

## Hydrogène et galaxies (10 points)

Ce problème étudie la physique remarquable des galaxies, comme leur dynamique et leur structure. En particulier, on souhaite expliquer comment mesurer la distribution de masse de notre galaxie depuis l'intérieur de celle-ci. Pour cela, on se concentre sur l'hydrogène, son principal constituant.

Tout au long de ce problème, seule la notation  $\hbar$  est utilisée, définie selon  $\hbar = h/2\pi$ .

### Partie A - Introduction

#### Modèle de Bohr

On suppose que l'atome d'hydrogène est constitué d'un électron non relativiste, de masse  $m_e$ , en orbite autour d'un proton fixe. Cette orbite est supposée circulaire dans toute cette partie.

**A.1** Déterminer la vitesse de l'électron  $v$  sur une orbite circulaire de rayon  $r$ . 0.2pt

Dans le modèle de Bohr, on suppose que la norme du moment cinétique de l'électron, notée  $L$ , est quantifiée selon  $L = n\hbar$ , où  $n > 0$  est un nombre entier. On définit  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$ .

**A.2** Montrez que le rayon de chaque orbite est donné par  $r_n = n^2 r_1$ , où  $r_1$  est le rayon de Bohr. Exprimez  $r_1$  en fonction de  $\alpha$ ,  $m_e$ ,  $c$  et  $\hbar$  puis calculez sa valeur numérique avec trois chiffres significatifs. Exprimez  $v_1$ , la vitesse associée à l'orbite de rayon  $r_1$ , en fonction de  $\alpha$  et  $c$ . 0.5pt

**A.3** Déterminez l'énergie mécanique de l'électron  $E_n$  sur une orbite de rayon  $r_n$  en fonction de  $e$ ,  $\epsilon_0$ ,  $r_1$  et  $n$ . Déterminez  $E_1$  dans l'état fondamental en fonction de  $\alpha$ ,  $m_e$  et  $c$ . Calculez sa valeur numérique en eV. 0.5pt

#### Structures fines et hyperfines de l'hydrogène

L'inversion, rare et spontanée, du spin de l'électron peut provoquer l'émission d'un photon, ce qui a lieu en moyenne une fois tous les 10 millions d'années par atome d'hydrogène. Cette émission sert de traceur pour l'hydrogène dans l'univers. Elle revêt ainsi une importance majeure en astrophysique. On cherche à étudier la transition responsable de cette émission en deux étapes.

Tout d'abord, on considère l'interaction entre le spin de l'électron et le mouvement relatif de l'électron et du proton. Dans le référentiel lié à l'électron, le proton décrit une orbite de rayon  $r_1$  autour de l'électron, ce qui produit un champ magnétique  $\vec{B}_1$ .

**A.4** On se place au point où se trouve l'électron. Déterminez la norme  $B_1$  de  $\vec{B}_1$  en ce point en fonction de  $\mu_0$ ,  $e$ ,  $\alpha$ ,  $c$  et  $r_1$ . 0.5pt

Par ailleurs, le spin de l'électron crée un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}_s$  dont la norme  $\mathcal{M}_s$  est approximativement donnée par  $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$ . La structure *fine* (F) est reliée à la différence d'énergie  $\Delta E_F$  entre un électron dont le moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}_s$  est parallèle à  $\vec{B}_1$  et un électron dont le moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}_s$  est antiparallèle à  $\vec{B}_1$ . D'une manière similaire, la structure *hyperfine* (HF) est reliée à la différence d'énergie  $\Delta E_{HF}$  due à l'interaction entre les moments magnétiques parallèles et anti-parallèles des moments magnétiques de l'électron et du proton. Cette différence d'énergie est approximativement donnée par  $\Delta E_{HF} \approx 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ , où  $m_p$  est la masse du proton.

- A.5** Exprimez  $\Delta E_F$  en fonction de  $\alpha$  et  $E_1$ . 0.5pt  
Exprimez la longueur d'onde  $\lambda_{\text{HF}}$  d'un photon émis lors d'une transition entre les deux états de la structure hyperfine puis donnez sa valeur numérique avec deux chiffres significatifs.

