

5 PARADOXES A SURMONTER

pour faire flotter un CAILLOU



Lien vidéo

Eva SMIDTAS

Syphax MAHTOUT



1

UN CAILLOU COULE CAR IL EST LOURD

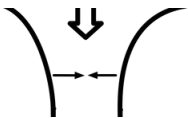
En réalité, il faudrait dire qu'un caillou coule parce qu'il est plus dense que l'eau. Il ne faut pas confondre grandeur intensive et grandeur extensive car un caillou léger peut aussi couler !



2

PRESSION ET SURFACE SONT LIÉES

$F = PS$ --> pour une même pression, il faut moins de force avec une petite surface (crique hydraulique)



3

ASPIRATION ET EFFET VENTURI

Quand le flux est rapide, la pression diminue, et les objets s'attirent. Ce qu'il faut maîtriser si on veut soulever notre caillou.



4

UN CAILLOU QUI FLOTTE

On arrive à faire flotter un caillou en réunissant toutes les conditions.



5

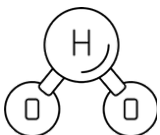
LA GLACE NE GLISSE PAS

C'est le film d'eau entre la glace et le solide au dessus d'elle qui permet de le faire glisser.

Château d'eau
 $h = 20m$



Rocher



+

UNE NOUVELLE PHYSIQUE SE DESSINE

L'approche reste valable jusqu'à des couches de quelques molécules d'épaisseur. De plus, le sujet est encore assez récent et de futures recherches permettront de l'éclairer.

1 Introduction et premières questions

1.1 Introduction

Au cours d'un voyage scolaire au hasard d'une visite touristique nous avons vu une fontaine surprenante à la fin du mois de juin 2023. Il s'agit d'un gros rocher de plusieurs tonnes qui semblait flotter au toucher sur la place devant un musée de Science à Grenade, El Parque de la Ciencias. Nous avons même pu monter dessus à plusieurs, et il avait 3 degrés de liberté. Le rocher peut sur une certaine plage se déplacer latéralement en x, y et en rotation. Dès notre retour en France, nous avons voulu comprendre et expérimenter, comment cela était possible.

Ni une, ni deux, encouragé par notre professeur qui acceptait d'en faire un sujet de contrôle pour ses futurs élèves si nous parvenions à en faire un sujet, nous voilà achetant tuyau et plâtre dans un grand magasin de bricolage pour fabriquer une maquette.

Nous avons estimé des ordres de grandeurs, nous nous sommes confrontés à des échecs et des réussites. Nous avons découvert les sites Internet et des papiers scientifiques. Nous avons été heureux de retrouver ce que nous avons trouvé par nous-même comme l'épaisseur de l'ordre du millimètre de la couche d'eau. Et quoi qu'il en soit on y trouve des études théoriques de fontaine qui s'en rapprochent, appelée Kugel ball qui sont parfaitement sphérique ou cylindrique, mais qui ne se translatent pas. Les études sont toutes théoriques, sans que les physiciens n'aient vérifié expérimentalement leurs modèles. Les entreprises ou artistes qui fabriquent de telles fontaines, pour les plus développées sont indiennes et ne communiquent pas sur les caractéristiques techniques de leurs fontaines.

Nous sommes heureux de présenter ici pour la première fois une maquette expérimentale, des conseils pour la réaliser et des mesures expérimentales pour appuyer le modèle théorique de la modélisation avec de nombreux résultats qui surprennent l'intuition.

Dans une première partie nous présentons la fontaine de Grenade, et notre maquette. Dans une seconde partie nous présenterons les principes de base théorique et les mesures expérimentales en adéquation. Dans une troisième partie nous étudierons des aspects secondaires : comment s'assurer de la mise en route par un creux caché sous la fontaine, la dynamique du rocher avec les mouvements de translation de rotation et d'oscillation. Enfin dans une partie de discussion nous aborderons les limites et l'ouverture.

Voici une vidéo de la fontaine qui met en mouvement un rocher :
<https://youtu.be/v5t1z1Fqy5A>



FIGURE 1 – Nous et nos amis sur la fontaine

Lien vidéo pour C'Génial : <https://youtu.be/IsE6I2kLux4>

1.2 Une première approche du problème

Quelques petites questions pour comprendre le fonctionnement d'une fontaine de Galilée :

1. Quelle est la hauteur d'un château d'eau (10 m \leftrightarrow 1 bar) ?
2. Quelle masse peut-on soulever avec une surface de contact de forme carrée avec un côté de longueur $d = 6$ cm ?
3. Pourquoi y a-t-il un petit creux sous le rocher ?
4. A quel point le rocher doit-elle être lisse ?

5. Vérifier expérimentalement

Notions à connaître :

- Notion d'équilibre
- Pression isostatique

Remarque : Cette modélisation du problème est analogue à celui des crics hydrauliques.

On ne connaît pas la pression au robinet dans une maison, on va essayer de l'estimer.

Pour cela on va estimer la hauteur d'un château d'eau à 20 m.

1.2.1 Modélisation et résolution algébrique

Le système étudié est le rocher, dans le repère terrestre.

Bilan des forces :

- **Le poids** $\vec{P} = m\vec{g}$
- **La force pressante en bas** F_{P_b} (ou réaction du support)
- **la force pressante en haut** F_{P_a} (pression atmosphérique)

On s'intéresse à la situation en **équilibre**, i.e. la somme des forces exercées sur le système est nulle :

$$\vec{P} + \vec{F}_p + \vec{F}_{P_a} = \vec{0}$$

d'où

$$m \cdot g + P_a \cdot S = P_b \cdot S \quad (1)$$

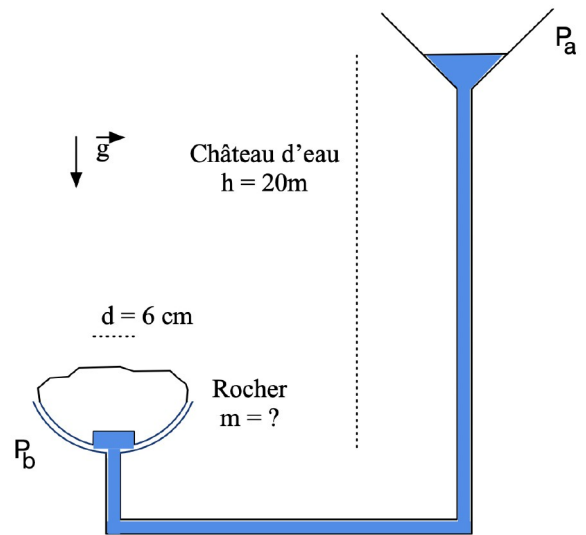


FIGURE 2 – Schéma du problème

De plus, la **pression hydrostatique** (\Leftrightarrow isostatique) entre le point de contact rocher/eau et le haut du réservoir (ici : le château d'eau) nous donne :

$$P_b = P_a + h \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \quad (2)$$

Avec ρ_{eau} : La masse volumique de l'eau

P_a : La pression en haut du château d'eau (pression atmosphérique standard)

h : La différence de hauteur entre le haut du château d'eau et le rocher

En combinant (1) avec (2) on obtient les calculs suivant :

$$\begin{aligned} m &= \frac{(P_b - P_a) \cdot S}{g} \\ &= \frac{(h \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g) \cdot S}{g} \end{aligned}$$

Soit finalement,

$$\boxed{m = S \cdot h \cdot \rho_{\text{eau}}} \quad (3)$$

1.2.2 Application numérique

On suppose que la surface est un carré de côté $d = 6$ cm d'où $S = d^2$.

$$\text{Soit } S = 36 \text{ cm}^2 = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$h = 20 \text{ m}$$

$$\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$$

Donc

$$m = 72 \text{ kg}$$

1.3 Pourquoi y a-t-il un petit creux sous le rocher ?

Le creux sous le rocher permet d'avoir toujours une surface de contact minimale suffisante entre le rocher et l'eau. S'il n'y a pas de creux, cela revient à faire les calculs (voir la partie 1.2.2 Application numérique) avec $S = 1 \text{ cm}^2$, qui représente la section du tuyau. On obtient dans ce cas que l'on peut soulever une masse jusqu'à 3 kg seulement.

Selon les cahiers des charges, lorsque l'on construit une telle fontaine, il y a deux possibilités pour placer le creux : dans le socle, ou dans le rocher.



FIGURE 3 – Deux types de chambre

Chaque emplacement possible du creux possède des avantages différents, voir figure 3. Le creux dans le rocher permet une fabrication plus facile, toutefois, il faut faire attention à ce que le creux reste au-dessus du rocher lors de l'interruption de l'arrivée d'eau, afin de permettre le déclenchement autonome de la fontaine. En revanche, le creux dans le socle permet plus de liberté de mouvement, sous réserve que la forme du rocher le permette. Dans le cas d'une sphère parfaite, la structure peut alors pivoter indéfiniment dans toutes les directions. Toutefois, si la roche adopte une forme partiellement sphérique, la localisation du creux devient moins cruciale.

Pour notre dispositif expérimental destiné à prendre des mesures, nous avons délibérément opté pour l'emplacement du creux au sein du rocher, ce choix étant motivé par la facilité accrue du processus de construction.

1.4 Pour aller plus loin, questions d'étanchéité

Jusque-là, nous avons supposé que le support et le rocher agissent comme un piston dans un cric hydraulique idéal, c'est-à-dire sans frottement ni fuite. En réalité, une fuite trop importante, qui dépend de la hauteur à laquelle le rocher se soulève, peut être fatale.

Remarque : Lorsqu'on ouvre un robinet d'eau, on a la pression maximale, mais si on ouvre un deuxième robinet en même temps, la pression qui sort de chacun des deux robinet est plus faible que la pression maximale qui sortait auparavant du premier robinet.

Donc on admet qu'une fuite de surface égale à 1 cm^2 , ce qui correspond à la section d'ouverture d'un seul robinet standard, est supportable. En effet, si la fuite est plus grande, l'hypothèse d'une eau statique ne sera plus utilisable dans notre modèle.

La surface de fuite S_f est égale au périmètre du socle de diamètre $D = 30 \text{ cm}$ multiplié par la hauteur h_f du soulèvement de le rocher :

$$S_f = \pi \cdot D \cdot h_f \quad (4)$$

Soit :

$$h_f = \frac{S_f}{\pi \cdot D} \quad (5)$$

Remarque : La hauteur h_f doit être supérieur aux irrégularités de surface du socle et de le rocher (qui ne sont pas parfaitement lisses).

Application Numérique

$$h_f = 0,1\text{mm}$$

Ainsi, pour soulever une masse de l'ordre de 100 kg, il faut des irrégularités dans la surface de contact entre le rocher et le socle inférieures à 0,1 mm, sans quoi il faudra se contenter d'une masse plus faible.

1.5 Vérification expérimentale

Voici la fontaine réalisée (Figure 4), voir en annexe la construction.



FIGURE 4 – Reproduction maison

2 Expériences réalisées

Lors de l'élaboration du modèle théorique de la fontaine, celui-ci faisait intervenir des grandeurs. L'objectif est de mesurer les grandeurs facilement mesurables et puis grâce à notre modèle en déduire celles qui le sont moins

2.1 Mesures de pressions

Pour mesurer l'évolution de la pression lorsque l'eau se déplace dans la fontaine, on connecte les tuyaux des sorties du support prévu à cet effet aux pressiomètres qu'on a calibré pour qu'ils affichent tous la même pression initialement, ou l'orgue de tubes dont les niveaux d'eau initial sont marqués, correspondant à la pression atmosphérique et la variation du niveau d'eau nous permet de connaître la pression de manière plus précise. En effet les avec l'orgue on mesure les pressions en Pascal tandis qu'avec les pressiomètres on les mesure en hectopascal.

Pour mieux identifier les pressiomètres, nous les avons numérotés avec le numéro 1 (cf figure 5c) qui correspond à la sortie la plus proche du centre et 4 la plus éloignée.

