)$ où $\theta_f = 100\,°\mathrm{C}$.

On trouve alors $\theta = 694\,°\mathrm{C}$.

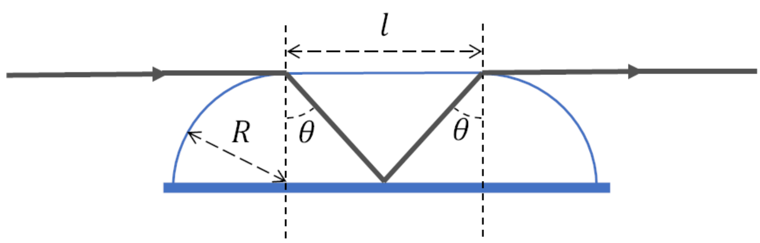
Q4. On considère 3 condensateurs de capacités identiques. On charge l'un des condensateurs avec un générateur idéal de tension E. Une fois chargé, on le place dans un circuit électrique fermé, en série avec les deux autres condensateurs identiques. Ces deux condensateurs sont initialement déchargés.
On indique que la capacité équivalente de deux condensateurs de capacité respective C_1 et C_2 en série est donnée par : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Que vaut, en régime permanent, la tension aux bornes du condensateur initialement chargé ?

(a) $\frac{E}{2}$;
(b) $\frac{3E}{2}$;
(c) $\frac{E}{3}$;
(d) $\frac{2E}{3}$.

Éléments de solution : Les deux condensateurs en série sont équivalents à un condensateur de capacité $C/2$. On appelle U_f la tension, en régime permanent, aux bornes du condensateur équivalent. C'est également la tension aux bornes du condensateur initialement chargé.
Par conservation de la charge : $CE = C/2U_f + CU_f$.
On obtient alors : $U_f = \frac{2E}{3}$

Q5. On considère un bloc de verre d'indice optique n qui possède une surface inférieure plane parfaitement réfléchissante, mais dont les côtés gauche et droit sont incurvés en forme de quart de cercle de rayon R. La face supérieure possède une longueur l (voir la figure ci-dessous).



Il est plongé dans l'air, dont on supposera l'indice optique égal à 1.
On considère un faisceau incident de lumière, qui arrive en incidence rasante par rapport à la face supérieure. On cherche la condition sur l, pour qu'il ressorte du bloc toujours en incidence rasante par rapport à la face supérieure.

(a) $l = \frac{2R}{\sqrt{n^2-1}}$;
(b) $l = \frac{2R}{\sqrt{n^2+1}}$;
(c) $l = \frac{R}{\sqrt{n^2+1}}$;
(d) $l = \frac{R}{\sqrt{n^2-1}}$.

éléments de solution : On représente la trajectoire du rayon lumineux, qui est symétrique en raison de la géométrie du problème.
$\tan\theta = \frac{l}{2R}$. D'après les lois de Descartes : $n = \frac{1}{\sin\theta}$
On en déduit $l = \frac{2R}{\sqrt{n^2-1}}$

Q6. Une particule ponctuelle chargée est placée sans vitesse initiale dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$ et un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. On suppose que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles. Quelle va être l'allure de la trajectoire de la particule ?

(a) une droite ;
(b) un cercle ;
(c) une parabole ;
(d) une hélicoïde.

Éléments de solution : Le champ $\vec{B}$ sera parallèle au vecteur vitesse. Il n'y aura donc pas de contribution de la force magnétique de Lorentz et la trajectoire sera donc rectiligne.

Q7. On cherche à déterminer la demi-vie d'une espèce radioactive. Pour cela, on mesure le nombre de désintégrations vers une autre espèce en une seconde. Pour un instant t_1, on mesure 2 761 désintégrations en une seconde. Pour l'instant $t_2 = t_1 + 1$ j, on mesure 2 280 désintégrations en une seconde.
Quel est le temps de demi-vie de l'espèce considérée ?

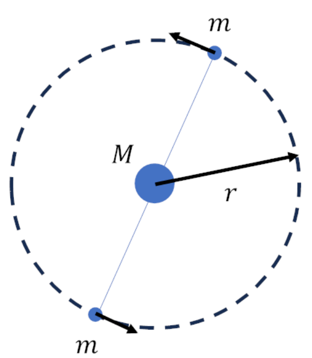
(a) $t_{1/2} = 3,62$ j ;
(b) $t_{1/2} = 6,62$ h ;
(c) $t_{1/2} = 5,22$ j ;
(d) $t_{1/2} = 6,62$ s.

Éléments de solution : Loi de décroissance exponentielle pour le nombre de noyaux radioactifs : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{t_{1/2}}}$. Entre un instant t et un instant $t + \Delta t$, le nombre de désintégration est donné par :

$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t) = N(t)\left(e^{-\lambda \Delta t} - 1\right)$$

On a donc : $\frac{\Delta N(t')}{\Delta N(t)} = \frac{N(t')}{N(t)} = e^{-\lambda(t'-t)}$.
Cela nous permet d'écrire : $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2 (t'-t)}{\ln\left(\frac{\Delta N(t)}{\Delta N(t')}\right)}$. On trouve ici $t_{1/2} = 3,62$ j (réponse (a)).

Q8. On considère deux planètes de masses m assimilées à des points matériels. Leur orbite est circulaire de rayon r, centrée sur une étoile supposée ponctuelle, de masse M. On suppose qu'à chaque instant les 2 planètes ont des positions diamétralement opposées. La période de rotation des planètes sur l'orbite est de la forme $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM'}}$.



Comment peut-on écrire M', intervenant dans la période T, en fonction de M et m ?

(a) $M' = M + m$;
(b) $M' = M + 2m$;
(c) $M' = M + m/2$;
(d) $M' = M + m/4$.

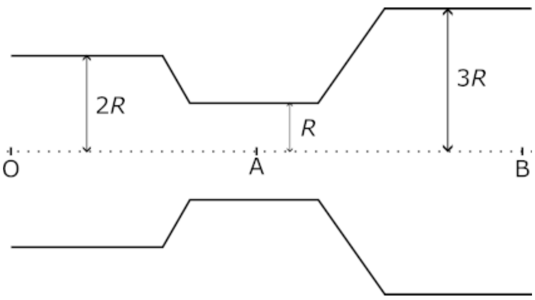
Éléments de solution : Les deux planètes subissent une force égale à $\frac{GmM}{r^2} + \frac{Gmm}{4r^2} = \frac{Gm}{r^2}(M + m/4)$. D'où une masse $M' = M + m/4$.

Q9. Un poisson produit une bulle d'air sphérique, de volume 2,0 mm^3 à une profondeur de 15 m. On suppose que la température est uniforme dans tout l'espace et que la pression atmosphérique est égale à 1,0 bar. On considérera que l'air dans la bulle est un gaz parfait.
On rappelle que la pression hydrostatique au sein d'un fluide de masse volumique ρ à une profondeur h est égale à $P = P_0 + \rho g h$.
Quel est le volume de la bulle quand elle atteint la surface ?

(a) 2 mm^3 ;
(b) 5 mm^3 ;
(c) 30 mm^3 ;
(d) 10 mm^3.

Éléments de solution : La pression hydrostatique est égale à $P = P_0 + \rho g h$.
On note avec un indice 1 les valeurs à 15m de profondeur et avec un indice 2 les valeurs à la surface de l'eau.
On suppose que la bulle se comporte comme un gaz parfait : $V_2 = V_1 \frac{P_1}{P_2}$
AN $V_2 = 2 * \frac{10^5 + 10^3 * 10 * 15}{10^5} \approx 5 \text{ mm}^3$

Q10. On étudie un écoulement de fluide considéré comme incompressible dans un tuyau circulaire horizontal dont la section est variable. On donne ci-dessous le profil de ce tuyau.



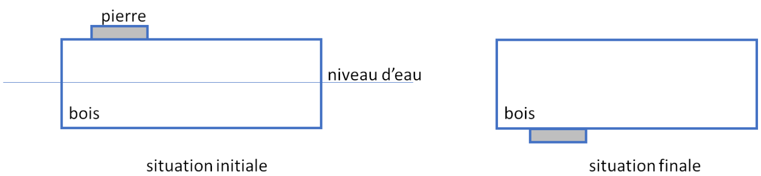
Au point O, on considère que la pression est $P_O = 3,00 \times 10^5$ Pa, la section du tuyau est $S_O = 6,00 \text{ cm}^2$ et la vitesse de l'écoulement est $v_O = 2,0 \times 10^1$ m/min. Le fluide en écoulement a une masse volumique $\rho = 1,00$ kg/L.
On précise que dans ce tuyau, la vitesse de l'écoulement est inversement proportionnelle à la section du tuyau.
Indiquer la valeur de la pression au point A et au point B.

(a) $P_A = 3,0 \times 10^5$ Pa et $P_B = 4,6 \times 10^5$ Pa ;
(b) $P_A = 6,0 \times 10^5$ Pa et $P_B = 1,5 \times 10^5$ Pa ;
(c) $P_A = P_B = P_O = 3,0 \times 10^5$ Pa ;
(d) $P_A = 1,5 \times 10^5$ Pa et $P_B = 4,5 \times 10^5$ Pa.

Éléments de solution : d'après l'équation de Bernoulli et en utilisant la conservation du débit, on peut écrire $P = P_O + \frac{1}{2}\rho v_O^2 \left[1 - \left(\frac{R_O}{R}\right)^4\right]$.

Avec les valeurs de l'énoncé, on trouve que $\frac{1}{2}\rho v_O^2 \approx 55$ Pa $\ll P_O$, le second terme est donc négligeable. On trouve $P_A \approx P_B \approx P_O$.

Q11. On colle une pierre sur un morceau de bois. L'ensemble flotte. On fait l'hypothèse qu'exactement la moitié du morceau de bois est immergée à l'équilibre (figure de gauche).
On retourne l'ensemble (figure de droite) et on se demande quelle fraction du morceau de bois est maintenant immergée.



(a) moins de la moitié ;
(b) plus de la moitié ;
(c) la moitié ;
(d) l'ensemble.

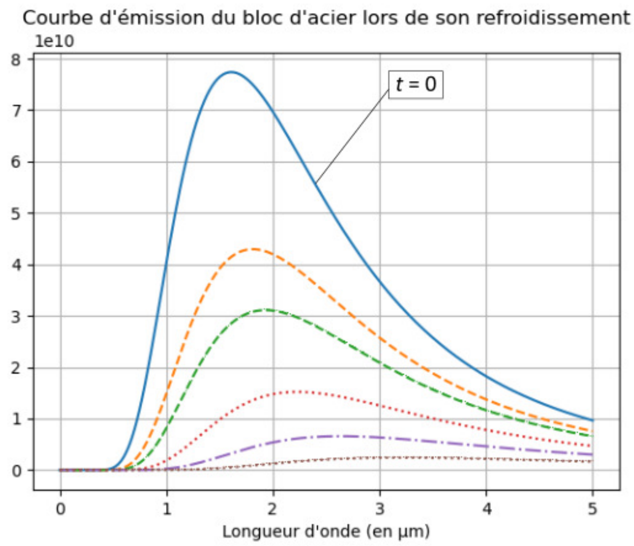
éléments de solution : Le volume immergé du bloc de bois, de volume V, est initialement $V/2$. Le système est à l'équilibre. Le poids est compensé par la poussée d'Archimède.
Le volume immergé doit rester identique car le poids est identique, mais il comprend maintenant la pierre. Ainsi, moins de la moitié du bloc de bois sera maintenant immergée.