### Partie B - Courbes de rotation des galaxies

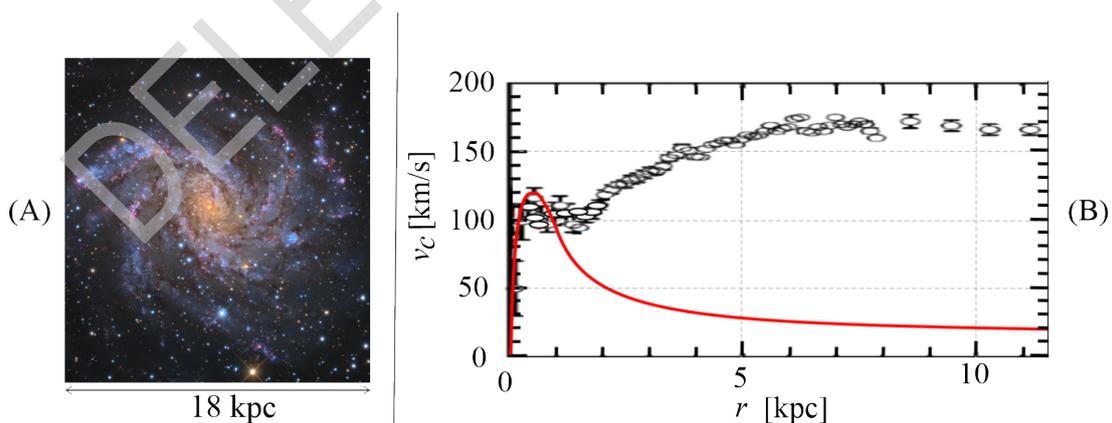
#### Données :

- kiloparsec :  $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- masse solaire :  $1 M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

On considère une galaxie à symétrie sphérique centrée sur un point fixe  $O$ . En tout point  $P$ ,  $\rho = \rho(P)$  désigne la masse volumique et  $\varphi = \varphi(P)$  le potentiel gravitationnel associé (c'est-à-dire l'énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse).  $\rho$  et  $\varphi$  dépendent tous les deux uniquement de  $r = \|\vec{OP}\|$ . Le mouvement d'une masse  $m$  située en  $P$ , sous l'effet du champ  $\varphi$ , est limité à un plan contenant  $O$ .

- B.1** Dans le cas d'une orbite circulaire, déterminez la vitesse  $v_c$  d'un objet en orbite 0.2pt  
circulaire passant par le point  $P$  en fonction de  $r$  et de  $\frac{d\varphi}{dr}$ .

La Fig. 1 (A) est une image de la galaxie spirale NGC 6946 dans la bande visible (vue depuis le télescope Schulman de 0.8 m de diamètre, situé à l'Observatoire du mont Lemmon en Arizona). Les petites ellipses de la Fig. 1 (B) représentent des mesures expérimentales de  $v_c$  pour cette galaxie. La région centrale ( $r < 1 \text{ kpc}$ ) est appelée le bulbe. Dans cette région, la distribution de masse est à peu près uniforme. La courbe rouge est une prédiction pour  $v_c$  en supposant que le bulbe est homogène et son extérieur képlérien (képlérien signifiant que  $\varphi(r) = -\beta/r$  où  $\beta > 0$ ), c'est-à-dire que la masse totale de la galaxie est concentrée dans le bulbe.



**Fig. 1** : Galaxie NGC 6946 : photographie (A) et courbe de rotation (B).

- B.2** Déduisez la masse  $M_b$  du bulbe de la galaxie NGC 6946 à partir de la courbe de 0.5pt  
rotation rouge de la Fig. 1 (B). Cette masse doit être exprimée en multiples de la masse solaire notée  $M_{\odot}$ .

La comparaison entre le modèle képlérien et les données expérimentales permet aux astronomes d'en-

visager qu'une partie de la masse est invisible sur l'image. Ils supposent donc que la masse volumique réelle de la galaxie est donnée par :

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

où  $C_m > 0$  et  $r_m > 0$  sont des constantes.

**B.3** Montrez que le profil de vitesses  $v_{c,m}(r)$  correspondant au profil de masse volumique de l'équation 1 peut s'écrire selon 1.8pt

$$v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \text{Arctan}\left(\frac{r}{r_m}\right)}{r}}$$

Exprimez  $k_1$  et  $k_2$  en fonction de  $C_m$ ,  $r_m$  et de  $G$ .