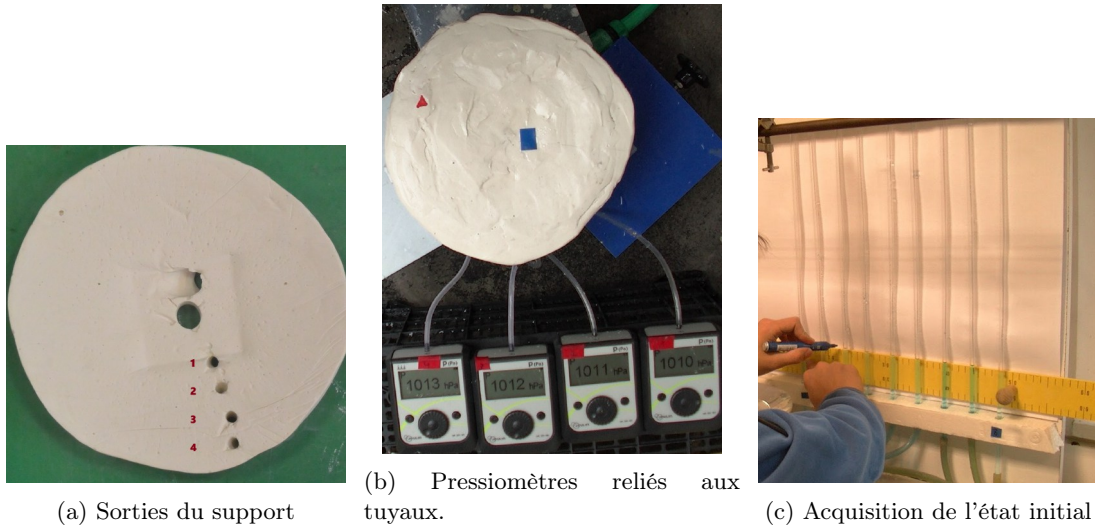


FIGURE 5 – Mesures de pressions

Pressions mesurées en fonction de la distance au centre pour les deux arrivées d'eau différentes

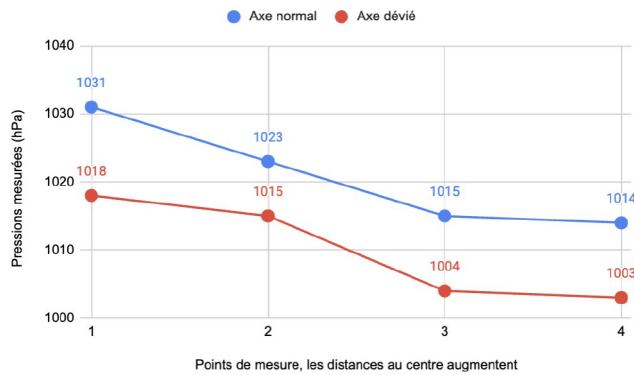


FIGURE 6 – Graphique des différentes mesures de pression

Les pressiomètres mesure donc une différence d'environ 20 hPa et 24 hPa avec l'orgue entre la première et dernière sortie alors qu'il n'y a seulement 1.3cm qui les sépare. Cela met donc en évidence les frottements entre les parois et l'eau. Cependant, ces valeurs restent toutefois élevées et suscitent certaines réserves quant à leur validité.

2.2 Mesures du débit volumique

En connaissant le débit volumique de l'eau dans notre système, on pourra alors connaître la vitesse du fluide à n'importe quel endroit. Pour mesurer ce débit, nous utilisons deux bassines, un chronomètre et une balance.

La première bassine sert à récupérer l'eau et centraliser les pertes parce qu'elle est trouée. Une fois que les ajustements faits pour que la galette soit totalement soulevée par l'eau, nous utilisons la deuxième bassine pour récupérer l'eau s'échappant de la première bassine. Nous mesurons ensuite le temps qu'il faut pour que la seconde bassine se remplisse de moitié, et on pèse la bassine avec une balance.

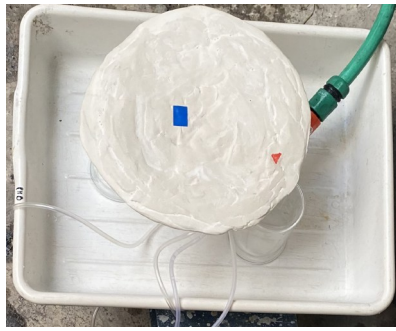
$$\begin{cases} \Delta t = 21.66s \text{ et } M = 4589.7g & \text{Pour l'axe normal} \\ \Delta t = 15.18s \text{ et } M = 4368.6g & \text{Pour l'axe dévié} \end{cases}$$

En enlevant la masse de la bassine lorsqu'elle est vide, nous avons la masse d'eau récupérée :

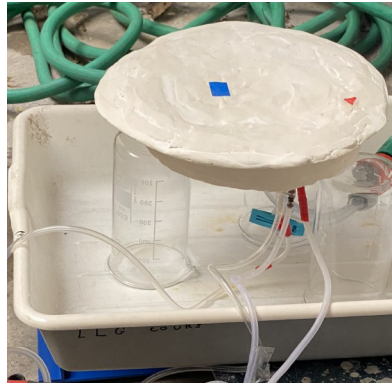
On a mesuré : $m_{bassine} = 418.3g$

Grâce à la masse volumique de l'eau, on a le volume récupéré :

$$V_{eau} = \frac{m_{eau}}{\rho_{eau}}$$



Première bassine



Première bassine



Deuxième bassine

FIGURE 7 – Montage avec les bassines

Et pour obtenir le débit volumique, on a la formule :

$$Q_v = \frac{V_{eau}}{\Delta t} = \frac{M - m_{bassine}}{\rho_{eau} \cdot \Delta t}$$

Application numérique :

$$\begin{cases} Q_v = 1.93 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} & \text{le débit volumique avec l'axe normal} \\ Q'_v = 2.60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} & \text{le débit volumique avec l'axe dévié} \end{cases}$$

Ces valeurs nous semblent cohérentes, en effet par l'inclinaison de l'axe dévié, l'eau est éjectée plus facilement

2.3 Étude du mouvement du rocher en rotation

Pour en apprendre plus sur les frottements qu'il y a entre la galette et l'eau. Nous nous sommes intéressés à l'évolution de la vitesse de la galette lorsqu'on la mettait en mouvement.

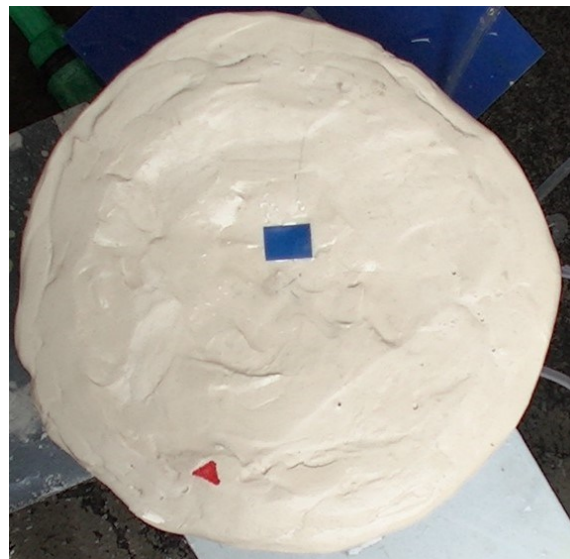


FIGURE 8 – Marqueurs sur la galette



FIGURE 9 – Caméra

Pour avoir une vitesse, nous avons dessiné des formes sur la surface de la galette, le but étant de suivre le triangle rouge et le rectangle bleu est placé à une distance connue du triangle rouge qui nous permettra de définir l'échelle dans le logiciel d'analyse vidéo. Pour filmer le mouvement nous avons placé une caméra juste au-dessus de la fontaine pour ne pas avoir d'effets de perspectives.

Nous avons filmé deux mouvements : lorsque la galette est en rotation et lorsqu'elle se balance. Et à l'aide du logiciel tracker, nous avons pu déterminer de manière automatique la position du triangle rouge dans chacune des images constituant la vidéo et ainsi déterminer sa vitesse en fonction du temps.

2.4 Expérience avec une lentille

Nous avons décidé de reproduire nos expériences avec une lentille en verre.

Notre choix est dû à plusieurs facteurs :

- meilleures finitions et plus esthétique
- meilleure répartition de masse
- vision plus précise des phénomènes ayant lieux sous la galette flottante

Nous avons donc recrée le montage (voir Figure 10) :

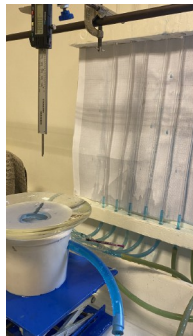


FIGURE 10 – Photo du montage

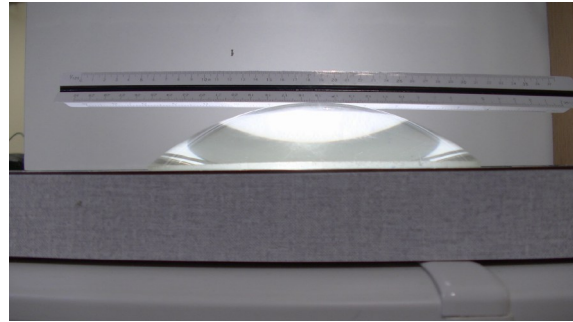


FIGURE 11 – Profil de la lentille

Afin d'avoir des nous avons fait variés certains paramètres. Nous avons crée un tableau avec ces différents paramètres, à retrouver en annexe.

2.4.1 Variation de débit

Tout d'abord intéressons nous à la variation de débit. Nous avons réalisés trois expérience en faisant varier le débits du robinet. Nous nous sommes placés dans une situation avec un débit faible, moyen puis fort. Grâce à ces expériences nous avons pu analyser la variations de différents paramètres. On peut observer la variation de pressions h dans les chambres. (voir Figure 13)

Remarque : On constate qu'on passe par un minimum de pression pour un débit moyen.

On peut aussi d'intéresser au soulèvement H de la lentille. La différence entre la position initiale H_1 et la position finale H_2 , nous donne l'épaisseur du filet d'eau qui circule au cours de l'expérience.

2.4.2 Variation de masse

Nous avons réalisés trois expérience en faisant varier la masses que nous posions sur la lentille. Nous nous sommes placés dans une situation avec un débit moyens et avons réalisé les expériences sans, avec 1 anneau et avec 2 anneaux. De même, nous obtenons une nouvelle courbe. Les courbes obtenues sont en accord avec

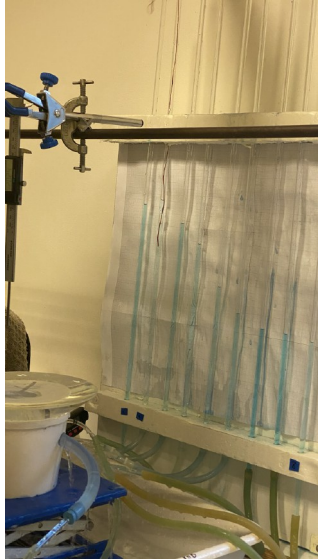


FIGURE 12 – Vue latérale de l'orgue

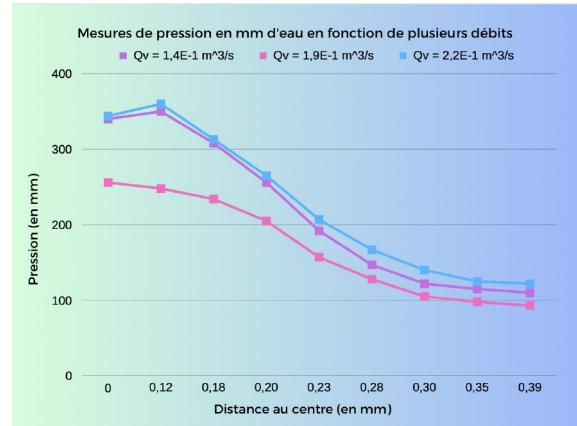


FIGURE 13 – Graphique représentant l'évolution de la pression en millimètre d'eau en fonction de plusieurs débits

nos attentes. En effet, plus la masse augmente, plus la galette appuie sur le tuyau et donc moins d'eau sort du tuyau.

