

## Horloge de Cox (10 points)

En 1765, l'horloger britannique James Cox a inventé une horloge dont la seule source d'énergie est constituée par les fluctuations de la pression atmosphérique : l'horloge de Cox utilise deux ampoules contenant du mercure. Les variations de la pression atmosphérique provoquent le déplacement du mercure entre les deux ampoules et le déplacement des deux ampoules l'une par rapport à l'autre.

Nous proposons une analyse de ce dispositif. Tout le long de ce problème, nous supposons que :

- le champ gravitationnel  $\vec{g} = -g \vec{u}_z$  est uniforme avec  $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $\vec{u}_z$  un vecteur unitaire ;
- tous les liquides sont incompressibles et leur masses volumiques sont notées  $\rho$  ;
- la capillarité ne sera pas prise en compte ;
- toute variation de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude est négligeable ;
- la température ambiante  $T_a$  est uniforme et toutes les transformations sont isothermes.



Fig. 1. Vue artistique d'une horloge de Cox<sup>1</sup>.

### Partie A - Soulevons un tube immergé

Soit un bain d'eau occupant le demi-espace infini  $z \leq 0$ . Le gaz qui le surplombe est à la pression  $P_a = P_0$ . Un tube cylindrique vertical de longueur  $H = 1 \text{ m}$ , de section  $S = 10 \text{ cm}^2$  et de masse  $m = 0.5 \text{ kg}$  est plongé dans le bain. L'extrémité inférieure du tube est ouverte et son extrémité supérieure est fermée. L'altitude du sommet du tube est notée  $h$ . L'altitude de l'eau à l'intérieur du tube est notée  $z_\ell$ . L'épaisseur des parois du tube est négligeable.

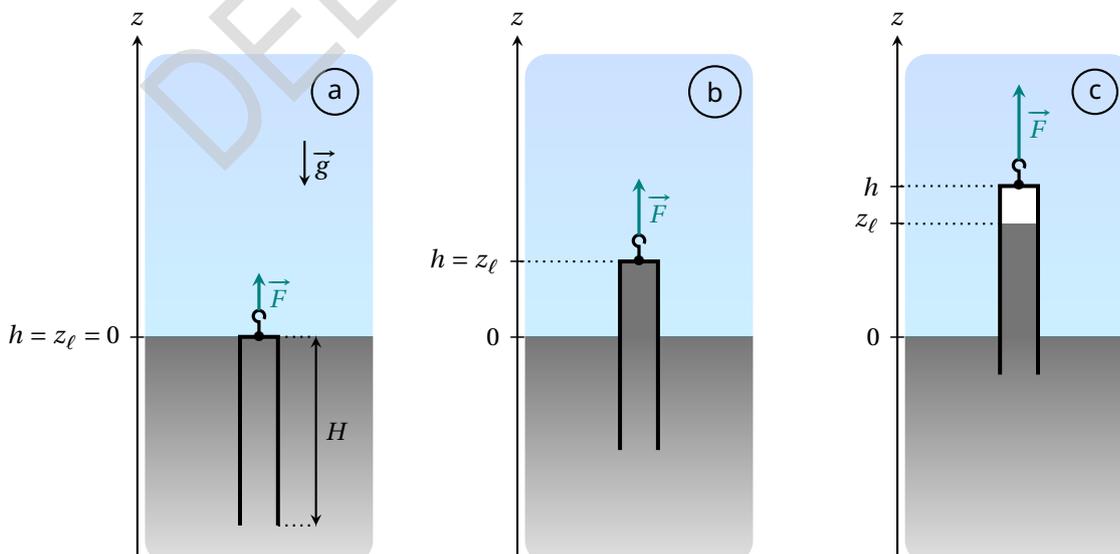


Fig. 2. Schéma du tube dans différentes configurations.

Nous partons de la situation où le tube de la Fig. 2 ne contient aucun gaz et où son extrémité supérieure se trouve au niveau du bain : en d'autres termes,  $h = 0$  et  $z_{\ell} = 0$  (cas a). Le tube est ensuite lentement soulevé jusqu'à ce que son extrémité inférieure atteigne le niveau du bain. La force de traction exercée sur le tube est notée  $\vec{F} = F \vec{u}_z$ .