Indications :  $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \text{Arctan}(r/a)$ , et :  $\text{Arctan}(x) \simeq x - x^3/3$  pour  $x \ll 1$ .

Simplifiez  $v_{c,m}(r)$  lorsque  $r \ll r_m$  d'une part et lorsque  $r \gg r_m$  d'autre part.

Montrez que si  $r \gg r_m$ , alors la masse  $M_m(r)$  contenue dans une sphère de rayon  $r$  se simplifie et ne dépend alors que de  $C_m$  et  $r$ . On prendra l'expression de la masse volumique donnée par l'équation 1.

Estimez la masse réellement présente dans l'image de la Fig. 1 (A).

### Partie C - Distribution de masse dans notre galaxie

Pour une galaxie dite spirale, le modèle de l'équation 1 est modifié. On considère généralement que le potentiel gravitationnel est donné par  $\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$ , où  $z$  est la distance au plan galactique (défini par  $z = 0$ ) et  $r < r_0$  est maintenant le rayon des coordonnées cylindriques.  $\varphi_0 > 0$  est une constante à déterminer.  $r_0$  et  $z_0$  sont des valeurs constantes.

**C.1** Trouvez l'équation du mouvement portant sur  $z$  pour le mouvement vertical d'une masse ponctuelle  $m$  dans un tel potentiel, en supposant que  $r$  est constant. Montrez que, si  $r < r_0$ , alors le plan galactique constitue un plan d'équilibre stable. Donner la fréquence angulaire (la pulsation)  $\omega_0$  des petites oscillations de la masse  $m$  de part et d'autre de ce plan. 0.5pt

À partir de maintenant, on fixe  $z = 0$ .

**C.2** Identifiez le régime,  $r \gg r_m$  ou bien  $r \ll r_m$ , dans lequel le modèle de l'équation 1 permet d'obtenir un potentiel de la forme  $\varphi_G(r, 0)$ . On donnera une définition appropriée de  $\varphi_0$ . Sous cette condition,  $v_c(r)$  ne dépend plus de  $r$ . Exprimez  $v_c(r)$  en fonction de  $\varphi_0$ . 0.6pt

Ainsi, à l'extérieur du bulbe, le module de vitesse  $v_c$  ne dépend pas de la distance au centre de la galaxie. De la même manière que le font les astronomes, ce résultat sera utilisé pour mesurer la distribution de masse de notre galaxie de l'intérieur.

Tous les objets galactiques considérés ici pour les observations astronomiques, tels que les étoiles ou les nébuleuses, sont principalement composés d'hydrogène. À l'extérieur du bulbe, nous supposons qu'ils tournent sur des orbites circulaires autour du centre galactique  $C$ .  $S$  est la position du soleil et  $E$  celle d'un

objet galactique donné émettant dans le spectre de l'hydrogène. Dans le plan galactique, nous considérons une ligne de visée  $SE$  correspondant à l'orientation d'une observation, selon le vecteur unitaire  $\hat{u}_v$  (voir Fig. 2).