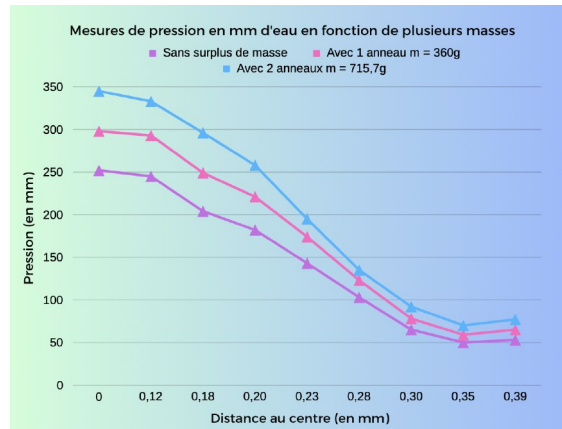
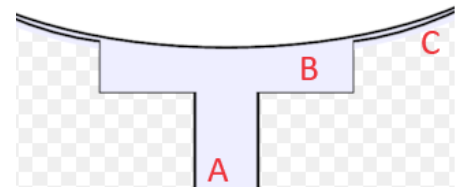


FIGURE 14 – Graphique représentant l'évolution de la pression en millimètre d'eau en fonction de plusieurs masses

3 Proposition d'un modèle théorique

Nous avons divisé le système en 3 zones d'études, la A correspond au jet d'eau entrant, la B à la chambre, et la C qui commence à la sortie de la chambre. Ce modèle s'intéresse particulièrement à la zone C.



On ne connaît pas les valeurs des coefficients de frottements. Cette section vise à déterminer ces grandeurs inconnues expérimentalement, à travers une modélisation théorique de l'évolution des pressions au fur et à mesure que l'eau s'écoule entre le socle et le rocher. Nous nous situons en régime permanent et stable.

3.1 Théorème de Bernoulli

Toutes les variables utilisées sont récapitulées en annexe. On souhaite déterminer la pression p à un angle ϕ , pour cela, on utilise le théorème de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 + \Delta E_v = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2} \quad (6)$$

avec

- * v - vitesse du fluide
- * g - accélération de la pesanteur
- * z - Altitude
- * p - Pression
- * ρ - masse volumique du fluide
- * ΔE_v correspond aux travail volumique des forces de frottements :

- Discrétisation du problème

Nous allons chercher à définir une équation différentielle à partir de notre équation de Bernoulli. Afin de déterminer la fonction pression à l'angle ϕ .

Nous utiliserons donc l'équation de Bernoulli en passant sous la forme infinitésimale. On fait alors d'abord une discrétisation du problème. On déduit à partir de l'équation de Bernoulli :

$$p_2 - p_1 = \Delta E_v - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g(z_2 - z_1)$$

- Déterminons la vitesse

soit :

$$dp = \delta E_v - \frac{\rho \cdot dv^2}{2} - \rho g \cdot dz$$

La première chose à faire face au nombre important de variables, est de mettre en relation celles-ci. Notre but étant de modéliser une fonction pression en fonction d'un angle, on va essayer d'exprimer l'altitude z et la vitesse v chacune en fonction de l'angle ϕ

De cette manière, on trouve (démonstration en annexe) :

$$z = R(1 - \cos(\phi))$$

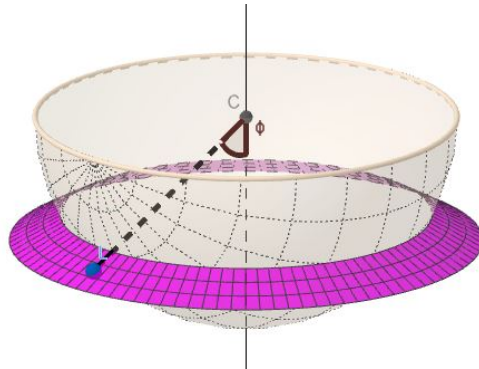


FIGURE 15 – Visualisation 3d de la surface (en rose) sans le socle

Sous l'hypothèse que l'eau est un fluide incompressible, le débit volumique est alors constant. Il s'exprime :

$$Q_v = S_\phi \cdot v_\phi$$

avec S_ϕ la surface normale au vecteur vitesse v_ϕ à l'angle ϕ

Il vient alors :

$$v_\phi = \frac{Q_v}{S_\phi}$$

La surface à l'angle ϕ , sous l'hypothèse que $h \ll R$, est égale à (démonstration en annexe) :

$$S_\phi = 2\pi R h \sin(\phi) \cos(\phi)$$

d'où :

$$v_\phi = \frac{a}{\sin(\phi) \cos(\phi)}$$

avec

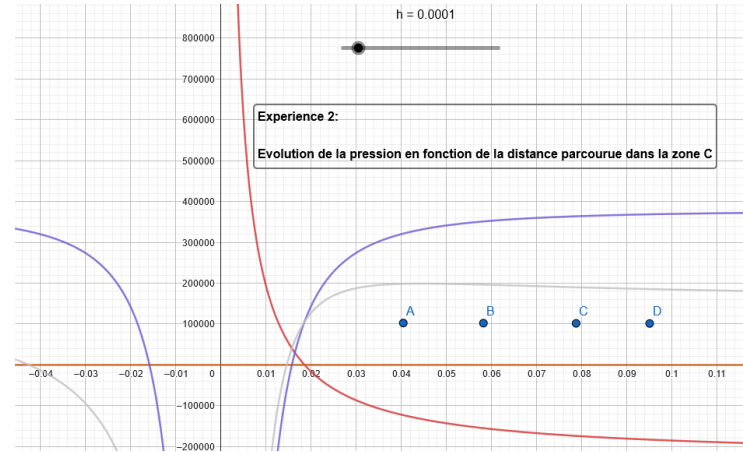
$$a = \frac{Q_v}{2\pi R h}$$

On obtient des formules pour la pression en fonction de ϕ et en fonction du régime :

en régime turbulent	en régime laminaire
$p_{turbulent}(\phi) = \frac{k_1 a^2 R}{h} f_T(\phi)$	$p_{laminaire}(\phi) = \frac{k_2 a R}{h} f_L(\phi)$
$+ \rho g R \cdot alt(\phi)$	$+ \rho g R \cdot alt(\phi)$
$+ \frac{\rho}{2} a^2 \cdot dyna(\phi)$	$+ \frac{\rho}{2} a^2 \cdot dyna(\phi)$
$+ p_0$	$+ p_{laminaire}(\phi_{tr})$

avec $f_L, f_T, alt, dyna$ des fonctions dépendantes de ϕ .

Interprétation : Avec cette expression de la pression, on remarque que deux grandeurs sont en compétition. En effet, la diminution de la vitesse, d'après le théorème de Bernoulli, a pour effet d'augmenter la pression (courbe bleue montrant la contribution de l'énergie cinétique à la pression). Cependant, tout en s'éloignant de l'axe, la surface de contact s'accroît et les frottements globaux avec (courbe rouge) et on observe que la pesanteur n'a pas de grande influence. La somme donne la pression global (courbe grise), et les mesures de pression menées durant des expériences concluent sur la domination des frottements, la pression diminue lorsqu'on s'éloigne du jet.



3.1.1 Nombre de Reynolds et énergie de frottements

Dans notre équation, il nous reste encore δE_v à déterminer en fonction de l'angle. On a affaire à des frottements fluides : il faut donc déterminer si on se trouve dans un régime laminaire ou turbulent. Pour déterminer le régime de frottements dans lequel on se trouve, on calcule le nombre de Reynolds Re :

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot e}{\eta}$$

avec $e = h \cdot \cos(x)$ l'épaisseur de la couche liquide. La vitesse et l'épaisseur de couche fluide varie avec l'angle. Ainsi, ce nombre de Reynolds n'est pas constant : c'est une fonction de l'angle. On remarque que v évolue selon l'inverse de e avec l'angle. Ainsi notre expression peut se simplifier en :

$$Re(\phi) = \frac{\rho \cdot Q_v}{2\pi R \cdot \eta \cdot \sin(\phi)}$$

3.1.2 Équation différentielle

Maintenant que l'on a explicité toutes les variables en fonction de ϕ , on peut résoudre notre équation

différentielle. Les calculs et la fonction obtenue sont spécifiés en annexe

La fonction Re est donc facilement modélisable puisqu'elle ne dépend que de constantes déjà déterminées. Mais on se retrouve face à un autre problème : on a un changement de régime qui s'opère à un certain angle $\phi_{transition}$. Le liquide se trouvant avant cet angle se trouve en régime turbulent avant de passer en régime laminaire. Ainsi on a deux δE_v qu'on appellera δE_{v1} l'énergie perdue en régime laminaire et δE_{v2} l'énergie perdue dans le cas du régime turbulent. On a alors (démonstration en annexe) :

$$\delta E_{v2} = \frac{-R \cdot d\phi}{e} \cdot k_2 \cdot v^2$$

$$\delta E_{v1} = \frac{-R \cdot d\phi}{e} \cdot k_1 \cdot v$$

3.2 Expression de la force résultante des pressions statiques

Maintenant que nous avons exprimé la pression, il faut exprimer la force exprimées par celles-ci

Nous avons deux régimes de pressions. On distingue alors les forces causées par des pressions à $\phi < \phi_{transition}$ (régime laminaire : on appelle cette résultante intermédiaire $F_{laminaire}$), et le cas contraire, où $\phi > \phi_{transition}$, on appelle cette résultante intermédiaire $F_{turbulent}$.

La résultante des forces de pression du fluide, verticale et vers le haut devient alors :

$$F_{Pstatique} = F_{laminaire} + F_{turbulent}$$

L'expression générale d'une force exercée par une pression statique sur une surface élémentaire est :

$$dF = P \cdot dS$$

Nous ne prenons que la composante verticale de nos forces ainsi obtenues : en effet, la composante horizontale de chaque force élémentaire est compensée par la composante horizontale de la force opposée par l'axe Δ .

L'expression devient alors :

$$dF(\phi) = p(\phi) \cdot \cos(\phi) \cdot dS$$

On a de plus (démonstration en annexe) :

$$dS = R^2 \sin(\phi) \cdot d\phi \cdot d\theta$$

Il vient donc que :

$$F_{turbulent} = R^2 \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{max}} p_{turbulent}(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$F_{laminaire} = R^2 \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} p_{laminaire}(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$$

On obtient ainsi (démonstration en annexe) :

$$F_{Pstatique} = 2\pi R^2 \left((\alpha_{turbulent} k_1 + \alpha_{laminaire} k_2) \frac{aR}{h} + \beta_{tot} \rho g R + \gamma_{tot} \rho a^2 + \delta_{tot} p_0 \right)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des constantes déterminées uniquement à partir de ϕ_{min} et de ϕ_{max} . On doit ajouter à cette force la force de pression dynamique exercée par l'arrivée d'eau. On approxime en supposant que la pression est uniforme dans la section de tuyau :

$$F_{Pt} = \frac{\rho Q_v^2}{2S_t} + p_0 S_t$$

Ainsi, pour atteindre la position d'équilibre, il faut que la somme de nos forces contrebalance la force due à la pression atmosphérique et le poids de la pierre.

$$mg + p_{atm} S_{socle} = F_{Pstatique} + F_{Pdynamique}$$

Il nous reste deux variables à déterminer à partir de nos mesures expérimentales : k_2 et h . Pour les déterminer, on peut modéliser la fonction donnant k_2 à partir de h grâce à notre précédente équation.

$$k_2 = h \frac{1}{\alpha a^2 R} \left(\frac{mg + p_{atm} S_{socle} - F_{Pdynamique}}{2\pi R^2} - \beta \rho g R - \gamma \rho a^2 - \delta p_0 \right)$$