Q12. On réalise une expérience avec deux fentes d'Young éclairées uniformément par un laser. On observe la figure d'interférence. Puis, on opacifie l'une des deux fentes, de telle sorte que seule la moitié de l'intensité lumineuse incidente est transmise par cette fente. L'autre fente est inchangée. Que pouvez-vous conclure ?

(a) On n'observe plus de figure d'interférence ;
(b) Les franges sombres le restent et les franges brillantes s'assombrissent ;
(c) Les franges sombres sont plus brillantes et les franges brillantes s'assombrissent ;
(d) La figure d'interférence est inchangée.

Éléments de solution : On utilise la formule des interférences : $I_{\text{max}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ et $I_{\text{min}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$. Initialement : $I = I_1 = I_2$, puis $I = I_1$ et $I_2 = I/2$.
Initialement : $I_{\text{max}} = 4I$ et $I_{\text{min}} = 0$
puis : $I_{\text{max}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} I$ et $I_{\text{min}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} I$
D'où : Les franges sombres sont plus brillantes et les franges brillantes s'assombrissent.

Q13. On chauffe un morceau de fer à une température $T_0 = 1\,800$ K. À cette température, le fer est dit chauffé à blanc, c'est à dire qu'il brille et apparaît presque blanc. Une fois cette température atteinte, on retire le fer du feu et on mesure régulièrement sa courbe de rayonnement (on considère l'arrêt du chauffage comme l'instant $t = 0$) :

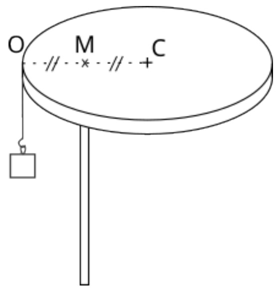


En supposant que le morceau d'acier peut être considéré comme un corps noir, à quelle température approximative arrêtera-t-il de briller ?

(a) $T \approx 950$ K ;
(b) $T \approx 2\,000$ K ;
(c) $T \approx 1\,300$ K ;
(d) $T \approx 700$ K.

Éléments de solution : D'après les graphiques, on peut considérer que c'est à partir de la courbe rouge qu'il n'y a plus d'émission dans le visible (valeur nulle en dessous de 750 nm). Pour cette courbe, le maximum se situe à $\lambda_{max} \sim 2\,200$ nm. On voit également que pour la première courbe (correspondant à $T_0 = 1\,800$ K) on a $\lambda_{0,max} \sim 1\,600$ nm. Or d'après la loi de déplacement de Wien, $\lambda_{max} T =$ cste, on a donc ici $T = \frac{1\,800 \times 1\,600}{2\,200} \approx 1\,300$ K.

Q14. On considère un disque homogène de masse m auquel on accroche un contrepoids de masse m' sur le bord (le point d'attache est nommé O). L'ensemble est placé en équilibre sur un fin cylindre. Le point de contact M est décalé par rapport au centre C tel que CM = OM (voir schéma ci-dessous).

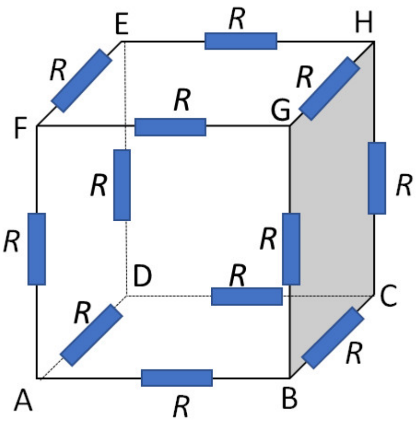


On considère la masse du fil négligeable. Quel doit être la masse m' du contrepoids pour que le disque soit en équilibre ?

(a) $m' = m$;
(b) $m' = \frac{m}{2}$;
(c) On manque de données pour conclure ;
(d) $m' = \frac{m}{4}$.

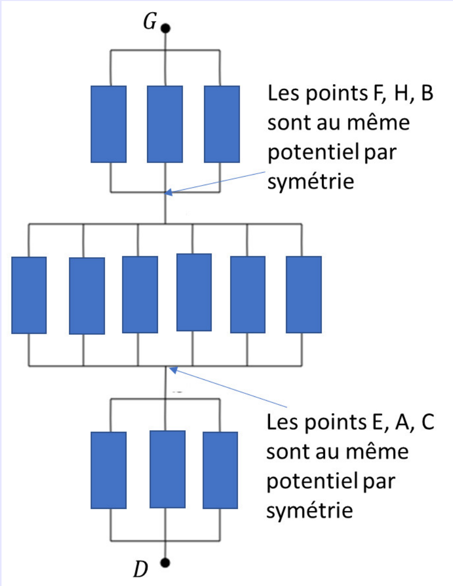
Éléments de solution : On a ici un équilibre si point M est aligné verticalement avec le centre de masse. On peut assimiler le disque en un point matériel de masse m en C, le point M étant équidistant au centre et au bord, le contrepoids doit avoir une masse égale à celle du disque. (réponse (a))

Q15. On considère un cube constitué de résistances. Chaque arête du cube est formée par une résistance de valeur $R = 1,0.10^3\ \Omega$. Quelle est la résistance équivalente entre les points A et H ?



(a) $R = 7,5 \times 10^2\ \Omega$;
(b) $R = 8,3 \times 10^2\ \Omega$;
(c) $R = 5,8 \times 10^2\ \Omega$;
(d) $R = 5,0 \times 10^2\ \Omega$.

éléments de solution : On utilise les symétries du problème



cela donne $R/3 + R/6 + R/3 = 5R/6$.
AN 830 Ohms

Fin de la partie A

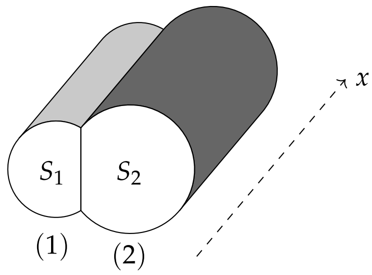
Partie B
Exercice 1
Fils conducteurs accolés

Durée conseillée : 30 min.

En électrocinétique, on a l'habitude de considérer des contacts électriques ponctuels : on considère très souvent des composants dipolaires, connectés au reste du circuit par deux nœuds. On cherche ici à étudier un cas différent, où le contact entre deux conducteurs est continu, comme représenté ci-dessous.

On considère deux fils métalliques parallèles accolés, repérés par leurs indices 1 et 2 et représentés ci-contre. Les sections de ces fils sont respectivement d'aires S_1 et S_2, et l'on supposera ici $S_1 \leq S_2$. On note I_1 et I_2 les intensités des courants qui les parcourent. Des électrons peuvent passer d'un fil à l'autre en traversant la surface qu'ils partagent, si bien que les intensités I_1 et I_2 dépendent de la position longitudinale dans les fils, repérée sur l'axe d'un des fil par la coordonnée x.

Dans cette partie, on cherche à établir les équations couplées vérifiées par les intensités $I_1(x)$ et $I_2(x)$.



Dans tout l'énoncé, le symbole $\propto$ signifie « être proportionnel à ». Ainsi, $X \propto Y$ signifie qu'il existe une constante de proportionnalité k telle que $X = k\,Y$.

On commence par supposer les deux fils indépendants.

Q 1. En s'appuyant éventuellement sur une analogie électrocinétique, justifier qualitativement que la résistance R d'un fil conducteur seul de longueur ℓ est proportionnelle à sa longueur. Par analyse dimensionnelle, déterminer l'expression de la résistance R d'une longueur ℓ de fil de section S et de résistivité r, exprimée en $\Omega{\cdot}\text{m}$.

Deux résistances électriques en série sont équivalentes à un dipôle dont la résistance est égale à la somme des résistances en série. Par analogie, doubler la longueur du tronçon double sa résistance : R est proportionnelle à ℓ. On en déduit, en s'aidant de la dimension de r :

$$R = r\ell/S$$

Q 2. En déduire les expressions des résistances R_1 et R_2 de deux petits tronçons de longueur δx des fils 1 et 2, de même résistivité r, en fonction de leurs sections respectives S_1 et S_2, de r et de δx.

En appliquant le résultat de la question précédente aux résistances R_1 et R_2, on trouve :

$$R_1 = r\delta x/S_1, \quad R_2 = r\delta x/S_2$$

Considérons maintenant ces deux tronçons en contact l'un avec l'autre. Les échanges électriques autorisés par ce contact latéral sont associés à une résistance électrique de contact, notée R_{12}. Cela permet à un courant électrique latéral de s'établir d'un fil à l'autre.

Q 3. Justifier qualitativement que cette résistance de contact est inversement proportionnelle à la longueur de contact entre les tronçons δx de chaque fil.

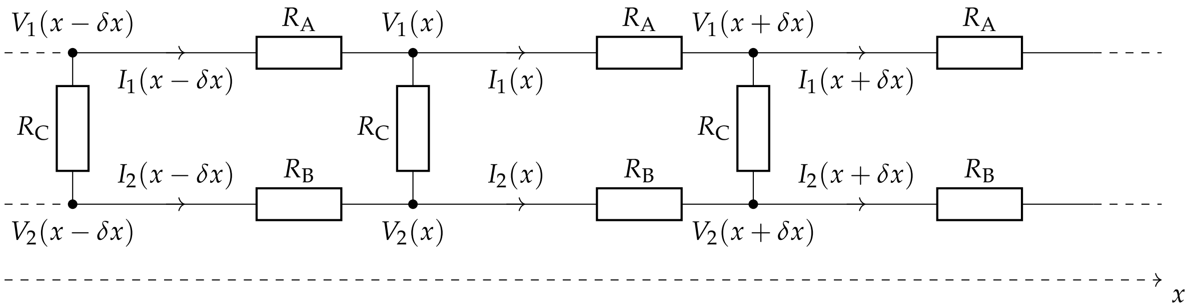
On l'écrira par la suite : $R_{12} = r_c/\delta x$, où r_c est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

Deux résistances électriques en parallèle sont équivalentes à un dipôle dont la résistance est égale à l'inverse de la somme des inverses des résistances en parallèle. Par analogie, doubler la surface de contact divise par deux la résistance correspondante.
On peut également se contenter d'utiliser le résultat de la question précédentes, selon lequel la résistance d'un tronçon de section S est inversement proportionnelle à S.
Puisque que la surface de contact entre les deux tronçons de fils 1 et 2 (qui jouerait ici le rôle de S) est proportionnelle à δx, on en déduit que la résistance de contact doit être inversement proportionnelle à δx.

Nom : Lycée :

Prénom :

Pour modéliser les deux fils dans leur totalité (et pas seulement sur un tronçon), il suffit de mettre bout à bout des tronçons de fils de longueur δx, en série. Le circuit électrique équivalent est indiqué ci-dessous, où les pointillés indiquent une répétition du motif tout du long des deux fils. $V_1(x)$ et $V_2(x)$ sont les potentiels électriques le long des fils.