- A.1** Pour la configuration de la Fig. 2 (cas b), exprimez la pression  $P_w$  dans l'eau au sommet du tube. 0.2pt  
Exprimez aussi la force  $\vec{F}$  nécessaire pour maintenir le tube dans cette position.  
Ces grandeurs doivent être écrites en fonction de  $P_0$ ,  $\rho$ ,  $m$ ,  $S$ ,  $h$ ,  $g$  et  $\vec{u}_z$ .

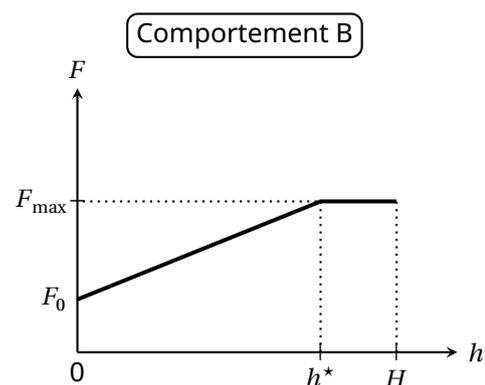
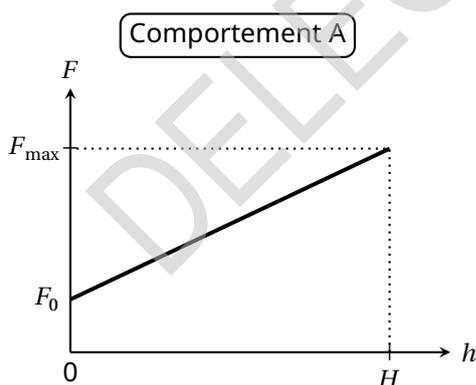
Trois expériences sont réalisées. Dans chacune d'elles, le tube est soulevé à partir de l'état initial illustré en Fig. 2 (a) dans les conditions spécifiées dans le tableau 1.

Expérience	Liquide	$T_a$ (°C)	$\rho$ (kg · m <sup>-3</sup> )	$P_{\text{sat}}$ (Pa)
1	eau	20	$1.00 \times 10^3$	$2.34 \times 10^3$
2	eau	80	$9.7 \times 10^2$	$4.74 \times 10^4$
3	eau	99	$9.6 \times 10^2$	$9.98 \times 10^4$

**Tableau 1.** Conditions expérimentales et valeurs numériques des grandeurs physiques pour chaque expérience

( $P_{\text{sat}}$  désigne la pression de vapeur saturante du fluide pur)

Dans chaque cas, nous étudions l'évolution de la force  $F$  qui doit être appliquée pour maintenir le tube en équilibre à une altitude  $h$ . La pression extérieure est fixée à  $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$  Pa. Deux comportements différents sont possibles :



- A.2** Pour chaque expérience, complétez le tableau de la feuille de réponses pour indiquer le comportement attendu et les valeurs numériques de  $F_{\text{max}}$  et, le cas échéant, de  $h^*$ .  $F_{\text{max}}$  et  $h^*$  sont définis dans les figures illustrant les deux comportements A et B. 0.8pt

Par la suite, l'eau est remplacée par du mercure liquide (dont les propriétés sont données ci-dessous), c'est alors le comportement B qui est observé.

Liquide	$T_a$ (°C)	$\rho$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$P_{\text{sat}}$ (Pa)
Mercure	20	$1.35 \times 10^4$	0.163

**A.3** Exprimez l'erreur relative, notée  $\varepsilon$ , commise lorsque l'on évalue la force maximale  $F_{\text{max}}$  en négligeant  $P_{\text{sat}}$  par rapport à  $P_0$ . Donnez la valeur numérique de  $\varepsilon$ . 0.3pt