En modélisant cette fonction sur une calculatrice graphique, nous pouvons finalement regarder l'allure de la courbe des pressions en fonction de h : on a isolé notre variable. On retrouve :

$$h = 0,6mm$$

$$k_2 = 39.7kg \cdot m^{-3}$$

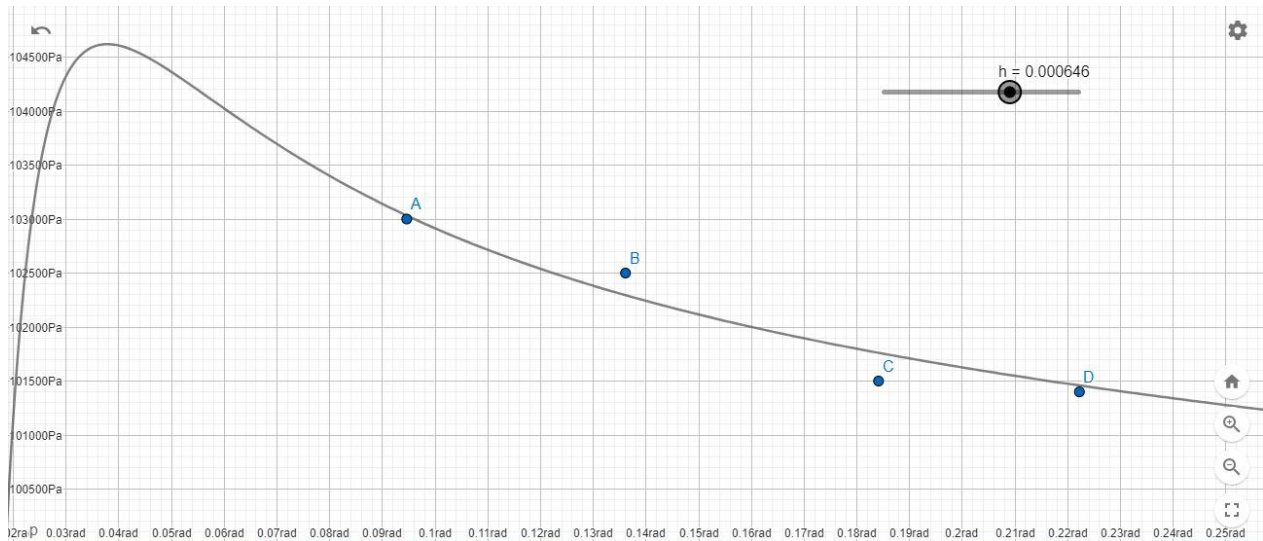


FIGURE 16 – évolution de la pression en fonction de l'angle $\phi_{\text{en zone C}}$

4 Étude du couplage en rotation du rocher

4.1 Mode opératoire

Tracker est un logiciel qui permet de numériser les trajectoires de mobiles à partir d'enregistrements vidéo. Nous avons donc décidé, grâce à ce logiciel, d'analyser la vidéo de mise en rotation de la galette.

Après avoir défini une échelle et la position initiale de la masse ponctuelle qui est dans notre cas le triangle rouge, nous avons lancé un repérage automatique des points sur 2085 images. Grâce aux valeurs obtenues soit le temps en secondes et la position en fonction de x et y , nous avons exporté notre fichier en extension txt dans Regressi, afin d'analyser nos données expérimentales.

4.2 Interprétation des résultats

4.2.1 La trajectoire

Tout d'abord intéressons nous à la trajectoire du triangle rouge. Nous obtenons le graphique de la Figure qui représente l'évolution de y en fonction de x .

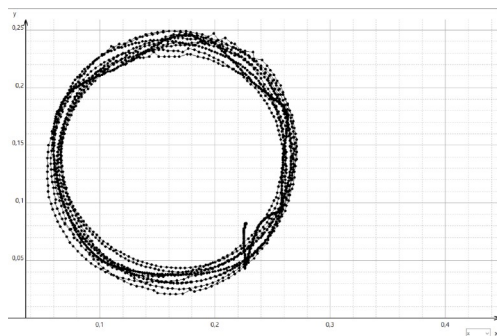


FIGURE 17 – Trajectoire, x en fonction de y

La trajectoire est circulaire, ce qui est bien en accord avec nos attentes.

Remarque : Certains points ne suivent pas une trajectoire circulaire. On pourrait l'expliquer par le fait qu'au début de la vidéo, la rotation de la galette est assez lente et celle-ci reste immobile pendant une certaine durée de temps.

2

4.2.2 La vitesse angulaire de rotation

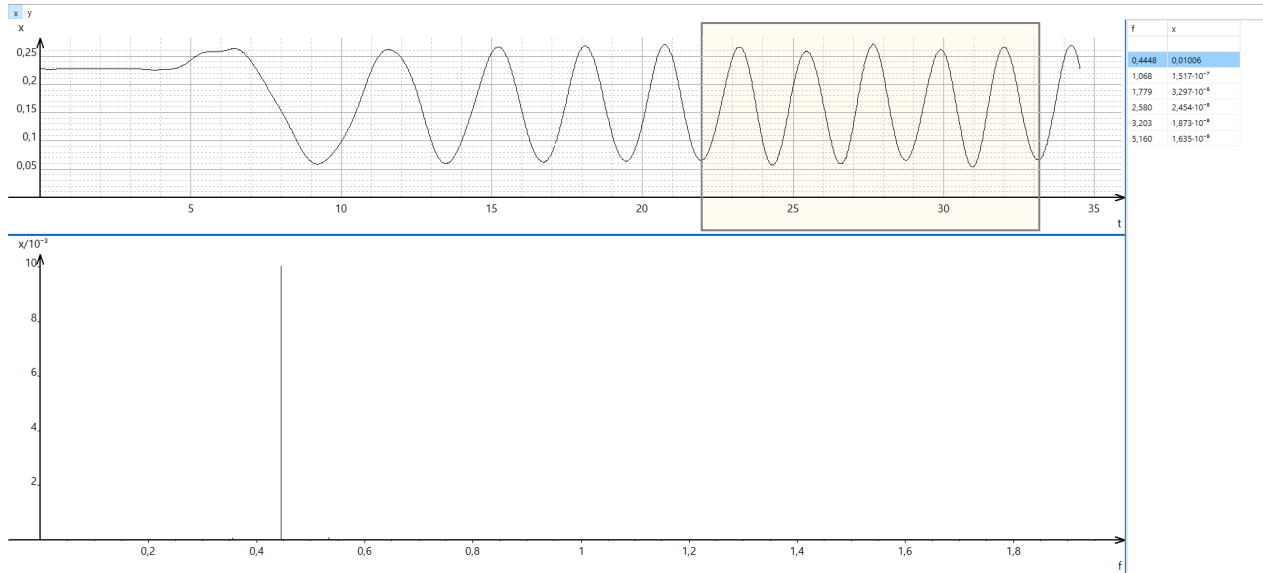


FIGURE 18 – Analyse de Fourier

On peut déterminer la valeur de la vitesse angulaire à l'aide de l'analyse de Fourier. Si on étudie une partie de la courbe représentant x en fonction du temps, à un instant où nous sommes en régime permanent, nous obtenons le graphique de la Figure 18.

On observe un spectre monospectral, avec une harmonique de fréquence f de 0,4448Hz. Or par définition la vitesse angulaire est donnée par l'expression :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Ce qui équivaut à :

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

L'application numérique nous donne $\omega = 2,8$ rad/s

4.2.3 Énergie cinétique de rotation

Notre système est en rotation, il a donc une énergie cinétique de rotation qui est donnée par l'expression :

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \cdot J_{\Delta} \cdot \omega^2$$

J_{Δ} est appelé le moment d'inertie.

- Expression de la vitesse

On sait, grâce au schéma de la Figure que :

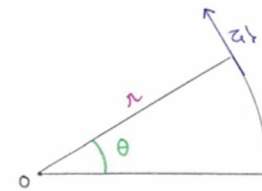


FIGURE 19 – Notations

$$\theta = \omega \cdot t$$

Ainsi :

$$v = (\theta)' \cdot r$$

D'où :

$$v = \omega \cdot r$$

- Expression de l'énergie cinétique de rotation

En élevant au carré :

$$v^2 = \omega^2 \cdot r^2$$

Ainsi puisque :

$$E_{c \text{ total}} = \frac{1}{2} \cdot \sum m_i \cdot v_i^2$$

En remplaçant :

$$E_{c \text{ total}} = \frac{1}{2} \cdot \sum m_i \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

Par identification, on obtient que :

$$J_{\Delta} = \sum m_i \cdot r^2$$

- Détermination de J_{Δ}

Déterminons la masse m_i . Comme nous le montre la Figure, on peut dire que le volume élémentaire de la galette est :

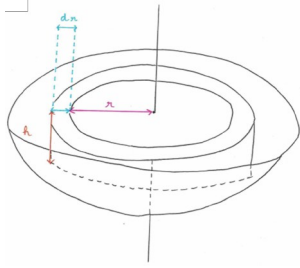


FIGURE 20 – Vue en 3D

$$dV = 2\pi r \cdot h \cdot dr$$

Ainsi :

$$m_i = \rho_{\text{platre}} \cdot dV$$

En remplaçant avec l'expression de dV , on obtient :

$$m_i = \rho_{\text{platre}} \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr$$

Déterminons h . En effectuant de la trigonométrie dans le triangle ABC de la Figure.

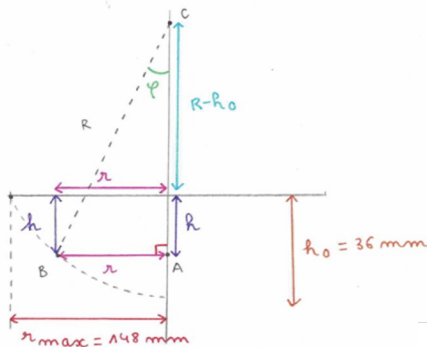


FIGURE 21 – Vue transversale de la situation

On obtient que :

$$\cos(\phi) = \frac{(R - h_0) + h}{R}$$

Ce qui équivaut à :

$$R \cdot \cos(\phi) = (R - h_0) + h$$

D'où :

$$h = R \cdot \cos(\phi) - R + h_0$$

Or on remarque que :

$$\sin(\phi) = \frac{r}{R}$$

De plus :

$$\cos(\phi) = \sqrt{1 - (\sin(\phi))^2}$$

En remplaçant, on obtient l'expression finale de h :

$$h = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} - R + h_0$$

Ce qui nous donne :

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} - R + h_0$$

Remarque : On peut procéder à une vérification. Si $r=0$, on retombe bien sur l'égalité $h=h_0$.

En intégrant, on peut déterminer la valeur de J_{Δ} .

$$J_{\Delta} = \int_0^{r_{\text{max}}} dm_i \cdot r^2$$

D'où, avec ce qui précède on peut écrire que :

$$J_{\Delta} = \rho \cdot 2\pi \int_0^{r_{\text{max}}} r \cdot h \cdot dr \cdot r^2$$

On obtient pour expression finale :

$$J_{\Delta} = \rho \cdot 2\pi \int_0^{r_{\text{max}}} r \cdot (\sqrt{R^2 - r^2} - R + h_0) \cdot dr \cdot r^2$$

Nous pouvons déterminer la valeur de J_{Δ} par une approximation numérique avec le logiciel Regressi.

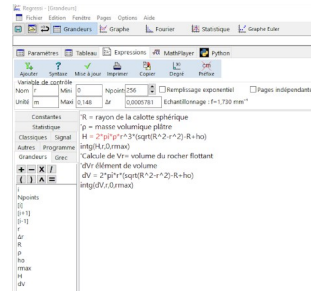


FIGURE 22 – Expressions sur le logiciel Regressi

Remarque : ρ_{platre} nous est inconnu. Nous pouvons chercher sur internet une valeur mais celle-ci reste approximative. Or pour déterminer ρ_{platre} , il nous faut le volume et la masse. Nous connaissons la masse mais pas le volume. Par déplacement d'eau, on récupère 1094g d'eau soit 1094m³.

Ainsi en appliquant la relation :

$$\rho_{\text{platre}} = \frac{m_{\text{galette}}}{dV}$$

On obtient que : $\rho_{\text{platre}} = 1360 \text{ kg/m}^3$

Nous pouvons désormais déclarer dans Regressi ρ_{platre} comme un paramètre. On obtient ainsi que : $J_{\Delta} = 12,51 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}$

Pour finir, on trouve par application numérique que :

$$E_{cr} = 4,9 \cdot 10^{-2} J$$

4.2.4 Conservation de l'énergie

Nous pouvons maintenant nous intéresser à la conservation de l'énergie entre 2 points que l'on notera A et B.