Q 4. Associer les résistances R_A, R_B et R_C du schéma électrique équivalent aux résistances des questions précédentes.

Les résistances R_A et R_B correspondent aux résistances "intrinsèques" des tronçons (1) et (2) : $R_A = R_1$ et $R_B = R_2$. Les résistances R_C correspondent aux résistances de contact : R_{12}.

Q 5. Montrer que, dans la limite où δx tend vers 0, on a :

$$I_1(x) \propto -\frac{dV_1(x)}{dx}, \quad I_2(x) \propto -\frac{dV_2(x)}{dx}, \tag{1}$$

et exprimer les constantes de proportionnalité en fonction de r, S_1 et S_2.

On applique la loi d'Ohm à la résistance R_A entre x et $x+\delta x$:

$$V_1(x) - V_1(x+\delta x) = R_A I_1(x) = R_1 I_1(x) = \frac{r\delta x}{S_1} I_1(x).$$

On en déduit :

$$I_1(x) = -\frac{S_1}{r}\frac{dV_1}{dx},$$

et, de même :

$$I_2(x) = -\frac{S_2}{r}\frac{dV_2}{dx}.$$

Q 6. Montrer que, dans la limite où δx tend vers 0, on a :

$$\frac{dI_1(x)}{dx} \propto V_2(x) - V_1(x), \quad \frac{dI_2(x)}{dx} \propto V_1(x) - V_2(x), \tag{2}$$

et exprimer les constantes de proportionnalité en fonction des propriétés des deux fils.

En déduire que la somme des intensités $I_1 + I_2$ est constante le long des fils. Était-ce prévisible ?

On applique la loi des nœuds en x au niveau du fil 1, et la loi d'Ohm à la résistance R_C en x :

$$I_1(x-\delta x) = I(x) + \frac{V_1 - V_2}{R_C} = I(x) + \frac{\delta x}{r_c}(V_1 - V_2)\,.$$

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} = \frac{V_2 - V_1}{r_c},$$

et, de même :

$$\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}x} = \frac{V_1 - V_2}{r_c}.$$

À partir de l'équation (2), on constate :

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(I_1 + I_2)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

La somme des intensités $I_1 + I_2$ est donc bien constante le long des fils.

C'était bien prévisible. Les deux fils ne sont reliés à aucun autre éléments (sauf peut-être à leurs extrémités). Tant qu'on ne met pas les fils en contact avec un élément extérieur dans lequel débiter du courant, par conservation de la charge électrique, le courant électrique total ne peut que continuer à se propager le long des fils, et donc se conserver.

Q 7. Finalement, montrer que, dans la limite où δx tend vers 0, on peut mettre les équations d'évolution couplées entre les intensités des courants électriques I_1 et I_2 sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 I_1(x)}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{I_1(x)}{{d_1}^2} - \dfrac{I_2(x)}{{d_2}^2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 I_2(x)}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{I_2(x)}{{d_2}^2} - \dfrac{I_1(x)}{{d_1}^2}, \end{cases} \tag{3}$$

où d_1 et d_2 sont deux constantes à exprimer en fonction de r, r_c, S_1 et S_2.

En combinant les équations précédentes, on obtient le résultat attendu, avec :

$${d_1}^2 = \frac{r_c}{r} S_1, \quad {d_2}^2 = \frac{r_c}{r} S_2.$$

Q 8. On note I_0 la valeur en $x = 0$ de l'intensité du courant total entrant dans les deux fils ($I_0 = I_1(0) + I_2(0)$). Montrer qu'il existe une répartition de ce courant entre les deux fils telle que les échanges électriques entre les deux fils s'annulent (autrement dit, telle que les intensités I_1 et I_2 restent chacune constantes le long du fil). Exprimer les intensités $I_1^{\text{éq}}$ et $I_2^{\text{éq}}$ de ces courants d'équilibre en fonction de I_0, S_1 et S_2.

Le courant électrique se répartit-il de préférence dans le fil de plus grosse section, ou dans celui de plus petite section ? Commenter.

Les intensités I_1 et I_2 peuvent rester constantes le long du fil si $\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}x^2} = 0$. Cela implique :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{I_1}{{d_1}^2} - \dfrac{I_2}{{d_2}^2}, \\ 0 = \dfrac{I_2}{{d_2}^2} - \dfrac{I_1}{{d_1}^2}, \end{cases}$$

soit :

$$I_1 = \frac{{d_1}^2}{{d_2}^2} I_2 = \frac{S_1}{S_2} I_2$$

Si $S_1 \leq S_2$, on a $I_1 \leq I_2$ (et inversement). Le courant électrique se répartit de préférence dans le fil de plus grosse section. C'est intuitif : le courant "préfère" passer dans le fil de moindre résistance.

En écrivant : $I_1 + I_2 = I_0$ (on applique la constance le long du fil de la somme des intensités), on obtient finalement :

$$I_1^{\text{éq}} = \frac{S_1}{S_1 + S_2} I_0, \quad I_2^{\text{éq}} = \frac{S_2}{S_1 + S_2} I_0$$

On connecte les deux bornes du fil (1) à une source idéale de courant, d'intensité I_0. Le fil (2) n'est branché à rien, mais reste en contact latéral avec le fil (1) tout du long. Pour simplifier les prochains calculs, on supposera les fils de même section, de sorte que $d_1 = d_2 = d$. En notant L la longueur des fils, on supposera également les fils suffisamment longs : $L \gg d$.

Q 9. Écrire les conditions limites pour I_1 et I_2 en $x = 0$ et $x = L$. Résoudre le système d'équations différentielles couplées, et montrer que :

$$\begin{cases} I_1(x) \approx \dfrac{I_0}{2} \left[1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x/d} + \mathrm{e}^{\sqrt{2}(x-L)/d} \right] \\ I_2(x) \approx \dfrac{I_0}{2} \left[1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x/d} - \mathrm{e}^{\sqrt{2}(x-L)/d} \right]. \end{cases} \tag{4}$$

En $x = 0$ et en $x = L$, on a :

$$I_1(0) = I_1(L) = I_0, \quad I_2(0) = I_2(L) = 0$$

Plusieurs méthodes sont envisageables pour résoudre le système d'équations. On peut par exemple utiliser la constance de la somme des intensités, et exprimer I_2 en fonction de I_0 et I_1 : $I_2 = I_0 - I_1$, et injecter cette expression dans l'équation pour $\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}x^2}$. On obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{I_1}{d^2} - \frac{I_2}{d^2} = \frac{2}{d^2} I_1 - \frac{I_0}{d^2}$$

On obtient une équation différentielle ordinaire du second ordre linéaire. On peut la résoudre en cherchant d'abord la forme des solutions à l'équation homogène :

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2}{d^2} I_1$$

soit, avec A et B deux constantes :

$$I_1(x) = A\mathrm{e}^{\sqrt{2}x/d} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x/d}$$

Une solution particulière à l'équation différentielle qu'on cherche à résoudre est simplement : $I_1 = I_0/2$.

La solution I_1 au problème est donc de la forme :

$$I_1(x) = \frac{I_0}{2} + A\mathrm{e}^{\sqrt{2}x/d} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x/d}$$

On obtient A et B à l'aide des conditions limites :

$$I_1(0) = I_0 = \frac{I_0}{2} + A + B, \quad I_1(L) = I_0 = \frac{I_0}{2} + A\mathrm{e}^{\sqrt{2}L/d} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{2}L/d} \approx \frac{I_0}{2} + A\mathrm{e}^{\sqrt{2}L/d}$$

où l'on a utilisé $L/d \gg 1$.
D'où :

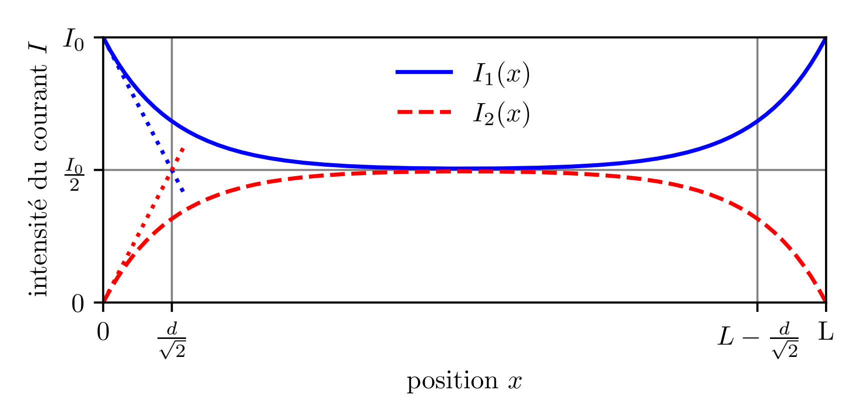
$$A = \frac{I_0}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}L/d}$$

et donc :

$$B = \frac{I_0}{2} - A = \frac{I_0}{2} - \frac{I_0}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}L/d} \approx \frac{I_0}{2}$$

Finalement, on obtient bien l'équation recherchée pour I_1, et on obtient l'équation recherchée pour I_2 en utilisant : $I_2 = I_0 - I_1$.

Q 10. Représenter graphiquement l'allure de ces deux intensités le long du fil, et commenter.



Le courant électrique injecté dans le fil (1) profite rapidement des contacts électriques avec le fil (2) pour se répartir dans les deux fils et réduire ainsi la résistance totale qu'il doit traverser. Ici, puisque l'on a supposé les sections des deux fils égales, le courant se répartit en deux intensités égales. On peut s'attendre à ce que dans le cas général, les répartitions obtenues soient plutôt celles discutées question 7. La distance caractéristique des variations d'intensité pour raccorder les conditions limites aux répartitions dites "d'équilibre" vaut ici $d/\sqrt{2}$.

Fin de la partie B

Nom : Lycée :

Prénom :

Partie C
Exercice 2
Disques protoplanétaires et vents magnétiques

Durée conseillée : 30 minutes.

Les planètes se forment dans des disques de gaz, en orbite autour d'une étoile jeune. Ces disques gazeux sont appelés *disques protoplanétaires* (figure 1). En plus du mouvement de rotation dû à la gravité de l'étoile centrale, la matière du disque tombe radialement en direction de l'étoile : c'est le phénomène d'accrétion. Par ailleurs, il arrive qu'une partie de la matière gazeuse soit éjectée de part et d'autre du disque (figure 2). Plusieurs mécanismes théoriques sont étudiés en astrophysique pour expliquer l'origine du phénomène d'accrétion. L'objectif de cet exercice est d'établir quelques propriétés de l'un de ces modèles, basé sur la présence de vents magnétiques dans le disque.

Les parties 1, 2 et 3 sont entièrement indépendantes les unes des autres. Aucune notion sur les champs magnétiques n'est nécessaire pour répondre aux questions.