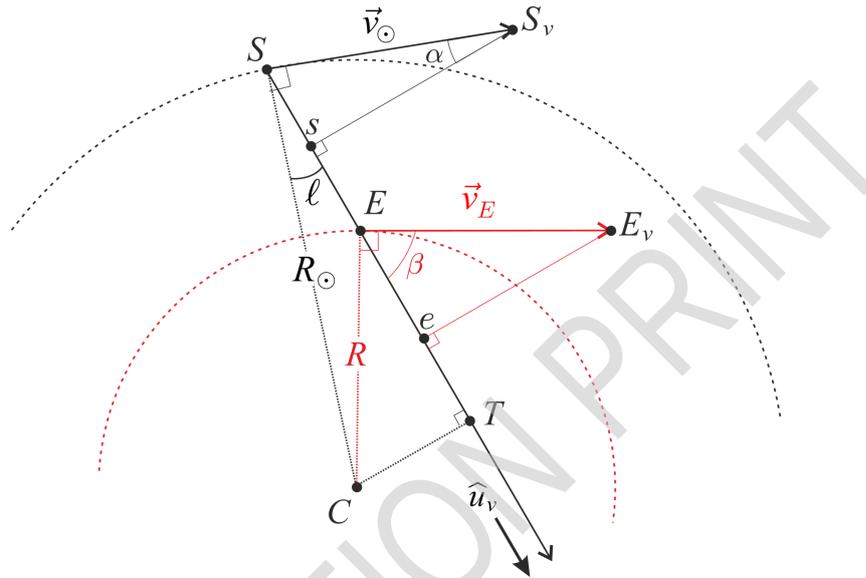
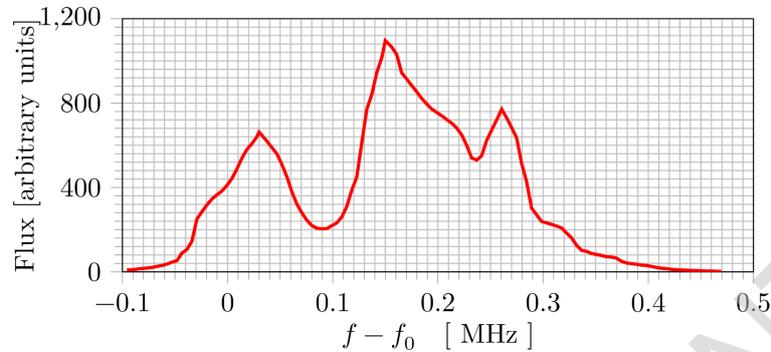


Fig. 2 : Géométrie associée à la mesure.

Soit  $\ell$  la longitude galactique, mesurant l'angle entre  $SC$  et  $SE$ . La vitesse du soleil sur son orbite circulaire de rayon  $R_\odot = 8.00 \text{ kpc}$  est notée  $\vec{v}_\odot$ . Un objet galactique placé en  $E$  décrit une orbite formant un autre cercle de rayon  $R$  à la vitesse  $\vec{v}_E$ . En utilisant l'effet Doppler sur la raie à  $21 \text{ cm}$  étudiée précédemment, on peut obtenir la vitesse radiale relative  $v_{rE/S}$  de l'émetteur  $E$  par rapport au soleil  $S$  : il s'agit de la projection de  $\vec{v}_E - \vec{v}_\odot$  sur la ligne de visée.

- C.3** Déterminez  $v_{rE/S}$  en fonction de  $\ell$ ,  $R$ ,  $R_\odot$  et  $v_\odot$ . Exprimez ensuite  $R$  en fonction de  $R_\odot$ ,  $v_\odot$ ,  $\ell$  et  $v_{rE/S}$ . 0.7pt

À l'aide d'un radiotélescope, on effectue des observations dans le plan de notre galaxie autour d'une longitude galactique  $\ell = 30^\circ$ . La bande de fréquence utilisée contient la raie à  $21 \text{ cm}$ , dont la fréquence est  $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$ . Les résultats sont reportés en Fig. 3.



**Fig. 3 :** Signal électromagnétique (exprimé en unités arbitraires) en fonction du décalage en fréquence mesuré dans la bande de fréquences radio autour de la longitude galactique  $\ell = 30^\circ$  à l'aide de EU-HOU RadioAstronomy.

**C.4** Dans notre galaxie,  $v_\odot = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminez les valeurs de la vitesse radiale relative (avec 3 chiffres significatifs) et de la distance du centre galactique (avec 2 chiffres significatifs) des trois sources observées en Fig. 3. Les distances doivent être exprimées en multiples de  $R_\odot$ . 0.6pt

**C.5** Sur la vue de dessus de notre galaxie (à l'intérieur du cadre de la réponse), indiquez les positions des sources observées en Fig. 3. Que peut-on déduire d'une série de mesures pour lesquelles on fait varier  $\ell$ ? 0.6pt

### Partie D - Relation de Tully-Fisher et théorie MOND

La courbe de rotation externe plate de NGC 6946 de la Fig. 1 est une propriété commune des galaxies spirales, comme on peut le voir en Fig. 4 (à gauche). En traçant la valeur de la vitesse constante externe  $v_{c,\infty}$  en fonction de la masse totale mesurée  $M_{\text{tot}}$  de chaque galaxie, on obtient une corrélation intéressante appelée relation de Tully-Fisher, voir Fig. 4 (à droite).