Par définition :

$$\Delta E_{cr} = \text{Somme des travaux des couples extérieurs}$$

Notons qu'un couple de force peut mettre un objet en rotation. On a donc par définition :

$$\Delta E_{cr} = +\Gamma \cdot (\Theta_B - \Theta_A)$$

Avec :

- $\vec{\Gamma}$ le couple d'entraînement en N/m qui est moteur d'où le +.
 - $\vec{\Theta}_A$ et $\vec{\Theta}_B$ les deux forces qui s'exercent sur le solide en rotation.
- On a ainsi grâce à ce qui précède que :

$$\frac{1}{2} \cdot J_{\Delta} \cdot (\omega_B^2 - \omega_A^2) = \Gamma \cdot \omega \cdot \Delta t$$

Remarque : Le ω_f représenté sur l'axe des ordonnées est la vitesse de rotation "filtrée" qui nous donne uniquement les valeurs positives de ω , d'où l'appellation.

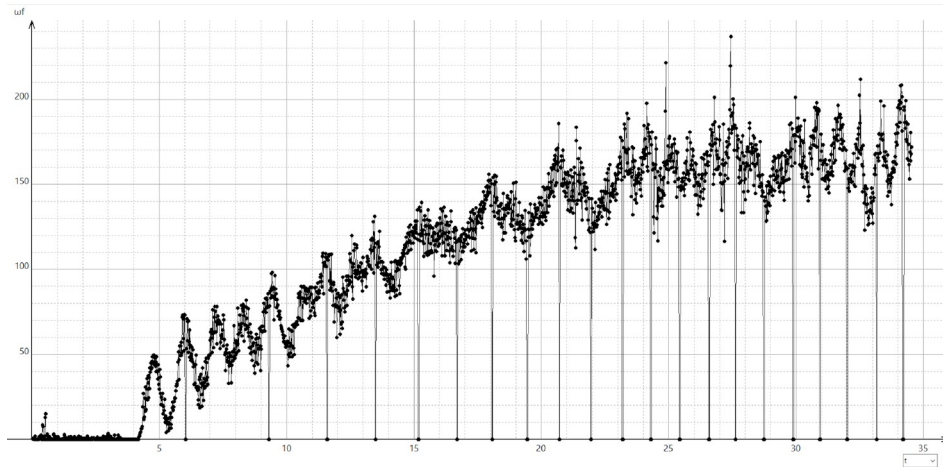


FIGURE 23 – Évolution de la vitesse angulaire en fonction du temps

Si nous simplifions la situation pour le moment à un instant t par la Figure.

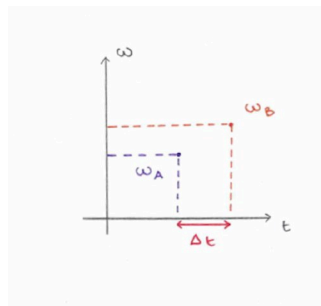


FIGURE 24 – Graphique simplifié

Nous pouvons dire que :

$$\omega_B = \omega_A + (\omega)' \Delta t$$

$$(\omega_B)^2 = (\omega_A)^2 + 2 \cdot \omega_B \cdot (\omega)' \Delta t + ((\omega)' \Delta t)^2$$

On néglige l'ordre 2. On a ainsi que :

$$(\omega_B)^2 - (\omega_A)^2 = 2 \cdot \omega_B \cdot (\omega)' \Delta t$$

En remplaçant dans la relation précédente, on obtient l'égalité :

$$\frac{1}{2} \cdot J_{\Delta} \cdot (2 \cdot \omega_A \cdot (\omega)' \Delta t) = \Gamma \cdot \omega$$

En simplifiant, on obtient :

$$J_{\Delta} \cdot (\omega)' = \Gamma$$

Or le couple Γ dépend de plusieurs facteurs :

- de la surface de contact S
- de la vitesse de rotation du fluide ω_F
- de la vitesse de rotation du disque ω
- d'une coefficient d'entraînement k_e

On remarque de plus sur la Figure 22 qu'à un certain instant la vitesse de rotation devient constante. Cela signifie que le fluide et la galette ont atteint la même vitesse de rotation.

En prenant en compte cette remarque, en se plaçant dans une situation laminaire et en notant que le fluide tourne à une vitesse en entraînant le disque flottant, on peut finalement noter :

$$J_{\Delta} \cdot (\omega)' = k_e \cdot S \cdot (\omega_F - \omega)$$

Ce qui équivaut à :

$$(\omega)' + \frac{k_e \cdot S}{J_{\Delta}} \cdot \omega = \frac{k_e \cdot S}{J_{\Delta}} \cdot \omega_F$$

On pose :

$$c = \frac{k_e \cdot S}{J_{\Delta}}$$

Notre relation s'écrit alors :

$$(\omega)' + c \cdot \omega = c \cdot \omega_F$$

- Équation différentielle

En résolvant l'équation ci-dessus (démonstration en annexe), on obtient :

$$\omega = \omega_F \cdot (1 - e^{-ct})$$

Modélisons nos valeurs avec cette dernière relation et déterminons expérimentalement la valeur de c . Avec Regressi, on obtient la modélisation suivante :

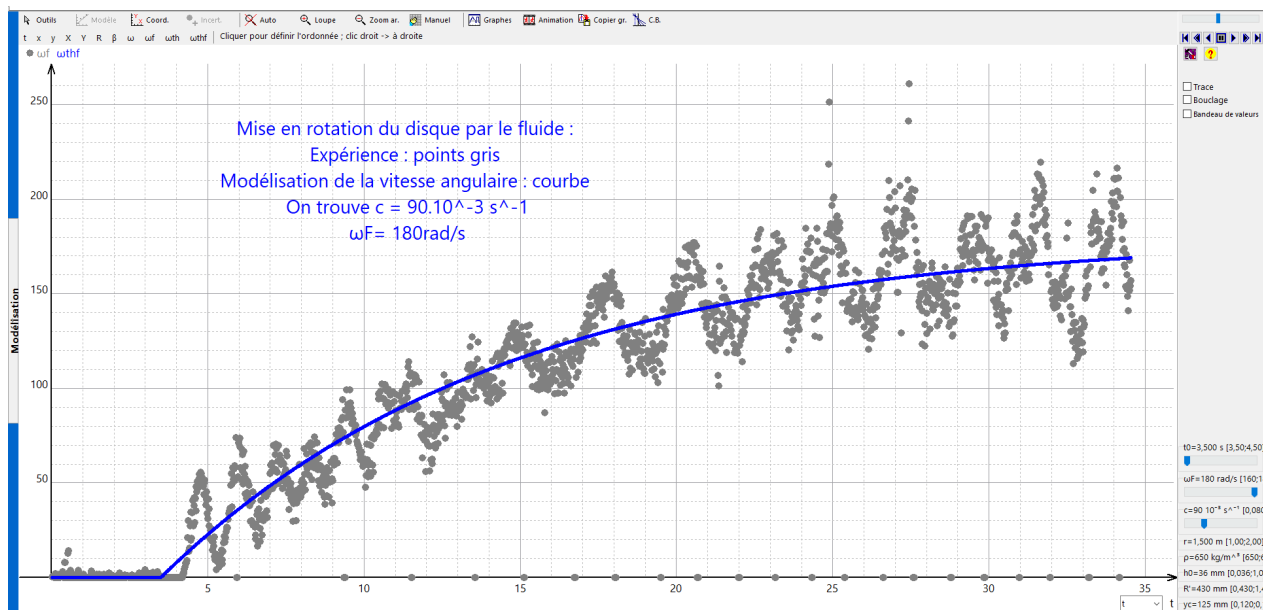


FIGURE 25 – Modélisation de la vitesse angulaire

- Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement, noté k_e , permet d'évaluer la difficulté avec laquelle la surface d'un matériau peut glisser en contact d'un autre matériau et c'est en partie grâce à notre modélisation que nous allons pouvoir le déterminer. Nous avons dit précédemment que :

$$c = \frac{k_e \cdot S}{J_{\Delta}}$$

Ainsi :

$$k_e = \frac{J_{\Delta} \cdot c}{S}$$

Nous avons vu précédemment de S est la surface de contact entre la galette et l'eau. La surface de contact est un carré de 7cm de côté, et donc de surface $S=49 \text{ cm}^2$.

L'application numérique nous donne :

$$k_e = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}^{-1}\text{s}^{-1}$$

4.2.5 Oscillation amortie du rocher

Si on dévie l'axe de la galette de plâtre de sa position stable, on observe alors une oscillation à la manière d'un pendule. On peut alors se demander comment modéliser une telle évolution.

Nous avons alors fait l'expérience. à l'aide du logiciel tracker, nous avons pu suivre l'angle formé entre la verticale et l'axe de la galette. L'évolution du système s'apparente à celui d'un pendule simple amorti. On fait l'hypothèse de frottements en kv^2 . Pour modéliser l'évolution théorique du système, on a commencé par établir un bilan des forces. Si on peut faire l'approximation de modéliser notre galette comme un point matériel :

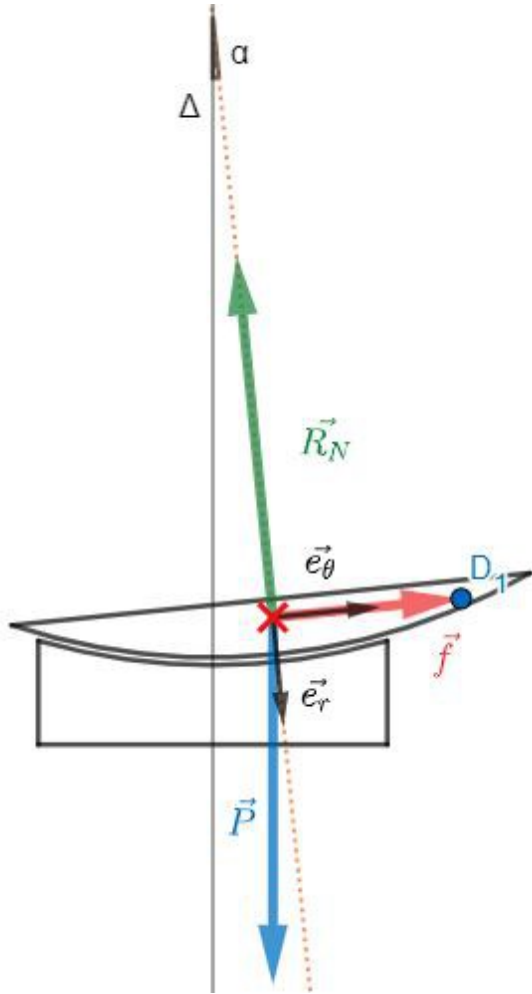


FIGURE 26 – Bilan des forces sur la galette à un moment quelconque de l'oscillation

On associe une base polaire locale dans le référentiel galiléen pour étudier le mouvement d'oscillation. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{R}_N &= -R_N \cdot \vec{e}_r \\ \vec{f} &= -k \cdot v \cdot \vec{v} \\ \vec{P} &= mg \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{e}_r - mg \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

D'après le PFD, comme R est constant :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m\vec{a}$$

Or R est constant. On en déduit les valeurs des vitesses et des accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -R \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{e}_r + R \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{v} &= R \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

On peut ainsi en déduire :

$$\begin{aligned} mg \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{e}_r - mg \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{e}_\theta - R_N \cdot \vec{e}_r - k|R\dot{\alpha}|R\dot{\alpha} \cdot \vec{e}_\theta \\ = m(-R\dot{\alpha}^2 \cdot \vec{e}_r + R\ddot{\alpha} \cdot \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

Soit en projection sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ :

$$\begin{cases} mg \cdot \cos(\alpha) - R_N = -mR \cdot \dot{\alpha}^2 \\ -mg \cdot \sin(\alpha) - k|R\dot{\alpha}|R\dot{\alpha} = mR \cdot \ddot{\alpha} \end{cases}$$

On obtient notre équation différentielle en utilisant notre projection sur \vec{e}_θ . L'équation finale est donc :

$$\ddot{\alpha} + \frac{k}{m}|R\dot{\alpha}|\dot{\alpha} + \frac{g}{R}\sin(\alpha) = 0$$

Nous avons pu résoudre cette équation numériquement par une méthode itérative d'euler à l'aide d'un programme python spécifié en annexe. Nous avons ainsi pu exporter les angles théoriques et les comparer avec les angles expérimentaux.