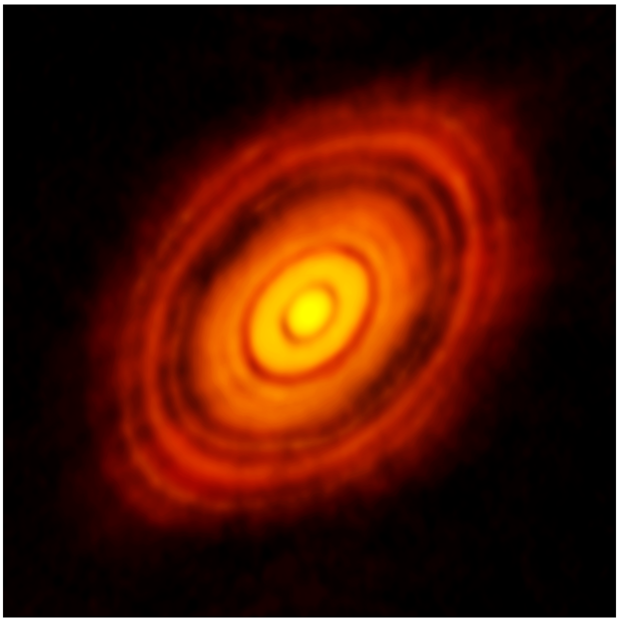


FIGURE 1 – Disque protoplanétaire autour de la source HL Tau. L'étoile au centre est masquée. Crédits : ALMA (ESO/NAOJ/NRAO).

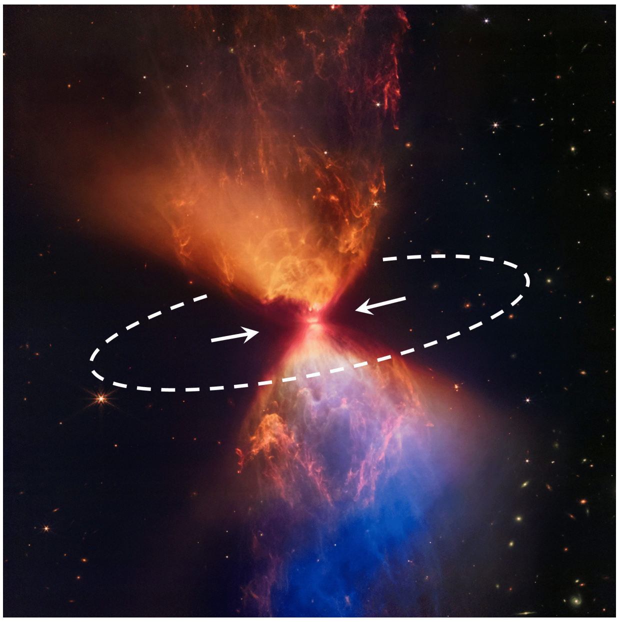
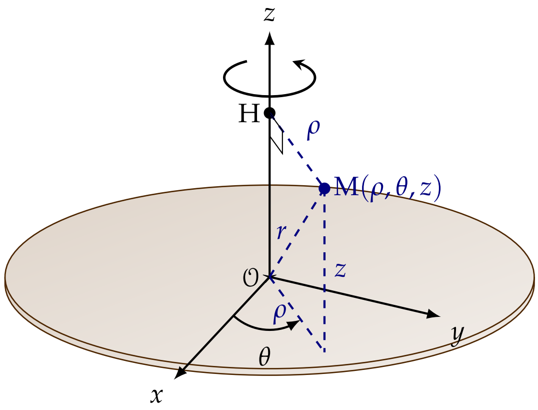


FIGURE 2 – Disque présentant une éjection de matière autour de la source L1527. Vu par la tranche, le disque se situe entre les flèches, dans le plan repéré par les pointillés. Crédits : NASA, ESA, CSA, STScI.

Modélisation et notations

Le schéma ci-contre modélise un disque protoplanétaire en rotation autour d'une étoile de masse $M_\star$, repérée par un point matériel $\mathcal{O}$. On note $(\mathcal{O}z)$ l'axe de rotation (perpendiculaire au disque) et on définit le vecteur unitaire $\vec{e_z}$ ascendant, de sorte que la rotation a lieu dans le sens direct. On note $\mathcal{R}$ le référentiel lié au centre de masse de l'étoile, supposé galiléen, dans lequel le disque est en rotation. On munit le référentiel $\mathcal{R}$ du repère cartésien direct $(\mathcal{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. Le plan $(\mathcal{O}xy)$ est appelé plan médian du disque, et partage le disque de manière symétrique. On suppose le disque fin de sorte qu'on néglige son épaisseur, sa surface se confondant avec son plan médian.



Dans la suite, un point M de l'espace sera repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), où ρ désigne la distance de M à l'axe (Oz), soit $\rho = ||\overrightarrow{\mathrm{HM}}||$ avec H le projeté orthogonal de M sur cet axe. On définit les vecteurs unitaires $\vec{e_\rho} = \overrightarrow{HM}/\rho$ et $\vec{e_\theta}$ pour former la base cylindrique directe $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. On note enfin $r = ||\overrightarrow{\mathcal{O}\mathrm{M}}||$ la distance entre le point M et l'étoile centrale, et on définit le vecteur unitaire associé $\vec{e_r} = \overrightarrow{\mathcal{O}\mathrm{M}}/r$.

1 Disque gazeux en rotation

Dans cette partie, on souhaite déterminer la vitesse de rotation d'un point matériel M_0 appartenant au disque gazeux. Situé à l'altitude $z = 0$, et à la distance ρ_0 de l'étoile centrale, le point M_0 est repéré par ses coordonnées cylindriques $(\rho = \rho_0, \theta, z = 0)$. Il est solidaire du disque en rotation, et décrit donc un mouvement circulaire de rayon ρ_0 autour de l'axe $(\mathcal{O}z)$.

Q1. Exprimer $\vec{F_g}(\mathrm{M}_0)$ la force gravitationnelle exercée par l'étoile centrale sur une masse ponctuelle m_0 située en M_0 en fonction de G (la constante gravitationnelle, donnée en début d'énoncé), $M_\star$, m_0, ρ_0 et $\vec{e_\rho}$ exclusivement.

On applique la définition de la force gravitationnelle pour obtenir

$$\vec{F_g}(\mathrm{M}_0) = -\frac{G M_\star m_0}{||\overrightarrow{\mathcal{O}\mathrm{M}_0}||^3}\overrightarrow{\mathcal{O}\mathrm{M}_0} = -\frac{G M_\star m_0}{\rho_0^2}\vec{e_\rho}$$

Q2. En supposant que la masse m_0 n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle exercée par l'étoile (on néglige l'effet du reste de la matière gazeuse), montrer que la vitesse angulaire du point M_0, notée Ω_0, s'exprime selon $\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{G M_\star}{\rho_0{}^3}}$.

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen lié à l'étoile. On prend comme système (S) le point M_0 de masse m_0, soumis uniquement à la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_g} = -(G\,m_0\,M_\star/\rho_0{}^2)\,\vec{e_\rho}$. En coordonnées polaires $(\rho_0,\,\theta)$ et pour un mouvement circulaire, l'accélération de M est

$$\vec{a}\,(\mathrm{M}) = -\rho_0\,\ddot{\theta}^2\,\vec{e_\rho} + \rho_0\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_\theta}$$

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à (S) dans $\mathcal{R}$ galiléen donne en projections suivant $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$:

$$-m_0\,\rho_0\,\dot{\theta}^2 = -\frac{G\,m_0\,M_\star}{\rho_0{}^2} \qquad \text{et} \qquad \rho_0\,\ddot{\theta} = 0$$

On déduit alors de $\ddot{\theta} = 0$ que $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = \mathrm{C^{te}}$ Par ailleurs, le PFD fournit également l'expression de $\dot{\theta}_0$

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{G\,M_\star}{\rho_0{}^3}}$$

Puisque $\Omega_0 = \dot{\theta}_0$, on obtient le résultat souhaité

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{G\,M_\star}{\rho_0{}^3}}$$

Q3. En déduire l'expression de la période de rotation T_0 du point M_0 en fonction de ρ_0, G et $M_\star$. Nommer la loi ainsi démontrée, dans le cas particulier d'un mouvement circulaire.

On sait que M_0 parcourt un tour de cercle (donc un angle 2π) pendant une période T, ainsi $\dot{\theta}_0 = 2\pi/T$, on en déduit alors que

$$\frac{2\pi}{T} = \Omega_0 = \sqrt{\frac{G\,M_\star}{\rho_0{}^3}}$$

Finalement on obtient le résultat

$$\frac{T^2}{\rho_0{}^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_\star}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler.

2 Éjection de matière en présence d'un vent magnétique

Dans cette partie, le disque protoplanétaire possède un vent d'origine magnétique, qui permet à une partie de la matière de s'échapper du disque, entraînée par le vent. On admet que la matière ainsi éjectée suit les lignes de champ magnétiques, assimilables à des droites à proximité de la surface du disque. Le schéma en figure 3 représente l'une de ces lignes de champ, partant de la surface du disque, et formant un angle α par rapport à l'axe (z) (ou par rapport à l'axe $(\mathrm{M}_0 z)$)[1]. La ligne est ancrée dans le disque en M_0, de coordonnées cylindriques $(\rho_0, \theta, 0)$, situé à une distance ρ_0 de l'étoile centrale et est en permanence contenue dans le plan $(\mathrm{M}\rho z)$.

On considère une masse ponctuelle m de gaz éjectée suivant cette ligne de champ magnétique, repérée par un point M de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). On note $\vec{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}\mathrm{M}}$ la distance entre le point M et l'étoile centrale. On introduit également la distance $s = \|\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\|$ ainsi que le vecteur unitaire associé $\vec{e_s} = \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}/s$. On admettra que le point M est astreint à se déplacer suivant la ligne de champ magnétique, contenue dans le plan tournant $(\vec{e_\rho}, \vec{e_z})$. Autrement dit, à tout instant, les points M_0 et M sont repérés par la même position angulaire θ.

Q4. Placer les distances ρ_0, ρ et r sur le schéma de la figure 3.

1. Le problème de l'inclinaison des lignes de champ peut être retrouvé dans le cours « Physical Processes in Protoplanetary Disks » de Philip J. Armitage, page 49. Il s'agit d'une approche simplifiée du mécanisme dit de Blandford & Payne.