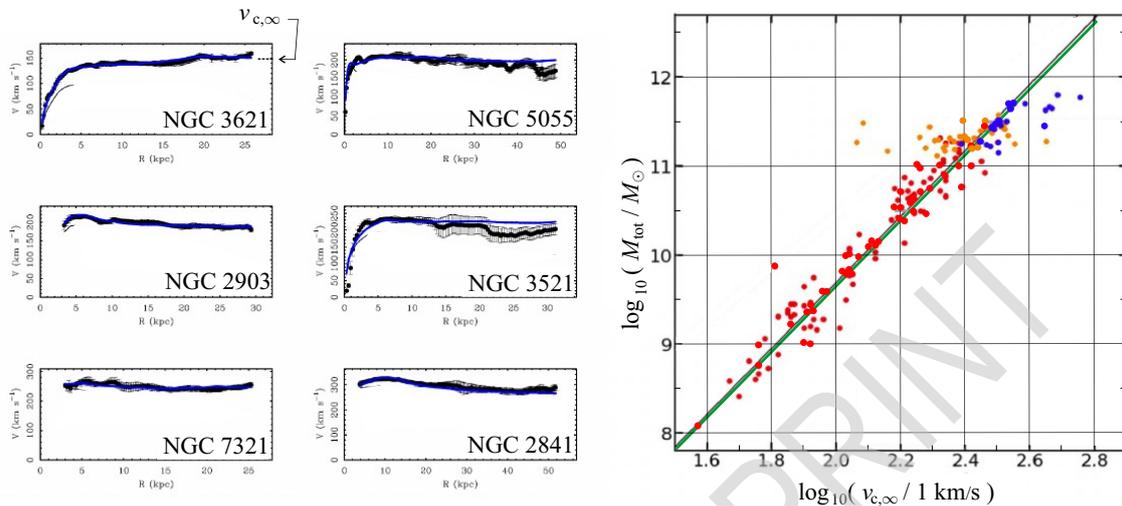


Fig. 4. À gauche : Courbes de rotation pour des galaxies spirales typiques - À droite :  $\log_{10}(M_{\text{tot}})$  en fonction de  $\log_{10}(v_{c,\infty})$  sur des échelles linéaires. Les points de couleur correspondent à des galaxies différentes et à des études différentes. La ligne verte est la relation de Tully-Fischer qui se superpose précisément sur le meilleur ajustement linéaire des données (en noir).

- D.1** En supposant que le rayon  $R$  d'une galaxie ne dépend pas de sa masse, montrez que le modèle de l'équation 1 (partie B) donne une relation de la forme  $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^{\gamma}$  où l'exposant  $\gamma$  et le facteur  $\eta$  sont à déterminer. Comparez cette expression à la relation de Tully-Fischer en évaluant l'exposant  $\gamma_{TF}$ . 0.4pt

Dans un régime d'accélération extrêmement faible, de l'ordre de  $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , la théorie MOND (Modified Newtonian Dynamics) suggère qu'on peut modifier la deuxième loi de Newton en utilisant  $\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$  où  $a = \|\vec{a}\|$  est la norme de l'accélération et  $\mu$  est la fonction définie par  $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$ .

- D.2** En utilisant les données de la Fig. 1 pour NGC 6946, estimez, dans le cadre des lois de Newton, la norme de l'accélération  $a_m$  d'une masse dans les régions externes de la galaxie NGC 6946. 0.2pt

- D.3** Soit  $m$  une masse sur une orbite circulaire de rayon  $r$  avec une vitesse  $v_{c,\infty}$  dans le champ de gravité d'une masse fixe  $M$ . Dans le cadre de la théorie MOND, avec  $a \ll a_0$ , déterminez l'exposant  $\gamma_{\text{MOND}}$  de Tully-Fischer. En utilisant les données pour la galaxie NGC 6946 et/ou la relation de Tully-Fischer, calculez  $a_0$  pour montrer que la théorie MOND correspond au bon régime. 0.8pt

- D.4** En considérant les cas pertinents, déterminez  $v_c(r)$  pour toutes les valeurs de  $r$  dans la théorie MOND dans le cas d'un champ gravitationnel dû à une masse  $M$  de rayon  $R_b$  distribuée de façon homogène. 0.9pt