Nous avons pu résoudre cette équation numériquement à l'aide d'un programme python spécifié en annexe. Nous avons ainsi pu exporter les angles

théoriques et les comparer avec les angles expérimentaux.

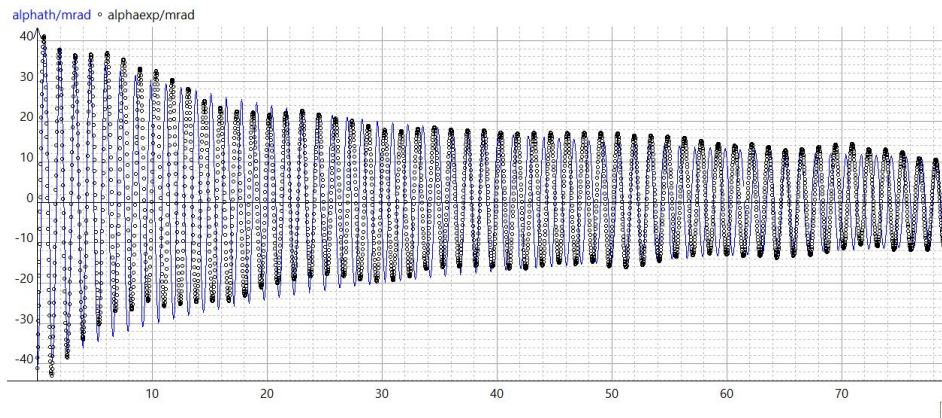


FIGURE 27 – Résultats expérimentaux et théoriques

Pour un coefficient de frottement $k = 1,75 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ L'amortissement entre la théorie et l'expérimental est relativement semblable ce qui confirme notre hypothèse sur les frottements. Néanmoins, on observe une fréquence légèrement différente

5 Conclusion

Après avoir vu un chef-d'œuvre du sculpteur allemand Christian TOBIN, nous avons voulu savoir comment la roche se déplace, tourne et lévite. Comment pouvons-nous expliquer cette danse envoûtante ?

Nous sommes heureux d'avoir modélisé et construit ce caillou flottant pour la première fois qui présente des similitudes mais aussi des différences avec le modèle entièrement sphérique (kugel ball). Nous sommes ravis d'avoir pu comparer notre modèle à la pratique et nous avons construit trois fontaines. Nous avons appris de nombreuses compétences lors de la réalisation de ce projet comme rédiger en L^AT_EX, utiliser certains logiciels comme Tracker et Regressi, ou encore comment prendre des mesures permettant de vérifier ou réfuter notre modèle. Dans les jours à venir, nous allons poursuivre notre aventure en continuant nos mesures notamment, la hauteur de soulèvement et la pression plus précisément, grâce à un matériel qui arrivera sous peu.

Merci à Anne-Laure Dalibard, avec qui nous avons pu discuter de ce projet et qui nous a fait partager son travail en tant que mathématicienne et sa modélisation des masses d'eau. Et merci à notre incroyable professeur Denis Creusot.

6 Équipe officielle de C'Génial

- Eva est la team leader, conceptrice des maquettes et a fait la physique avec les mains pour esquisser l'intrigue.
- Syphax est le designer, a relu le document et c'est un membre résilient.

7 Autres étudiants impliqués

Nous tenons à remercier nos camarades de classe Nacim AISSANI, Eugénie JACOVIC, Raphaël PORTAIL qui ont beaucoup contribué à ce projet mais n'ont pas pu poursuivre l'aventure. Ils ont créé le modèle théorique et participé à la collecte de données expérimentales.

8 Bibliographie

Jacco H. Snoeijer and Ko van der Weele, "Physics of the granite sphere fountain," American Journal of Physics 82, 1029 (2014), doi : 10.1119/1.4886365. View online

5 paradoxes à surmonter pour faire flotter un caillou - C'Génial 2024 - Annexes

Syphax MAHTOUT, Eva SMIDTAS
17 Mars 2024 - Lycée Louis-le-Grand - Paris

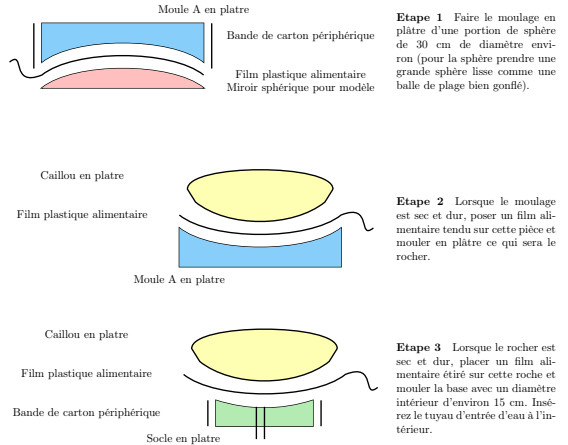
Table des matières

1 Annexes	2
1.1 Construction de la fontaine	2
1.2 Mesure débit	3
1.3 Expression de dS en fonction de $d\phi$ et $d\theta$	5
1.4 Equation différentielle	5
1.5 Calcul de $p(\phi)$ la primitive de $\frac{dp}{d\phi}$	6
1.6 Résolution des intégrales nous donnant la résultante des pressions statiques	7
1.7 Calcul de la surface	12
1.8 Expression de z en fonction de ϕ	12
1.9 expression de δE_{s2}	13
1.10 Equation différentielle afin de déterminer le coefficient de frottement k_c	13
1.11 Programme python résolvant l'équation différentielle	14
1.12 Tableaux récapitulatifs des expériences avec la lentille	16
1.13 Glossaire des variables utilisées	17
2 Photos	18

1 Annexes

1.1 Construction de la fontaine

A la fin de la vidéo en introduction, on voit une maquette fonctionnelle effectuée en plâtre. Pour la fabriquer :



Enfin, lorsque tout est sec, ajouter les raccord de tuyau d'arrosage, et brancher sur un robinet pour machine à laver comme sur la figure 2.

Remarque 1 : Il n'est pas aisé de sculpter une section de sphère parfaite à 0,1 mm près pour le socle et la pierre. Dans notre réalisation, nous nous sommes contentés de 10 kg.

Remarque 2 : Pour déclencher une rotation autonome, nous avons ajouté un axe qui provoque une arrivée d'eau déviée.



FIGURE 1 - Moulage Étape 2



FIGURE 2 - Moulage Étape 3

1.2 Mesure débit

En connaissant le débit volumique de l'eau dans notre système, on pourra alors connaître la vitesse du fluide à n'importe quel endroit. Pour mesurer ce débit, nous utilisons deux bassines, un chronomètre et une balance.



Expérience 1



Expérience 2

$$\begin{cases} \Delta t = 21.66s \text{ et } M = 4589.7g & \text{Pour l'axe normal} \\ \Delta t = 15.18s \text{ et } M = 4368.6g & \text{Pour l'axe dévié} \end{cases}$$

FIGURE 3 - Marqueurs sur la galette

En enlevant la masse de la bassine lorsqu'elle est vide, nous avons la masse d'eau récupérée :

$$m_{eau} = M - m_{bassine}$$



FIGURE 4 - Pesée de la bassine vide

On a mesuré : $m_{bassine} = 418.3g$

Grâce à la masse volumique de l'eau, on a le volume récupéré :

$$V_{eau} = \frac{m_{eau}}{\rho_{eau}}$$

Et pour obtenir le débit volumique, on a la formule :

$$Q_v = \frac{V_{eau}}{\Delta t} = \frac{M - m_{bassine}}{\rho_{eau} \cdot \Delta t}$$

Application numérique :

$$\begin{cases} Q_v = 1.93 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} & \text{le débit volumique avec l'axe normal} \\ Q'_v = 2.60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} & \text{le débit volumique avec l'axe dévié} \end{cases}$$

Ces valeurs nous semblent cohérentes, en effet par l'inclinaison de l'axe dévié, l'eau est éjectée plus facilement

1.3 Expression de dS en fonction de dφ et dθ

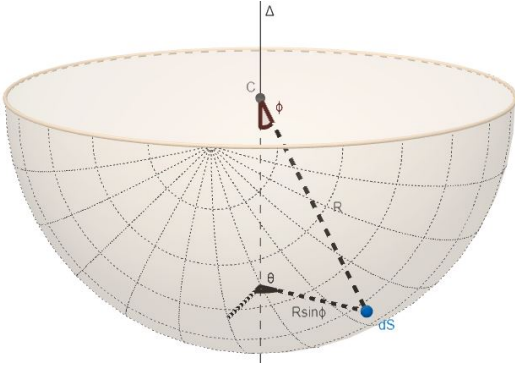


FIGURE 5 – Représentation d'une surface dS sur le rocher

On a ainsi :

$$dS = R \sin(\phi) d\theta \cdot R d\phi$$

soit :

$$dS = R^2 \sin(\phi) d\theta d\phi$$

1.4 Equation différentielle

On avait précédemment déterminé que :

$$dp = \delta E_v - \rho g \cdot dz - \frac{\rho}{2} d\alpha^2$$

L'idée est d'exprimer de $d\alpha^2$, dz , et δE_v , en fonction de $d\phi$. Pour cela, on utilise les mises en relations précédentes établies entre nos différents grandeurs et l'angle. Chaque grandeur étant une fonction de l'angle, on exploite le fait que $\frac{df(\phi)}{d\phi} = f' \iff df(\phi) = f' \cdot d\phi$

Ainsi, la dérivée de $\cos(\phi)$ est $-\sin(\phi)$, est la dérivée de $\frac{a^2}{\sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2}$ est $2a^2 \frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3}$. On obtient ainsi les équations différentielles suivantes :

5

en régime turbulent	en régime laminaire
$dp = -\frac{k_1 a^2 R}{h \sin(\phi) \cos(\phi)^2} d\phi$	$dp = -\frac{k_2 a R}{h \sin(\phi) \cos(\phi)^2} d\phi$
$-\rho g R \sin(\phi) d\phi$	$-\rho g R \sin(\phi) d\phi$
$+ \rho a^2 \left(\frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3} \right) d\phi$	$+ \rho a^2 \left(\frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3} \right) d\phi$

On divise par $d\phi$, ce qui nous permet ainsi d'exprimer la dérivée de la pression par rapport à l'angle formé avec l'origine de l'écoulement :

en régime turbulent	en régime laminaire
$\frac{dp}{d\phi} = -\frac{k_1 a^2 R}{h \sin(\phi)^2 \cos(\phi)^3}$	$\frac{dp}{d\phi} = -\frac{k_2 a R}{h \sin(\phi) \cos(\phi)^2}$
$-\rho g R \sin(\phi)$	$-\rho g R \sin(\phi)$
$+ \rho a^2 \left(\frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3} \right)$	$+ \rho a^2 \left(\frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3} \right)$

Nous pouvons maintenant intégrer pour retrouver la pression en fonction de ϕ .