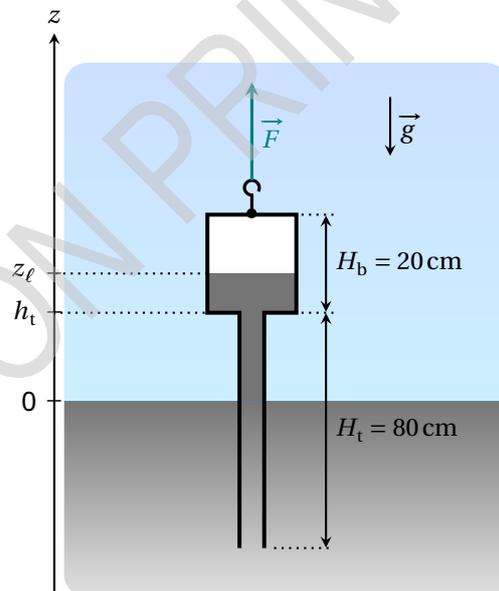
### Partie B - Système barométrique en deux parties

À partir de maintenant, nous travaillerons avec du mercure (masse volumique  $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) à la température ambiante  $T_a = 20^\circ\text{C}$  et nous prendrons  $P_{\text{sat}} = 0$ .

Considérons un système formé d'un tube surmonté d'une ampoule, modélisé par deux cylindres superposés de dimensions différentes, comme le montre la Fig. 3 :

- la partie inférieure (également appelée tube) a une section transverse  $S_t$  et une hauteur  $H_t = 80 \text{ cm}$ ;
- la partie supérieure (appelée ampoule) a une section transverse  $S_b > S_t$  et une hauteur  $H_b = 20 \text{ cm}$ .

Ce système en deux parties est plongé dans un bain de mercure liquide semi-infini.



**Fig. 3.** Schéma du système barométrique en deux parties.

Comme dans la partie A, le système est préparé de manière à ce que le système ne contienne pas de gaz. La position verticale du système est repérée par l'altitude  $h_t$  de la jonction entre le tube et l'ampoule. L'altitude du sommet de la colonne de mercure est à nouveau notée  $z_l$ . La force  $\vec{F}$  qui doit être exercée pour maintenir le système en équilibre dans la configuration de la Fig. 3 peut maintenant s'écrire comme suit

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}}) g \vec{u}_z \quad (1)$$

où  $m_{\text{tb}}$  est la masse totale du système en deux parties (lorsqu'il est vide de mercure).

**B.1** Sur la feuille de réponses, colorer la surface correspondant au volume de la partie du mercure liquide qui est à l'origine du terme  $m_{\text{add}}$  apparaissant dans l'équation (1). 0.3pt

La masse  $m_{\text{add}}$  dépend à la fois de la hauteur  $h_t$  et de la pression atmosphérique  $P_a$ . Pour la question suivante, nous supposons que la pression atmosphérique est fixée à  $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Partant

d'une situation où le système est complètement immergé, il est lentement soulevé jusqu'à ce que sa base affleure la surface supérieure du bain de mercure.

- B.2** Esquisser un graphique représentant l'évolution de la masse  $m_{\text{add}}$  en fonction de  $h_t$  pour  $h_t \in [-H_b, H_t]$ . Sur ce graphique, donnez l'expression des pentes des différents segments, ainsi que l'expression de  $h_t$ , pour chacun des points anguleux, en fonction de  $P_0$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $S_b$ ,  $S_t$ ,  $H_b$  et  $H_t$ . 1.4pt

Tout d'abord, la pression atmosphérique est  $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . Le système est soulevé jusqu'à ce que la surface libre du liquide soit au milieu de l'ampoule. Le système est alors maintenu dans cette position (la valeur de  $h_t$  est maintenue constante) et nous observons les variations de la masse  $m_{\text{add}}$  dues aux variations de la pression atmosphérique décrites par

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

où  $P_0$  désigne la valeur moyenne de  $P_a(t)$ ;  $P_1(t)$  est un terme perturbatif modélisé par une fonction triangulaire périodique d'amplitude  $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$  et de période  $\tau_1 = 1$  semaine.

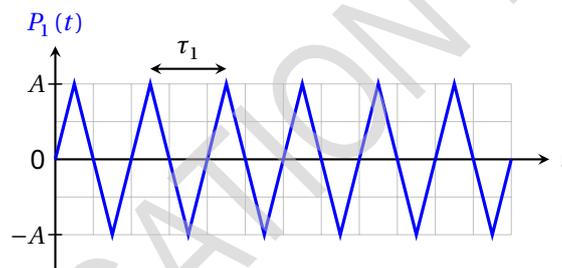


Fig. 4. Modèle simplifié du terme perturbatif  $P_1(t)$ .