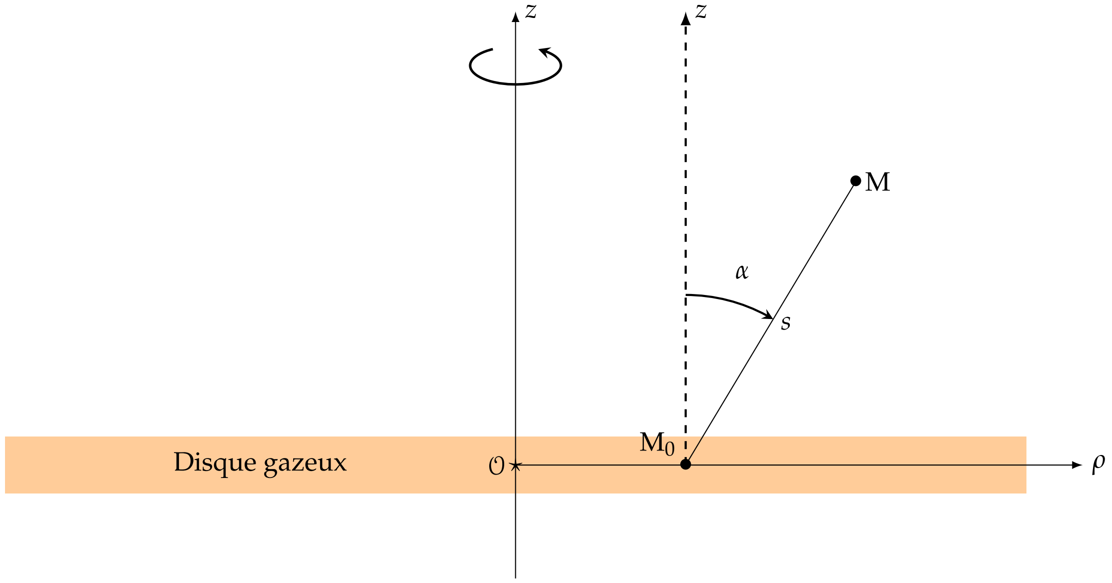
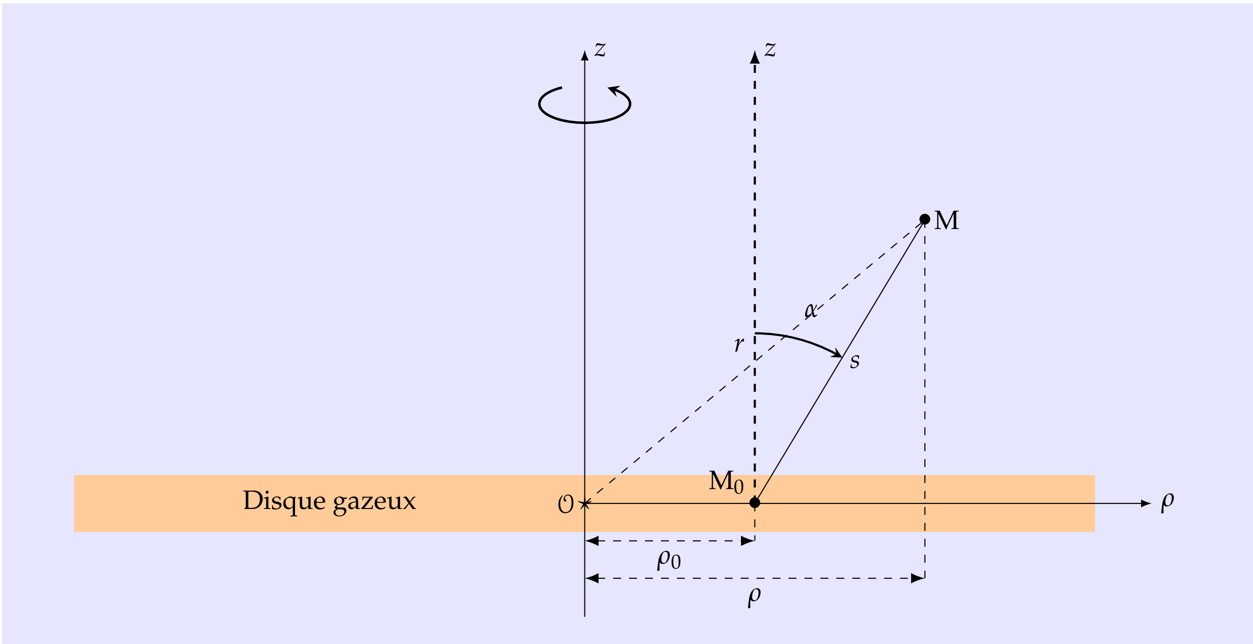


FIGURE 3 – Schéma du disque (représenté par la tranche) avec une ligne de champ magnétique reliant les points M_0 et M.



2.1 Énergie potentielle gravitationnelle

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à l'étoile située en $\mathcal{O}$, supposé galiléen. On note $\overrightarrow{F_g}(\mathrm{M})$ la force gravitationnelle exercée par l'étoile centrale sur la masse m de gaz située en M. On définit l'énergie potentielle gravitationnelle de cette masse m située en M, notée $E_g(r)$, telle que :

$$\overrightarrow{F_g}(\mathrm{M}) = -\frac{\mathrm{d}E_g(r)}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r} \qquad \text{avec} \qquad E_g(r) \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

Q5. Exprimer $E_g(r)$ en fonction de m, $M_\star$, G et r uniquement.

On projette l'équation définissant E_g selon $\overrightarrow{e_r}$ et on simplifie par m pour obtenir

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{g}}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{G M_\star\, m}{r^2}$$

On obtient E_g en calculant une primitive de l'expression précédente soit

$$E_\mathrm{g}(r) = -\frac{G M_\star\, m}{r} + \mathrm{C}^\mathrm{te}$$

Or l'énoncé indique $E_\mathrm{g}(r) \xrightarrow[+\infty]{} 0$, si bien que $\mathrm{C}^\mathrm{te} = 0$ d'où

$$E_\mathrm{g}(r) = -\frac{G M_\star\, m}{r}$$

2.2 Étude dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ lié au disque

On se place désormais dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ lié au point d'ancrage M_0. Solidaire du disque gazeux, le référentiel $\mathcal{R}_0$ effectue une rotation circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$, à la vitesse angulaire $\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{G M_\star}{{\rho_0}^3}}$.

Q6. Le référentiel $\mathcal{R}_0$ est-il galiléen ? Justifier votre réponse en deux lignes au maximum.

$\mathcal{R}_0$ n'est ni au repos, ni en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen si bien que $\mathcal{R}_0$ n'est pas galiléen.

On définit l'accélération d'inertie d'entraînement, notée $\overrightarrow{a_\mathrm{ie}}$, comme l'accélération qu'aurait le point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'il était fixe dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Q7. Calculer $\overrightarrow{a_\mathrm{ie}}(\mathrm{M})$, l'accélération d'inertie d'entraînement du point M. On exprimera $\overrightarrow{a_\mathrm{ie}}$ en fonction de ρ, Ω_0 et $\overrightarrow{e_\rho}$ uniquement.

On suppose pour cette question que le point M est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}_0$. Ce dernier étant animé d'un mouvement de rotation uniforme à Ω_0 par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen, on déduit que l'accélération du point M se calcule en étudiant le mouvement circulaire uniforme de M autour de l'axe $(\mathcal{O}z)$. On obtient alors

$$\overrightarrow{a_\mathrm{ie}} = -\rho\, \Omega_0^2\, \overrightarrow{e_\rho}$$

Par analogie avec l'énergie potentielle gravitationnelle $E_\mathrm{g}(r)$, on définit l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement, notée $E_\mathrm{ie}(\rho)$ telle que :

$$\vec{f}_\mathrm{ie} = -m\,\overrightarrow{a_\mathrm{ie}} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{ie}}{\mathrm{d}\rho}\,\overrightarrow{e_\rho} \qquad \text{avec} \qquad E_\mathrm{ie}(0) = 0\,.$$

La force $\vec{f}_\mathrm{ie}$ dérivant de l'énergie potentielle E_ie est la force d'inertie d'entraînement, qui dans ce cas prend la forme d'une force centrifuge qui tend à éloigner la matière de son axe de rotation.

Q8. Déterminer $E_\mathrm{ie}(\rho)$ en fonction de m, Ω_0 et ρ. En déduire que l'énergie potentielle totale $E_\mathrm{tot} = E_g + E_\mathrm{ie}$ de la masse m s'écrit comme suit :

$$E_\mathrm{tot}(r,\rho) = -\frac{G M_\star\, m}{r} - \frac{1}{2}\, m\, \rho^2\, \Omega_0^2\,.$$

On calcule E_{ie}. La définition proposée projetée selon $\vec{e_\rho}$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{ie}}}{\mathrm{d}\rho} = -m\,\Omega_0^2\,\rho$$

Un calcul de primitive permet alors d'écrire que

$$E_{\text{ie}} = -\frac{1}{2}\,m\,\rho^2\,\Omega_0^2 + K$$

avec K une constante d'intégration. Par ailleurs, $E_{\text{ie}}(0) = 0$ fournit $K = 0$, si bien que

$$E_{\text{ie}} = -\frac{\Omega_0^2\,\rho^2}{2}$$

La somme de E_{g} et de E_{ie} s'écrit alors selon

$$E_{\text{tot}}(r,\,\rho) = -\frac{G\,M_\star\,m}{r} - \frac{1}{2}\,m\,\rho^2\,\Omega_0^2$$

2.3 Condition de stabilité et éjection de matière

Q9. Exprimer r^2 en fonction de ρ_0, s et α uniquement.

La relation de Chasles permet d'écrire que

$$\overrightarrow{\mathcal{O}\mathrm{M}} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + \overrightarrow{PM}$$

Ainsi, en utilisant les notations fournies

$$r\vec{e_r} = \rho_0\vec{e_\rho} + s\vec{e_s}$$

On en déduit $r^2 = (\rho_0\vec{e_\rho} + s\vec{e_s})\cdot(\rho_0\vec{e_\rho} + s\vec{e_s}) = s^2 + \rho_0^2 + 2\,s\,\rho_0\,\cos\left(\widehat{\vec{e_\rho},\vec{e_s}}\right)$.
Or $\cos\left(\widehat{\vec{e_\rho},\vec{e_s}}\right) = \cos(\alpha - \pi/2) = \sin\alpha$, d'où finalement

$$r^2 = s^2 + \rho_0^2 + 2\,s\,\rho_0\,\sin\alpha$$

Q10. Exprimer par ailleurs l'altitude z du point M en fonction de s et α. En déduire l'expression de ρ^2, de nouveau en fonction de ρ_0, s et α.

Par définition :

$$z = s\cos\alpha$$

Par ailleurs, en notant H le projeté orthogonal de M sur le plan du disque, on remarque que le triangle $\mathcal{O}HM$ est rectangle en H, si bien que $\rho^2 = r^2 - z^2$ soit d'après la question précédente

$$\rho^2 = (\rho_0 + s\,\sin\alpha)^2$$

Q11. Exprimer $E_{\text{tot}}(s)$ l'énergie potentielle totale de la masse m en fonction de la variable s, en ne faisant plus intervenir r et ρ. Les paramètres ρ_0 et α étant fixés, à quelle condition sur la dérivée première de $E_{\text{tot}}(s)$ la masse m est-elle à l'équilibre ? Indiquer les deux forces en compétition et décrire qualitativement cet équilibre.

L'expression de $E_{\text{tot}}(s)$ est donnée, d'après ce qui précède, par

$$E_{\text{tot}}(s) = -\frac{G\,M_\star\,m}{(s^2 + 2\,s\rho_0\,\sin\alpha + \rho_0^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} m\,\Omega_0^2 (\rho_0 + s\,\sin\alpha)^2$$

On obtient un équilibre dès lors que $\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}s} = 0$. On a alors compensation entre la force centrifuge et la force gravitationnelle. La force centrifuge tend à éloigner la matière de son axe de rotation (comme indiqué par l'énoncé) si bien qu'elle tend à éjecter la matière le long de la ligne de champ magnétique à laquelle la matière est attachée. La gravité, en revanche, tend à rapprocher la matière de l'étoile, c'est-à-dire à la faire redescendre en direction du disque, toujours le long de la ligne de champ magnétique.