1.5 Calcul de $p(\phi)$ la primitive de $\frac{dp}{d\phi}$

On appelle $P_{laminaire}$ et $P_{turbulent}$ les fonctions pressions associées respectivement aux écoulements laminaires et turbulents. $P_{turbulent}(\phi)$ n'est défini que sur l'intervalle $[\phi_{min}; \phi_{tr}]$ et $P_{laminaire}$ n'est défini que sur $[\phi_{tr}; \phi_{max}]$. En intégrant l'expression de la dérivée de p par rapport à ϕ . Il vient :

en régime turbulent	en régime laminaire
$P_{turbulent}(\phi) = \int_{\phi_{min}}^{\phi} \frac{dp}{d\phi} d\phi + C_1$	$P_{laminaire}(\phi) = \int_{\phi_{tr}}^{\phi} \frac{dp}{d\phi} d\phi + C_2$

avec C_1 et C_2 des constantes. En remplaçant $\frac{dp}{d\phi}$ par son expression :

en régime turbulent	en régime laminaire
$P_{turbulent}(\phi) = -\int_{\phi_{min}}^{\phi} \frac{k_1 a^2 R}{h \sin(\phi)^2 \cos(\phi)^3} d\phi$ (1)	$P_{laminaire}(\phi) = -\int_{\phi_{tr}}^{\phi} \frac{k_2 a R}{h \sin(\phi) \cos(\phi)^2} d\phi$ (2)
$-\int_{\phi_{min}}^{\phi} \rho g R \sin(\phi) d\phi$ (3)	$-\int_{\phi_{tr}}^{\phi} \rho g R \sin(\phi) d\phi$ (4)
$+\int_{\phi_{min}}^{\phi} \rho a^2 \frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3} d\phi$ (5)	$+\int_{\phi_{tr}}^{\phi} \rho a^2 \frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3} d\phi$ (6)
$+C_1$	$+C_2$

Une primitive de $\frac{1}{\sin(\phi)^2 \cos(\phi)^3}$ est $\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi)+1}{-\sin(\phi)+1} \right) - \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi)^2 - 2}{-2 \sin(\phi) + \sin(\phi)^3}$. On calcule ainsi le terme (1) :

$$(1) : -\int_{\phi_{min}}^{\phi} \frac{k_1 a^2 R}{h \sin(\phi)^2 \cos(\phi)^3} d\phi = \frac{k_1 a^2 R}{h} \left[\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi)+1}{-\sin(\phi)+1} \right) - \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi_{min})^2 - 2}{-2 \sin(\phi) + \sin(\phi)^3} \right]_{\phi_{min}}^{\phi}$$

6

Une primitive de $\frac{1}{\sin(\phi) \cos(\phi)^2}$ est $\frac{1}{\cos(\phi)} + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi))$. On calcule ainsi le terme (2) :

$$(2) : -\int_{\phi_{tr}}^{\phi} \frac{k_2 a R}{h \sin(\phi) \cos(\phi)^2} d\phi = \frac{k_2 a R}{h} \left[\frac{1}{\cos(\phi)} + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) \right]_{\phi_{tr}}^{\phi}$$

Une primitive de $\sin(\phi)$ est $-\cos(\phi)$. On peut donc calculer (3) et (4) :

$$(3) : -\int_{\phi_{min}}^{\phi} \rho g R \sin(\phi) d\phi = \rho g R [\cos(\phi)]_{\phi_{min}}^{\phi} \quad \text{et} \quad (4) : -\int_{\phi_{tr}}^{\phi} \rho g R \sin(\phi) d\phi = \rho g R [\cos(\phi)]_{\phi_{tr}}^{\phi}$$

Une primitive de $\frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3}$ est $-\frac{1}{2 \sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2}$. On peut donc calculer les termes (5) et (6) :

$$(5) : \int_{\phi_{min}}^{\phi} \rho a^2 \frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3} d\phi = \frac{\rho a^2}{2} \left[\frac{1}{\sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2} \right]_{\phi_{min}}^{\phi} \quad \text{et} \quad (6) : \int_{\phi_{tr}}^{\phi} \rho a^2 \frac{\cos(\phi)^2 - \sin(\phi)^2}{\cos(\phi)^3 \sin(\phi)^3} d\phi = \frac{\rho a^2}{2} \left[\frac{1}{\sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2} \right]_{\phi_{tr}}^{\phi}$$

En combinant nos expressions ainsi formées, on détermine ainsi $P_{laminaire}(\phi)$ et $P_{turbulent}(\phi)$:

en régime turbulent	en régime laminaire
$P_{turbulent}(\phi) = \frac{k_1 a^2 R}{h} \left(\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi_{min})+1}{-\sin(\phi_{min})+1} \right) + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) \right) - \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi_{min})^2 - 2}{-2 \sin(\phi) + \sin(\phi)^3} + \frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi)+1}{-\sin(\phi)+1} \right) + \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi)^2 - 2}{-2 \sin(\phi) + \sin(\phi)^3} + \rho g R (\cos(\phi) - \cos(\phi_{min})) + \frac{\rho a^2}{2} \left(\frac{1}{\sin(\phi_{min})^2 \cos(\phi_{min})^2} - \frac{1}{\sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2} \right) + p_0$	$P_{laminaire}(\phi) = \frac{k_2 a R}{h} \left(\frac{1}{\cos(\phi)} + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) \right) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi_{tr})) + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi_{tr})) + \rho g R (\cos(\phi) - \cos(\phi_{tr})) + \frac{\rho a^2}{2} \left(\frac{1}{\sin(\phi_{tr})^2 \cos(\phi_{tr})^2} - \frac{1}{\sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2} \right) + P_{laminaire}(\phi_{tr})$

en effet, $P_{turbulent}(\phi_{min}) = p_0$ d'où $C_1 = p_0$, et $P_{laminaire}(\phi_{tr}) = P_{turbulent}(\phi_{tr})$ d'où $C_2 = P_{turbulent}(\phi_{tr})$

1.6 Résolution des intégrales nous donnant la résultante des pressions statiques

Nous avons précédemment démontré que :

$$F_{turbulent} = R^2 \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} P_{turbulent}(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi R^2 \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} P_{turbulent}(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi$$

$$F_{laminaire} = R^2 \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{max}} P_{laminaire}(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi R^2 \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{max}} P_{laminaire}(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi$$

7

Travaillons premièrement sur le turbulent. On remplace $P_{turbulent}(\phi)$ par son expression :

$$F_{turbulent} = 2\pi R^2 \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} \left(\frac{k_1 a^2 R}{h} \left(\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi_{min})+1}{-\sin(\phi_{min})+1} \right) + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) \right) - \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi_{min})^2 - 2}{-2 \sin(\phi) + \sin(\phi)^3} + \rho g R (\cos(\phi) - \cos(\phi_{min})) + \frac{\rho a^2}{2} \left(\frac{1}{\sin(\phi_{min})^2 \cos(\phi_{min})^2} - \frac{1}{\sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2} \right) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi$$

En distribuant le facteur $\cos(\phi) \sin(\phi)$, puis en utilisant le fait que l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales, on obtient :

$$F_{turbulent} = 2\pi R^2 \left(\int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} \frac{k_1 a^2 R}{h} \left(\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi_{min})+1}{-\sin(\phi_{min})+1} \right) + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \right) (1)$$

$$+ \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} \frac{k_1 a^2 R}{h} \left(\frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi (2)$$

$$+ \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} \rho g R \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi (3)$$

$$- \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} \rho g R \cos(\phi_{min}) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi (4)$$

$$- \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} \frac{\rho a^2}{2} \frac{1}{\sin(\phi) \cos(\phi)} d\phi (5)$$

$$+ \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} \frac{\rho a^2}{2} \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{\sin(\phi_{min})^2 \cos(\phi_{min})^2} d\phi (6)$$

$$+ \int_{\phi_{min}}^{\phi_{tr}} p_0 \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi (7)$$

Réolvons séparément les intégrales : Une primitive de $\cos(\phi) \sin(\phi)$ est $\frac{1}{2} \sin(\phi)^2$. Il en découle la résolution

8

immédiate des intégrales (1), (4), (6) et (7) :

$$(1) : \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \frac{k_1 a^2 R}{h} \left(\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi_{\min}) + 1}{-\sin(\phi_{\min})} \right) - \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi_{\min})^2 - 2}{-\sin(\phi_{\min}) + \sin(\phi_{\min})^3} \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi$$

$$= \frac{k_1 a^2 R}{h} \left(\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi_{\min}) + 1}{-\sin(\phi_{\min})} \right) - \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi_{\min})^2 - 2}{-\sin(\phi_{\min}) + \sin(\phi_{\min})^3} \right) \left(\frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2 \right)$$

$$(4) : - \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \rho g R \cos(\phi_{\min}) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi = \rho g R \cos(\phi_{\min}) \left(\frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 \right)$$

$$(6) : \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \frac{\rho}{2} a^2 \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{\sin(\phi_{\min})^2 \cos(\phi_{\min})^2} d\phi = \frac{\rho}{2} a^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2}{\sin(\phi_{\min})^2 \cos(\phi_{\min})^2} \right)$$

$$(7) : \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \rho_0 \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi = \rho_0 \left(\frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2 \right)$$

Nous n'avons trouvé aucune primitive pour (2). Nous avons donc décidé de conserver l'intégrale telle qu'elle est actuellement et nous ferons une résolution numérique approchée pour nos valeurs particulières de ϕ_{\min} et ϕ_{tr} :

$$(2) : \frac{k_1 a^2 R}{h} \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \left(\frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi)^2 - 2}{-\sin(\phi) + \sin(\phi)^3} - \frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi) + 1}{-\sin(\phi)} \right) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi$$

Réolvons (3). Une primitive de $\cos(\phi)^2 \sin(\phi)$ est $\frac{\cos(\phi)^3}{3}$. Il en résulte :

$$(3) : \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \rho g R \cos(\phi)^2 \sin(\phi) d\phi = \rho g R \left(\frac{\cos(\phi_{\min})^3}{3} - \frac{\cos(\phi_{tr})^3}{3} \right)$$

Réolvons (5). Une primitive de $\frac{1}{\sin(\phi) \cos(\phi)}$ est $\ln |\tan(\phi)|$. Il en résulte :

$$(5) : - \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \frac{\rho}{2} a^2 \frac{1}{\sin(\phi) \cos(\phi)} d\phi = \frac{\rho}{2} a^2 (\ln |\tan(\phi_{\min})| - \ln |\tan(\phi_{tr})|)$$

On somme les différents résultats obtenus pour obtenir l'expression finale :

$$F_{\text{turbulent}} = 2\pi R^2 \left(\frac{k_1 a^2 R}{h} \left(\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi_{\min}) + 1}{-\sin(\phi_{\min})} \right) - \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi_{\min})^2 - 2}{-\sin(\phi_{\min}) + \sin(\phi_{\min})^3} \right) \right. \\ \times \left(\frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2 \right) \\ + \frac{k_1 a^2 R}{h} \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \left(\frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi)^2 - 2}{-\sin(\phi) + \sin(\phi)^3} - \frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi) + 1}{-\sin(\phi)} \right) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \\ + \rho g R \left(\frac{\cos(\phi_{\min})^3}{3} - \frac{\cos(\phi_{tr})^3}{3} \right) \\ + \rho g R \cos(\phi_{\min}) \left(\frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 \right) \\ + \frac{\rho}{2} a^2 (\ln |\tan(\phi_{\min})| - \ln |\tan(\phi_{tr})|) \\ + \frac{\rho}{2} a^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2}{\sin(\phi_{\min})^2 \cos(\phi_{\min})^2} \right) \\ \left. + \rho_0 \left(\frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2 \right) \right)$$