- B.3** Sachant que  $S_t = 5 \text{ cm}^2$  et  $S_b = 200 \text{ cm}^2$ , exprimer l'amplitude  $\Delta m_{\text{add}}$  des variations de la masse  $m_{\text{add}}$  au cours du temps. Donner sa valeur numérique. 0.3pt  
*Nous admettrons que la surface du liquide reste toujours dans l'ampoule.*

## Partie C - L'horloge de Cox

Le mécanisme réel développé par Cox est complexe (Fig. 5). Nous en étudierons une version simplifiée, illustrée en Fig. 6 et décrite ci-dessous :

- une citerne à fond plat contient un bain de mercure liquide;
- un système barométrique en deux parties identique à celui étudié dans la partie B, à nouveau complètement vidé de son gaz, est plongé dans le bain;
- la citerne et le système en deux parties sont chacun suspendus par un câble. Les deux câbles (supposés inextensibles et de masses négligeables) passent par un système de poulies idéales et finissent attachés de part et d'autre de la même masse  $M$ , qui peut glisser sur une surface horizontale;
- le volume total de mercure liquide contenu dans le système est de  $V_\ell = 5L$ .

La hauteur, la section transverse et les masses de chaque pièce sont indiquées dans le tableau 2. La position de la masse  $M$  est repérée par la coordonnée  $x$  de son centre de masse. Nous considérerons

un frottement solide entre le support horizontal et la masse  $M$ , sans distinction entre les coefficients de frottement statiques et dynamiques; l'intensité de cette force lors du glissement est notée  $F_s$ .

Deux butées limitent le déplacement de la masse  $M$  de sorte que  $-X \leq x \leq X$  (avec  $X > 0$ ). Nous supposons que la valeur de  $X$  impose que :

- le fond du système en deux parties ne touche jamais le fond de la citerne et ne sort jamais du bain liquide;
- la position du haut de la colonne de mercure, d'altitude  $z_\ell$ , se situe toujours dans l'ampoule supérieure.



Fig. 5. Véritable horloge de Cox<sup>2</sup> (sans mercure).

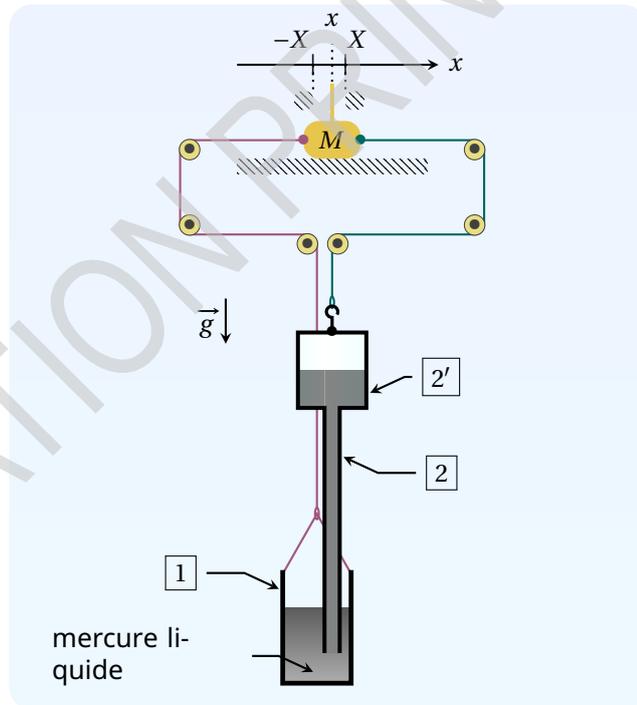


Fig. 6. Schéma du système modélisant l'horloge de Cox.

Référence	Nom	Hauteur	Zone de la section	Masse vide
1	citerne	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	$m_c$
2	tube du système barométrique	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	masse totale du système barométrique : $m_{tb}$
2'	Ampoule du système barométrique	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

Tableau 2. Dimensions et notations du système modélisé.