On admet que cet équilibre est instable dès lors que $\dfrac{\mathrm{d}^2E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}s^2} < 0$. Lorsque ce critère est réalisé, une masse m initialement située à la surface du disque en $s = 0$ est alors éjectée le long de la ligne de champ magnétique. On fournit :

$$\frac{1}{G\,M_\star\,m}\frac{\mathrm{d}^2E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}s^2}(s) = (s^2 + 2\,s\,\rho_0\,\sin\alpha + \rho_0^2)^{-3/2} - 3\,(s + \rho_0\,\sin\alpha)^2\,(s^2 + 2\,s\,\rho_0\,\sin\alpha + \rho_0^2)^{-5/2} - \frac{\Omega_0^2}{G\,M_\star}\,\sin^2\alpha$$

Q12. Montrer que l'éjection de la masse m située en $s = 0$ survient à condition que la ligne de champ soit inclinée au-delà d'une valeur critique $\alpha_c = 30\ °$.

L'équilibre est instable lorsque

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}s^2}(s) < 0$$

On rappelle que $\Omega_0^2 = G\,M_\star/\rho_0^3$ puis on utilise la dérivée seconde de E_{tot}

$$\frac{1}{G\,M_\star\,m}\frac{\mathrm{d}^2E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}s^2}(s) =$$
$$(s^2 + 2\,s\,\rho_0\,\sin\alpha + \rho_0^2)^{-3/2} - 3\,(s + \rho_0\,\sin\alpha)^2\,(s^2 + 2\,s\,\rho_0\,\sin\alpha + \rho_0^2)^{-5/2} - \frac{\Omega_0^2}{G\,M_\star}\,\sin^2\alpha$$

On évalue cette dérivée en $s = 0$, ce qui donne

$$\frac{1}{G\,M_\star\,m}\frac{\mathrm{d}^2E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}s^2}(0) = \rho_0^{-3}\,(1 - 4\,\sin^2\alpha)$$

La condition sur l'équilibre implique alors l'existence d'un cas critique avec α_c tel que

$$\frac{\mathrm{d}^2E_{\text{tot}}}{\mathrm{d}s^2}(s = 0) = 0$$

On trouve alors que

$$1 - 4\,\sin^2\alpha_c = 0 \qquad \text{soit} \qquad \sin\alpha_c = \frac{1}{2}$$

On en déduit finalement que $\alpha_c = \pi/6 = 30\ °$.

3 Magnétisation du disque

On considère un disque protoplanétaire dont la matière est assimilée à un gaz parfait à température $T_0 = 10$ K uniforme dans tout le disque. P désigne la pression de ce gaz et μ sa masse volumique, toutes deux sont également supposées uniformes. Une valeur typique de μ est $\mu = 1{,}4 \times 10^{20}\, m_p\, \mathrm{m}^{-3}$ où m_p désigne la masse du proton. La masse moyenne d'une particule de ce gaz est notée $\overline{m}$ et vaut $\overline{m} = 2{,}314\, m_p$. La vitesse du son dans ce milieu, notée c_s, est donnée par

$$c_s = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$$

Q13. Montrer que c_s est bien homogène à une vitesse.

On note les dimensions entre crochets. $[F]$ est ainsi la dimension d'une force. Remarquons que $[P] = [F]/\mathsf{L}^2 = \mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-2}}$. Ainsi :

$$\frac{[P]}{[\rho]} = \frac{\mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-2}}}{\mathsf{M\,L^{-3}}} = \frac{\mathsf{T^{-2}}}{\mathsf{L^{-2}}} = [\text{vitesse}]^2$$

Conséquemment : $[c_s] = [\text{vitesse}]$.

Q14. Montrer que $c_s = \sqrt{\dfrac{k_B\,T_0}{\overline{m}}}$.

La matière du disque est assimilée à un gaz parfait. Avec $n = N/\mathcal{N}_A$, N désignant le nombre de particules de gaz occupant un volume V, on obtient :

$$P = \frac{n\,R\,T_0}{V} = \frac{N\,R\,T_0}{\mathcal{N}_A\,V} = \frac{\overline{m}\,N\,k_B\,T_0}{\overline{m}\,V} = \frac{\mu\,k_B\,T_0}{\overline{m}}$$

où on a utilisé la relation $R = \mathcal{N}_A\,k_B$. Finalement

$$c_s = \sqrt{k_B\,T_0/\overline{m}}$$

On introduit le nombre sans dimension β défini par

$$\beta = \frac{2\mu_0\,P}{B^2}$$

où B désigne le champ magnétique traversant le disque et μ_0 la perméabilité du vide (sa valeur est donnée dans la page regroupant les constantes physiques).

Q15. Justifier que la grandeur P_B définie par $P_B = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ est homogène à une pression.

β est sans dimension, or $\beta = P/P_B$, par conséquent, P_B est nécessairement homogène à une pression.

Q16. Dans les modèles de disques présentant un vent magnétique, une valeur typique pour β est $\beta = 10^4$. Faire l'application numérique pour le champ magnétique qui s'exprime en teslas (symbole : T) dans le système international d'unités.

D'une part, on a $\beta = 10^4$, d'autre part

$$\beta = \frac{2\,\mu_0\,\mu\,{c_s}^2}{B^2} = \frac{2\,\mu_0}{B^2}\,\mu\,\frac{k_B\,T_0}{\overline{m}} = \frac{2\,\mu_0 \times 1,4\times 10^{20}\,k_B\,T_0}{2,314\,B^2}$$

On obtient alors

$$B^2 = \frac{2\times 1,257\times 10^{-6}\times 1,4\times 10^{20}\times 1,381\times 10^{-23}\times 10}{10^4\times 2,314}$$

Ce qui donne $B^2 = 2,1\times 10^{-12}$ puis $B = 1,4\times 10^{-6}$ T.

Fin de la partie C

Nom : Lycée :

Prénom :

Partie D
Problème 1
Le thermophone à tube à essai

Durée conseillée : 1 heure.

La thermoacoustique est l'étude des phénomènes résultant de l'interaction entre un flux de chaleur et une onde acoustique. Bien que cette thématique de recherche soit peu connue du grand public, les manifestations de l'effet thermoacoustique sont en fait observées depuis longtemps. Les souffleurs de verre constatent par exemple depuis des siècles que leurs tubes produisent parfois de violents sifflements.

Dans ce problème, on étudie la production d'un son musical grâce à l'effet thermoacoustique, par l'introduction d'une source de chaleur localisée dans un tuyau sonore. Le premier instrument de musique fonctionnant sur ce principe était un orgue à flammes construit par Kastner en 1873, qu'il appela « pyrophone ». Le pyrophone fut perfectionné dans les années 2000 par Jacques Rémus, musicien et plasticien, qui mit au point le « thermophone », dans lequel il remplaça les flammes par des résistances électriques chauffantes. Un thermophone est formé d'un tuyau en acier doux, verre ou aluminium, qui est ouvert au moins à l'une de ses extrémités pour rendre le son audible. À l'intérieur du tuyau, on place un *stack* solide (empilement de plaques ou grilles métalliques, ou réseau de canaux rectangulaires en céramique), et on le chauffe.

Lorsque la température de l'extrémité chaude devient suffisamment élevée, le thermophone se met à chanter ... Il génère un son particulier, puissant et très pur spectralement.

Ce problème s'appuie sur la vidéo « *Do it yourself : Moteur thermoacoustique à base de paille de fer* », publiée par l'école universitaire de recherche *Institut d'Acoustique Graduate School*, à l'adresse youtu.be/owbjLWrC86g. Il y est présenté une méthode expérimentale pour construire un thermophone de façon très simple, en utilisant uniquement un tube à essai, de la paille de fer et une lampe à alcool. Une capture d'écran du dispositif expérimental de la vidéo est donné sur la figure 1.

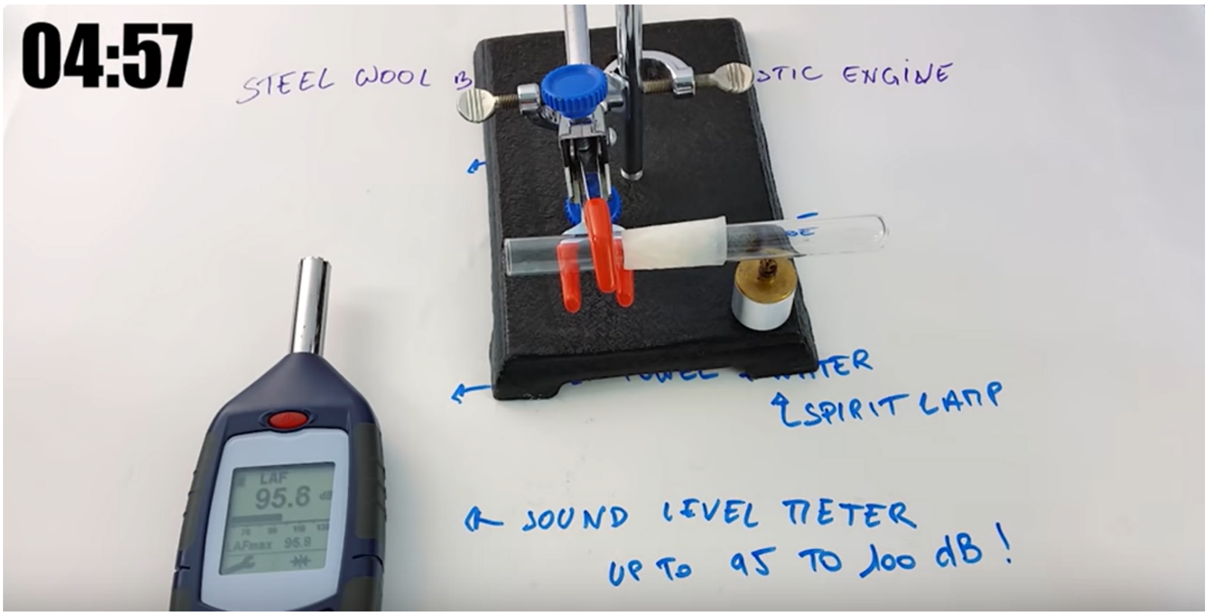


FIGURE 1 – **Construction d'un thermophone artisanal :** *un tube à essai rempli d'un milieu poreux à base de paille de fer est chauffé à son extrémité par une lampe à alcool. Le niveau d'intensité sonore du son produit atteint environ* 96 dB.

L'objectif de ce problème est d'estimer l'écart de température minimal qu'il est nécessaire d'imposer entre les deux extrémités de la paille de fer pour produire un son.

1 Onde acoustique dans un tube à essai

Tout comme une corde de guitare ou de piano, la colonne d'air comprise dans le tuyau d'un instrument à vent peut entrer en vibration pour certaines fréquences particulières. L'objectif de cette partie est d'étudier les vibrations de la colonne d'air dans un tube à essai, comme celui de la vidéo, indépendamment des causes qui leur donnent naissance.

Le tube à essai est assimilé à une enceinte cylindrique indéformable de longueur $L = 14\,\text{cm}$, de section d'aire S et dont l'axe de symétrie est selon la direction de l'axe (Ox). L'extrémité fermée du tube est située à l'abscisse $x = 0$ et son extrémité ouverte à $x = L$. Au repos, c'est-à-dire en l'absence d'onde sonore, la température, la pression et la masse volumique de l'air dans le tube sont uniformes notées respectivement T_0, P_0 et ρ_0.

Par ailleurs, on néglige tout effet de la pesanteur, ainsi que toutes les interactions visqueuses entre le gaz et les parois du tube de sorte que le mouvement du gaz se fait uniquement dans la direction x. Les propriétés du gaz peuvent alors être considérées uniformes dans les directions transverses y et z à tout instant.

Pour décrire les vibrations de la colonne d'air dans le tube à essai, on la « découpe » en portions mésoscopiques qu'on appelle « particules de fluide ». Le volume de ces particules est suffisamment grand par rapport à l'échelle microscopique pour qu'on puisse y définir une pression, une température et une masse volumique. Mais il est également suffisamment petit par rapport à l'échelle macroscopique pour pouvoir considérer que toutes ces grandeurs y sont uniformes.

Le système étudié à partir de maintenant est une particule de fluide dans le tube (figure 2), d'épaisseur $\mathrm{d}x \ll L$, de surface $\mathrm{d}S$ et de volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}S$. En l'absence de viscosité, cette particule est astreinte à se déplacer longitudinalement, sa position étant repéré par l'abscisse $x(t)$ de sa face gauche. Quand une onde stationnaire se forme dans le tube, la particule oscille autour de sa position d'équilibre notée x_0. Ainsi

$$x(t) = x_0 + \xi(x,t)\,,$$

avec $\xi(x,t)$ le « déplacement longitudinal » de la particule qu'on admet être de la forme

$$\xi(x,t) = \xi_\mathrm{m} \sin(kx)\cos(\omega t)\,,$$

où ξ_m est l'amplitude des oscillations acoustiques, $\omega = 2\pi f$ la pulsation de l'onde et f sa fréquence, $k = 2\pi/\lambda$ son nombre d'onde et λ sa longueur d'onde.

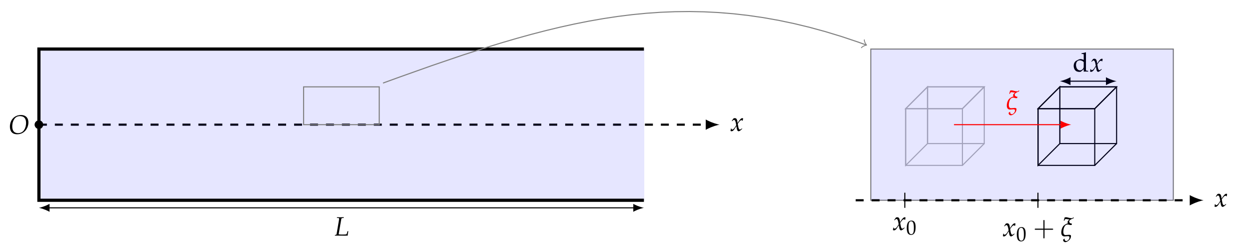


FIGURE 2 – Schéma de la situation à l'échelle macroscopique (à gauche) et à l'échelle mésoscopique (à droite)

Q 1. Rappeler la relation liant la célérité c d'une onde, sa fréquence f et sa longueur d'onde λ. En déduire la relation liant ω et k.

On a

$$\boxed{c = \lambda \times f} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi f\,.$$

Donc

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k}}\,.$$

En présence de l'onde sonore, on peut montrer que la pression et la température de la particule de fluide à l'abscisse x et à l'instant t s'écrivent en première approximation

$$\begin{cases} P(x,t) = P_0 + p(x,t) \quad \text{avec} \quad p(x,t) = -p_\mathrm{m}\cos(kx)\cos(\omega t) \\ T(x,t) = T_0 + \tau(x,t) \quad \text{avec} \quad \tau(x,t) = -\tau_\mathrm{m}\cos(kx)\cos(\omega t) \end{cases}$$

où $p_\mathrm{m} \ll P_0$ est l'amplitude de la surpression acoustique associée à l'onde sonore et $\tau_\mathrm{m} \ll T_0$ l'amplitude de la variation de température du fluide. La masse volumique de la particule de fluide s'écrit également sous la forme

$$\rho(x,t) = \rho_0 - \varrho_\mathrm{m} \cos(kx)\cos(\omega t)\,.$$

Toutefois, il est possible de montrer que $\varrho_\mathrm{m}/\rho_0 \ll p_\mathrm{m}/P_0$ et $\varrho_\mathrm{m}/\rho_0 \ll \tau_\mathrm{m}/T_0$. En première approximation, on considèrera donc que la masse volumique de la particule de fluide reste constante et égale à ρ_0.

On admet que les propriétés de propagation l'onde sonore dans l'air du tube à essai permettent d'écrire la relation suivante

$$\tau_\mathrm{m} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{p_\mathrm{m}}{P_0}T_0\,,$$

avec $\gamma = 1{,}4$ le coefficient adiabatique de l'air assimilé à un gaz parfait diatomique.

Q 2. À l'instant t, exprimer la force de pression $\vec{F_\mathrm{g}}$ exercée par la particule de fluide située juste à gauche (d'abscisse légèrement inférieure à x) de la particule de fluide étudiée. Faire de même pour la force de pression $\vec{F_\mathrm{d}}$ exercée par la particule de fluide située juste à droite (d'abscisse légèrement supérieure à $x + \mathrm{d}x$).

La force exercée par la particule située à gauche est dirigée vers la droite. À l'instant t, on a alors

$$\boxed{\vec{F_\mathrm{g}} = P\,(x,t)\,\mathrm{d}S\,\vec{e_x}}\,.$$

De même pour la force exercée par la particule située à droite

$$\boxed{\vec{F_\mathrm{d}} = -P\,(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}S\,\vec{e_x}}\,.$$

On suppose que le référentiel d'étude est galiléen et on note $\mathrm{d}m = \rho_0\,\mathrm{d}V$ la masse de la particule de fluide.

Q 3. Exploiter la seconde loi de Newton pour montrer que

$$\rho_0\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,.$$

On applique la seconde loi de Newton à la particule de fluide, de masse $\mathrm{d}m$

$$\mathrm{d}m\,\vec{a} = \vec{F_\mathrm{g}} + \vec{F_\mathrm{d}} \quad \Rightarrow \quad \rho_0\,\mathrm{d}V\,\frac{\mathrm{d}^2OM}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e_x} = (P\,(x,t) - P\,(x+\mathrm{d}x,t))\,\mathrm{d}S\,\vec{e_x}\,.$$

Or

$$OM = x_0 + \xi(x,t) \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}^2OM}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

De plus, par définition de la dérivée

$$\frac{P(x+\,\mathrm{d}x,t) - P(x,t)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x,t) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x,t)\,,$$

ainsi

$$\rho_0\mathrm{d}V\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}\vec{e_x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}S\vec{e_x}\,.$$

Avec $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$, on obtient bien finalement la proposition de l'énoncé

$$\boxed{\rho_0\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}\,.$$

Q 4. En déduire l'expression de p_m en fonction de c, ω, ρ_0 et ξ_m.

On utilise l'expression qui vient d'être établie

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 \rho_0 \xi_\mathrm{m} \sin(kx)\cos(\omega t) = -k p_\mathrm{m} \sin(kx)\cos(\omega t)\,,$$

pour trouver

$$p_\mathrm{m} = \frac{\omega^2}{k}\rho_0\xi_\mathrm{m}\,,$$

soit, avec $k = \omega/c$,

$$\boxed{p_\mathrm{m} = c\omega\rho_0\xi_\mathrm{m}}\,.$$

Q 5. Montrer, en admettant que la surpression acoustique est nulle à l'extrémité ouverte du tube, que le nombre d'onde k est quantifié et que ses valeurs discrètes possibles sont données par

$$k = (2n+1)\frac{\pi}{2L}\,.$$

La condition $p(x = L, t) = 0$ impose

$$p(x = L, t) = 0 \;\; \forall t \quad \Rightarrow \quad \cos(kL) = 0\,,$$

soit

$$kL = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = (2n+1)\frac{\pi}{2L}}\,.$$

On donne ci-dessous, figure 3, le spectre en fréquences du son émis par le thermophone de la vidéo introductive.

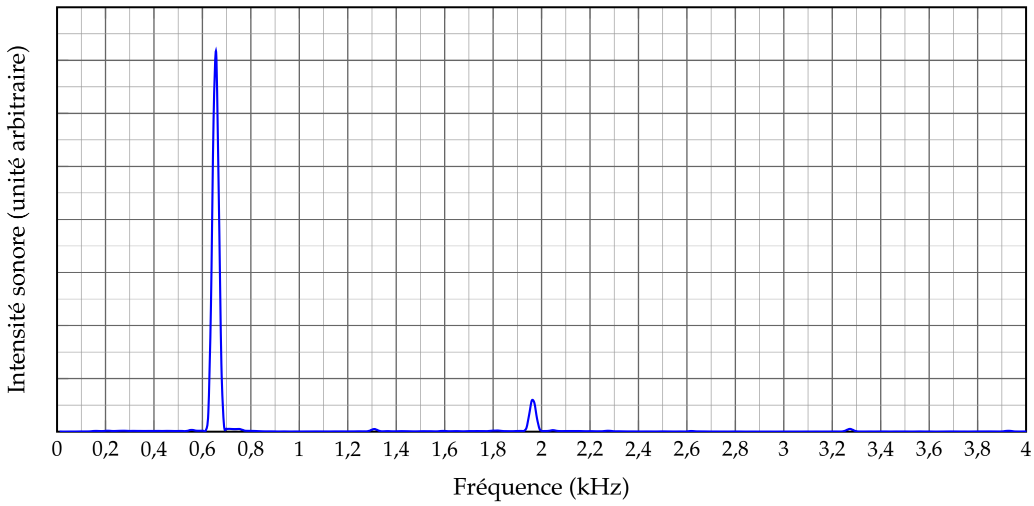


FIGURE 3 – Spectre en fréquences du son produit par le thermophone de la vidéo introductive

Q 6. Analyser le spectre en fréquences du son produit par le thermophone.

Le spectre proposé présente deux fréquences visibles à $f_1 = 650\,\text{Hz}$ et $f_3 = 1{,}95\,\text{kHz}$. L'intensité de la première harmonique est environ 8 fois plus importante que l'intensité de la seconde : on peut donc affirmer que le son est quasiment pur.

Q 7. Montrer, à partir des réponses aux questions 1 et 6, que la fréquence du son produit par le thermophone de la vidéo introductive correspond au mode propre fondamental de vibration du tube. On donne la valeur de la célérité du son dans l'air à une température de 20 °C, sous pression atmosphérique : $c = 340\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Commenter l'écart éventuellement constaté avec la mesure expérimentale.

La fréquence f_0 du mode propre fondamental est telle que

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{ck_0}{2\pi} \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\pi}{2L}\,,$$

soit

$$\boxed{f_0 = \frac{c}{4L}} \quad \boxed{\texttt{AN}}\ f_0 = 0{,}61\,\text{kHz}\,.$$

Le résultat du calcul correspond approximativement à la fréquence du son mesurée sur le spectre à la question précédente. On peut donc affirmer que le son produit par le thermophone correspond au mode propre fondamental du tube.