Le système évolue au contact de l'atmosphère dont la pression fluctue comme en Fig. 4. À l'instant  $t = 0$ ,

la masse  $M$  est au repos en  $x = 0$  et les tensions exercées par les deux câbles de part et d'autre de la masse  $M$  s'équilibrent à  $P_1(0) = 0$ .

Définition :

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

où la dernière expression utilise le fait que  $S_t \ll S_b$  et que  $S_t \ll S_c$  (ce que nous supposons valide jusqu'à la fin du problème).

**C.1** Déterminez le seuil  $\xi^*$  tel que  $M$  reste indéfiniment au repos lorsque  $\xi > \xi^*$ . 1pt

Pour la question suivante uniquement, nous supposons que la masse  $M$  est temporairement bloquée en  $x = X$ .

**C.2** Pour  $P_1 = 0$ , donnez l'expression de la force de tension totale  $\vec{T} = T \vec{u}_x$  qui s'exerce sur la masse  $M$  et qui est due à la tension des deux câbles à cette position  $x = X$ . 1pt  
Exprimez-la en fonction de  $\rho$ ,  $g$ ,  $X$  et des aires des sections transverses pertinentes.

Lorsque  $\xi < \xi^*$ , en repartant de  $x = 0$  et  $P_1 = 0$ , deux comportements différents peuvent être observés pour  $t \geq 0$ . Pour les distinguer, il est nécessaire d'introduire un autre paramètre

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

**C.3** Complétez le tableau de la feuille de réponses pour indiquer la condition pour laquelle chaque régime est obtenu. Les conditions doivent être exprimées sous forme d'inégalités portant sur  $\xi$  et/ou  $\lambda$ . 2pt  
En outre, esquissez les variations de  $\frac{x(t)}{X}$  pour  $t \in [0, 3\tau_1]$  qui sont cohérentes avec les variations de  $\frac{P_1(t)}{A}$  déjà présentes.  
*La spécification des coordonnées des points remarquables n'est pas requise.*

Dans la véritable horloge de Cox, l'énergie fournie par le mécanisme est stockée à l'aide d'un système de cliquets. Cette énergie est ensuite utilisée pour soulever un contrepoids, comme dans une horloge traditionnelle. Dans le modèle simplifié étudié ici, l'énergie récupérée par l'horloge correspond à l'énergie dissipée par la force de frottement exercée par la surface horizontale sur la masse  $M$ . Nous supposons dorénavant que le système est dimensionné de manière à fonctionner dans le régime qui permet à l'horloge de récupérer de l'énergie. Nous supposons également que le régime permanent est établi. Nous noterons  $W$  l'énergie dissipée par la force de frottement solide pendant une période  $\tau_1$ , qui s'exprime uniquement en fonction de  $F_s$  et  $X$ .

Toutes choses égales par ailleurs,  $F_s$  et  $X$  peuvent être ajustés pour maximiser l'énergie  $W$ . Nous noterons  $F_s^*$  et  $X^*$  leurs valeurs respectives dans la situation optimale.



- C.4** En considérant que  $S_b \approx S_c$  et que  $S_t \ll S_b$ , déterminez les expressions de  $F_s^*$  et  $X^*$  en fonction de  $\rho$ ,  $g$ ,  $S_c$  et  $A$ . 1pt  
Exprimez l'énergie maximale correspondante notée  $W^*$ .  
Calculez sa valeur numérique pour  $A = 5 \times 10^2$  Pa.

Nous noterons  $W_{pr}^*$  le travail des forces de pression atmosphérique reçu par le système dans la situation optimale pendant une période  $\tau_1$ .

- C.5** Exprimez  $W_{pr}^*$  puis calculez le rapport  $W^*/W_{pr}^*$ . 1.7pt  
*Il peut être utile de représenter l'évolution du système dans un diagramme  $(P, V)$ , où  $V$  est le volume du système.*

Crédits :

[1] : Bruno Vacaro;

[2] : Victoria and Albert Museum, Londres.

DELEGATION PRINT