Pour expliquer l'écart constaté avec la valeur expérimentale, on peut dire que la célérité du son dans l'air augmente avec la température ; la température moyenne de l'air dans le dispositif de la vidéo est bien supérieure aux températures usuelles, d'où une fréquence constatée plus grande. De plus, le tube à essai n'est pas rigoureusement cylindrique car son extrémité est arrondie.

Le sonomètre de la vidéo introductive mesure un niveau d'intensité sonore maximal d'environ $L = 96\,\mathrm{dB}$ (voir figure 1). C'est un niveau sonore important, comparable à celui produit par un marteau-piqueur à 10 mètres de distance. Niveau d'intensité sonore et surpression acoustique sont liés par la relation

$$L = 20\,\log\left(\frac{p_\mathrm{m}}{p_0}\right),$$

où $p_0 = 20\,\mu\mathrm{Pa}$ est la surpression acoustique au seuil d'audibilité de l'oreille humaine.

Q 8. Estimer la valeur de la surpression acoustique p_m dans le tube à essai de la vidéo introductive.

$$L = 20\,\log\left(\frac{p_\mathrm{m}}{p_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_\mathrm{m} = p_0\,10^{L/20}} \quad \boxed{\texttt{AN}}\ p_\mathrm{m} \approx 1\,\mathrm{Pa}\,.$$

Q 9. En déduire un ordre de grandeur de l'amplitude du déplacement acoustique ξ_m et de l'amplitude des oscillations de température τ_m dans le tube à essai de la vidéo. Commenter les valeurs obtenues. On donne les ordres de grandeur $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, $P_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$ et $\rho_0 = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Pour trouver l'amplitude de la variation de température, on utilise la loi fournie page 3.

$$\boxed{\tau_\mathrm{m} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{p_\mathrm{m}}{P_0}T_0} \quad \boxed{\texttt{AN}}\ \tau_\mathrm{m} \approx 10^{-3}\,\mathrm{K}\,.$$

Pour trouver l'amplitude du déplacement, on utilise la loi établie à la question 4

$$p_\mathrm{m} = c\omega\rho_0\xi_\mathrm{m} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_\mathrm{m} = \frac{p_\mathrm{m}}{c\omega\rho_0}$$

soit

$$\boxed{\xi_\mathrm{m} = \frac{p_\mathrm{m}}{2\pi f c\rho_0}} \quad \boxed{\texttt{AN}}\ \xi_\mathrm{m} \approx 10^{-6}\,\mathrm{m}\,.$$

On constate que les amplitudes des oscillations de température et de déplacement longitudinale demeurent très faibles devant la température ambiante et la longueur du tube, alors même que la puissance sonore est significative.

2 Condition d'amplification thermoacoustique

On place, à l'intérieur de la cavité, un système métallique composé d'un empilement de fines plaques parallèles appelée « *stack* ». Ces plaques sont alignées parallèlement à l'axe (Ox) afin de ne pas obstruer le flux de gaz le long du tube. On suppose qu'il existe un régime d'onde stationnaire dans le monde fondamental du tube et qu'il n'est que très peu modifié par la présence du stack. La situation est représentée sur la figure 4 ci-dessous.

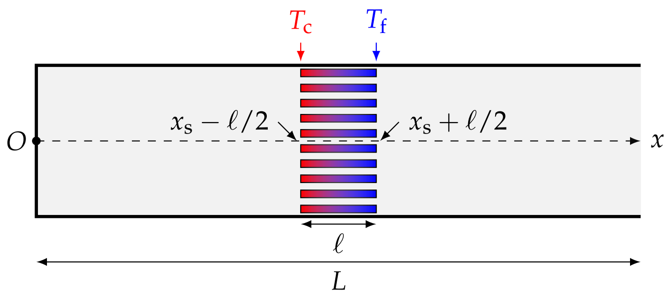


FIGURE 4 – Schéma du thermophone à tube à essai - *c'est le milieu poreux à base de paille de fer qui joue le rôle de stack dans l'expérience de la vidéo introductive.*

L'objectif de cette partie est d'analyser les transferts thermiques entre le fluide et les parois du *stack* pour établir un critère d'amplification de l'onde acoustique.

Le *stack* de longueur ℓ est centré à l'abscisse $x_s = L/2$. Une différence de température ΔT_s est maintenue entre ses deux extrémités :

— celle située à $x_s - \ell/2$, près du bord fermé, est à la température $T_c = T_0 + \Delta T_s/2$;

— celle située à $x_s + \ell/2$, près du bord ouvert, est à la température $T_f = T_0 - \Delta T_s/2$.

La température du *stack* se met alors sous la forme

$$T_s(x) = T_0 + \frac{\Delta T_s}{\ell}(x_s - x) = T_0 + \nabla T_s \times (x_s - x)\,,$$

où $\nabla T_s = \Delta T_s/\ell$ est le « gradient de température du *stack* ».

On étudie le mouvement d'une particule de fluide située au voisinage d'une des parois solides du *stack* et au repos au centre du *stack*, à l'abscisse $x_0 = x_s$. On peut alors considérer que son déplacement longitudinal s'écrit

$$\xi(x,t) = \xi(x_s,t) = \xi_m \sin(kx_s)\cos(\omega t)\,,$$

avec $kx_s = \pi/4$ dans le mode fondamental du tube.

Pour simplifier la modélisation qui suit, le mouvement sinusoïdal de la particule est désormais décomposé en une phase de mouvement rapide ($1 \to 2$), une phase d'arrêt ($2 \to 3$), une nouvelle phase de mouvement rapide en sens inverse ($3 \to 4$) et une dernière phase d'arrêt ($4 \to 1$). Cette séquence « articulée » de mouvements est représentée ci-dessous.

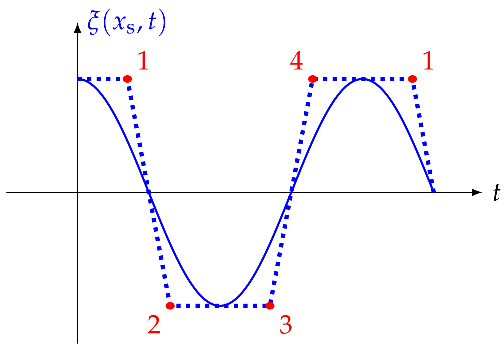


FIGURE 5 – Évolutions temporelles sinusoïdale (trait plein) et « articulée » (trait pointillé) du déplacement de la particule de fluide dans le *stack*

Q 10. Déterminer les positions x_{41} et x_{23} de la particule correspondant aux états d'immobilité 4/1 et 2/3 représentés sur la figure 5 en fonction uniquement de x_s et ξ_m et de valeurs numériques.

Les positions d'arrêt correspondent aux extrema de la fonction $\xi(x_s, t)$

$$x_{41} = x_s + \xi(x_s, t) \quad \text{avec} \quad \cos(\omega t) = +1 \quad \text{et} \quad x_{23} = x_s + \xi(x_s, t) \quad \text{avec} \quad \cos(\omega t) = -1\,,$$

Donc

$$x_{41} = x_s + \xi_m \sin(kx_s) \quad \text{et} \quad x_{23} = x_s - \xi_m \sin(kx_s)\,,$$

soit

$$\boxed{x_{41} = x_s + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_m} \quad \text{et} \quad \boxed{x_{23} = x_s - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_m}\,.$$

Q 11. Montrer alors que les températures $T_{s,41}$ et $T_{s,23}$ du *stack* à ces positions sont, de façon approchée,

$$T_{s,41} = T_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\nabla T_s \times \xi_m \quad \text{et} \quad T_{s,23} = T_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\nabla T_s \times \xi_m\,.$$

On utilise l'expression de la température du *stack* donnée page 7. On a

$$T_{s,41} = T_0 + \nabla T_s \times (x_s - x_{41}) \quad \text{et} \quad T_{s,23} = T_0 + \nabla T_s \times (x_s - x_{23})\,,$$

donc

$$\boxed{T_{s,41} = T_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\nabla T_s \times \xi_m} \quad \text{et} \quad \boxed{T_{s,23} = T_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\nabla T_s \times \xi_m}\,.$$

Quand la particule de fluide se déplace rapidement le long du *stack*, elle n'a pas le temps d'échanger une quantité significative de chaleur avec la plaque. Sa température à l'issue des phases de mouvement $1 \to 2$ et $3 \to 4$ est donc celle associée à l'onde acoustique.

$$T(x,t) = T(x_s, t) = T_0 + \tau(x_s, t) = T_0 - \tau_m \cos(kx_s)\cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad kx_s = \frac{\pi}{4}\,.$$

Q 12. Déterminer les températures T_2 et T_4 de la particule à la fin des phases de mouvement $1 \to 2$ et $3 \to 4$ en fonction de T_0, ∇T_s et τ_m.

On utilise l'expression de $T(x,t)$ fournie

$$T_2 = T_0 + \tau(x_s, t) \quad \text{avec} \quad \cos(\omega t) = -1 \quad \text{et} \quad T_4 = T_0 + \tau(x_s, t) \quad \text{avec} \quad \cos(\omega t) = 1$$

soit

$$T_2 = T_0 + \tau_m \cos(kx_s) = T_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_m \quad \text{et} \quad T_4 = T_0 - \tau_m \cos(kx_s) = T_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_m\,.$$

Pour que la particule fournisse effectivement un travail au fluide environnant et participe, avec toutes les autres particules dans le *stack*, à amplifier puis entretenir l'onde stationnaire dans le tube, il faut qu'elle reçoive (respectivement qu'elle cède) de la chaleur du *stack* depuis le point de température la plus élevée (respectivement la moins élevée) de son mouvement.

Q 13. Montrer alors qu'il y a conversion d'énergie thermique en travail acoustique à condition que le gradient de température du *stack* soit suffisamment grand

$$\nabla T_s > \frac{\tau_m}{\xi_m}\,.$$

Au point le plus chaud du cycle, la température de la particule est T_2 et celle du *stack* est $T_{s,23}$. Le transfert thermique a lieu du *stack* vers la particule si la température du *stack* est supérieure à celle de la particule

$$T_{s,1} > T_2\,,$$

soit

$$T_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\nabla T_s \times \xi_m > T_0 + \tau_m\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla T_s > \frac{\tau_m}{\xi_m}}\,.$$

Q 14. En déduire la valeur de l'écart de température minimale entre les deux extrémités du *stack* dans l'expérience présentée dans la vidéo introductive. Conclure. On donne $\ell = 2\,\mathrm{cm}$, ainsi que les ordres de grandeur $\tau_m = 10^{-3}\,\mathrm{K}$ et $\xi_m = 10^{-6}\,\mathrm{m}$.

Pour produire un son, l'écart de température entre les deux extrémités du *stack* doit être plus grand que

$$\boxed{(T_c - T_f)_{min} = \frac{\tau_m}{\xi_m} \times \ell} \quad \boxed{\texttt{AN}}\ (T_c - T_f)_{min} \approx 20\,\mathrm{K}$$

Cette différence de température semble tout à fait atteignable avec la source de chaleur employée. *Il ne reste plus qu'à faire l'expérience chez vous !*

Fin de la partie D