9

Encore une fois le terme (1) est trop difficile à calculer, on devra donc faire une approximation numérique. Pour les autres termes, on n'a pas besoin d'introduire de nouvelles primitives. Ainsi, on obtient :

$$F_{\text{laminaire}} = 2\pi R^2 \left(\alpha_{\text{laminaire}} \frac{k_2 a R}{h} + \beta_{\text{laminaire}} \rho g R + \gamma_{\text{laminaire}} \rho a^2 + \delta_{\text{laminaire}} \rho_0 \right)$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha_{\text{laminaire}} = \left(-\frac{1}{\cos(\phi_{tr})} - \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi_{tr})) + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi_{tr})) \right) \left(\frac{1}{2} \sin(\phi_{\max})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 \right) \\ + \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \left(\frac{1}{\cos(\phi)} - \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \\ \beta_{\text{laminaire}} = \frac{\cos(\phi_{tr})^3}{3} - \frac{\cos(\phi_{\max})^3}{3} + \frac{\cos(\phi_{tr})}{2} (\sin(\phi_{tr})^2 - \sin(\phi_{\max})^2) \\ \gamma_{\text{laminaire}} = \ln |\tan(\phi_{tr})| - \ln |\tan(\phi_{\max})| + \left(\frac{1}{2} \frac{\sin(\phi_{\max})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2}{\sin(\phi_{tr})^2 \cos(\phi_{tr})^2} \right) \\ \delta_{\text{laminaire}} = \frac{1}{2} \sin(\phi_{\max})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$F_{\text{statique}} = 2\pi R^2 \left((\alpha_{\text{turbulent}} k_1 + \alpha_{\text{laminaire}} k_2) \frac{a R}{h} + \beta_{\text{tot}} \rho g R + \gamma_{\text{tot}} \rho a^2 + \delta_{\text{tot}} \rho_0 \right)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \beta_{\text{tot}} = \beta_{\text{turbulent}} + \beta_{\text{laminaire}} \\ \gamma_{\text{tot}} = \gamma_{\text{turbulent}} + \gamma_{\text{laminaire}} \\ \delta_{\text{tot}} = \delta_{\text{turbulent}} + \delta_{\text{laminaire}} \end{cases}$$

11

Soit, en factorisant, on obtient :

$$F_{\text{turbulent}} = 2\pi R^2 \left(\alpha_{\text{turbulent}} \frac{k_1 a^2 R}{h} + \beta_{\text{turbulent}} \rho g R + \gamma_{\text{turbulent}} \rho a^2 + \delta_{\text{turbulent}} \rho_0 \right)$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha_{\text{turbulent}} = \left(\frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi_{\min}) + 1}{-\sin(\phi_{\min})} \right) - \frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi_{\min})^2 - 2}{-\sin(\phi_{\min}) + \sin(\phi_{\min})^3} \right) \left(\frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2 \right) \\ + \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{tr}} \left(\frac{1}{2} \frac{3 \sin(\phi)^2 - 2}{-\sin(\phi) + \sin(\phi)^3} - \frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sin(\phi) + 1}{-\sin(\phi)} \right) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \\ \beta_{\text{turbulent}} = \frac{\cos(\phi_{\min})^3}{3} - \frac{\cos(\phi_{tr})^3}{3} + \frac{\cos(\phi_{\min})}{2} (\sin(\phi_{\min})^2 - \sin(\phi_{tr})^2) \\ \gamma_{\text{turbulent}} = \ln |\tan(\phi_{\min})| - \ln |\tan(\phi_{tr})| + \left(\frac{1}{2} \frac{\sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2}{\sin(\phi_{\min})^2 \cos(\phi_{\min})^2} \right) \\ \delta_{\text{turbulent}} = \frac{1}{2} \sin(\phi_{tr})^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi_{\min})^2 \end{cases}$$

On applique le même raisonnement pour $F_{\text{laminaire}}$. On a :

$$F_{\text{laminaire}} = 2\pi R^2 \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} p_{\text{laminaire}}(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi$$

En remplaçant $p_{\text{laminaire}}$ par son expression :

$$F_{\text{laminaire}} = 2\pi R^2 \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \left(\frac{k_2 a R}{h} \left(\frac{1}{\cos(\phi)} + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) \right) \right. \\ - \frac{1}{\cos(\phi_{tr})} - \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi_{tr})) + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi_{tr})) \\ + \rho g R (\cos(\phi) - \cos(\phi_{tr})) \\ \left. + \frac{\rho}{2} a^2 \left(\frac{1}{\sin(\phi_{tr})^2 \cos(\phi_{tr})^2} - \frac{1}{\sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2} \right) \right. \\ \left. + p_{\text{laminaire}}(\phi_{tr}) \right) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi$$

En distribuant le facteur $\cos(\phi) \sin(\phi)$, et en utilisant la propriété que l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales :

$$F_{\text{laminaire}} = 2\pi R^2 \left(\int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \frac{k_2 a R}{h} \left(\frac{1}{\cos(\phi)} + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi)) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi)) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \right. \quad (1)$$

$$+ \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \frac{k_2 a R}{h} \left(-\frac{1}{\cos(\phi_{tr})} - \frac{1}{2} \ln(1 - \cos(\phi_{tr})) + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos(\phi_{tr})) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \quad (2)$$

$$+ \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \rho g R \cos(\phi)^2 \sin(\phi) d\phi \quad (3)$$

$$- \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \rho g R \cos(\phi_{tr}) \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \quad (4)$$

$$- \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \frac{\rho}{2} a^2 \frac{1}{\sin(\phi) \cos(\phi)} d\phi \quad (5)$$

$$+ \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \frac{\rho}{2} a^2 \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{\sin(\phi_{tr})^2 \cos(\phi_{tr})^2} d\phi \quad (6)$$

$$+ \int_{\phi_{tr}}^{\phi_{\max}} \rho_0 \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \quad (7)$$

10

1.7 Calcul de la surface

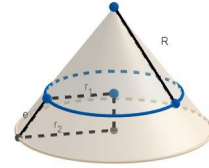


FIGURE 6 - cône ayant pour base le cercle inscrit dans le socle et pour sommet le centre de la sphère

S_ϕ correspond à la surface du tronc de cône compris entre les deux cercles de rayons r_1 et r_2 et s'exprime :

$$S_\phi = \pi(r_1 + r_2)e$$

Or e varie en fonction de h .

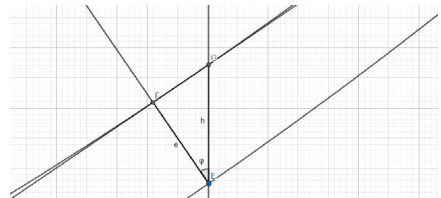


FIGURE 7 - représentation plan des grandeurs e et h

On a $e \in R$. Pour de petites portions de cercles, la courbure s'assimile à une droite. On a ainsi :

$$\begin{cases} e = h \cos(\phi) \\ r_1 = R \sin(\phi) \\ r_2 = R \sin(\phi) \end{cases}$$

d'où :

$$S_\phi = 2\pi R h \sin(\phi) \cos(\phi)$$

1.8 Expression de z en fonction de ϕ

On a d'après la figure ci-dessus :

$$z = R - R \cos(\phi)$$

12

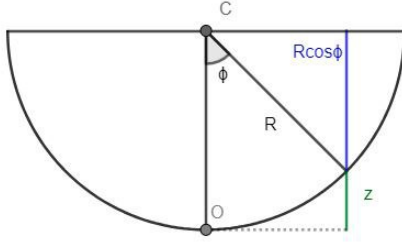


FIGURE 8 – représentation plan des grandeurs R, ϕ et z

soit :
$$z = R(1 - \cos(\phi))$$

1.9 expression de δE_{v2}

Notre δE_v On a un travail volumique de frottements :

$$\delta E_v = \frac{\delta W(F)}{dV}$$

avec dV un volume élémentaire. On a des forces de frottements dépendant du régime donné par le nombre de Reynolds. Elles sont soit proportionnelles à v en régime laminaire, soit à v^2 en régime turbulent.

En régime turbulent	en régime laminaire
$\frac{\delta E_{v1}}{\delta L} = -k_1 \cdot \frac{v^2 \cdot \delta S}{dS}$	$\frac{\delta E_{v2}}{\delta L} = -k_2 \cdot v \cdot \frac{\delta S}{dS}$

Notre travail est effectué sur une longueur élémentaire. On a une force opposée au déplacement.

$$\delta W(F) = -df \cdot R \cdot d\phi$$

L'expression du volume est égale à la surface multipliée par l'épaisseur de l'écoulement.

$$dV = e \cdot dS$$

En combinant nos expressions ainsi formées, et en simplifiant par dS , il vient :

En régime turbulent	en régime laminaire
$\delta E_{v1} = -\frac{k_1 v^2 R}{e}$	$\delta E_{v2} = -\frac{k_2 R v}{e}$

1.10 Equation différentielle afin de déterminer le coefficient de frottement k_2

Résolvons cette équation différentielle par variation de constante. On a donc :

$$(\omega)' + c \cdot \omega = 0$$

En primitivant, on obtient que :

$$\omega = Ae^{-ct} + B$$

Avec B une constante nulle. Ainsi en remplaçant :

$$(\omega)' = -c \cdot Ae^{-ct} = -c \cdot \omega$$

D'où :

$$(\omega)' + c \cdot \omega = 0$$

Ce qui fonctionne.

Cette fois on pose que :

$$\omega = K \cdot Ae^{-ct}$$

Ainsi en dérivant et en remplaçant dans la relation précédente on obtient :

$$K \cdot (-c) \cdot Ae^{-ct} + K' \cdot Ae^{-ct} + K \cdot c \cdot Ae^{-ct} = c \cdot \omega F$$

En simplifiant :

$$K' = \frac{c \cdot \omega F}{A} \cdot e^{ct}$$

En primitivant :

$$K = \frac{\omega F}{A} \cdot e^{ct} + B$$

Avec B une constante. D'où :

$$\omega = \left(\frac{\omega F}{A} \cdot e^{ct} + B \right) \cdot Ae^{-ct}$$

$$\omega = \frac{\omega F}{A} + AB e^{-ct}$$

Si $t \rightarrow +\infty$. On obtient que :

$$\omega = \frac{\omega F}{A}$$

D'où :

$$A = 1$$

Si $t=0$. On obtient :

$$\omega F + B = 0$$

$$\omega F = -B$$

Ainsi :

$$\omega = \omega F \cdot (1 - e^{-ct})$$

1.11 Programme python résolvant l'équation différentielle

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

#variables
R = 0.43
k = 1.75
m = 1.8
g = 9.81

# Définition de l'équation différentielle
def equation_diff(y, z):
    global R
    global k
    return -k*(R/m)*(z*y) - ((g/R) * math.sin(y))
```

```
global g
global m
if z>0:
    dydt = z
    dzdt = -(k*(R/m)*(z*y)) - ((g/R) * math.sin(y))
else:
    dydt = z
    dzdt = (k*(R/m)*(z*y)) - ((g/R) * math.sin(y))
return dydt, dzdt

# Conditions initiales
y0 = -0.041 # Valeur initiale de y
z0 = 0.0 # Valeur initiale de y'
t0 = 0.0 # Temps initial

# Intervalle de temps et pas de temps
t_fin = 80
pas_de_temps = 0.000001 # Le pas de temps pour la méthode d'Euler. Il a besoin d'être très faible.
# En effet, on a une oscillation amortie et la dérivée varie brusquement au sommet de l'oscillation
nb_points = int(t_fin / pas_de_temps)

# Tableaux pour stocker les valeurs de y et de t
t = np.linspace(t0, t_fin, nb_points)
y = np.zeros(nb_points)
z = np.zeros(nb_points)

# Assignation des conditions initiales
y[0] = y0
z[0] = z0

# Méthode d'Euler
for i in range(1, nb_points):
    dydt, dzdt = equation_diff(y[i-1], z[i-1])
    y[i] = y[i-1] + dydt * pas_de_temps # Mise à jour de y
    z[i] = z[i-1] + dzdt * pas_de_temps # Mise à jour de y'

#fonction qui permet de tronquer à une décimale donnée (évite les 0.542000000000001 qui avaient tendance à :
def truncate_float(float_number, decimal_places):
    multiplier = 10 ** decimal_places
    return int(float_number * multiplier) / multiplier

#transformation des valeurs de t en une liste
t = [i for i in np.arange(0, t_fin, pas_de_temps)]

#export txt avec juste phi et le temps est synchronisé avec la frame
with open('export_equadiff_non_lineaire.txt','w') as txt:
    for i in range(0, len(t), 20000):
        txt.write(str(y[i]))
        txt.write("\n")
print("DONE")
# Affichage des résultats
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(t, y, label='y(t)')
plt.xlabel('Temps')
```

```
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Évolution de y en fonction du temps")
plt.show()
```

1.12 Tableaux récapitulatifs des expériences avec la lentille

FIGURE 9 – Tableau récapitulatif de la variation de débit

FIGURE 10 – Tableau récapitulatif de la variation de masse

1.13 Glossaire des variables utilisées

h : hauteur de soulèvement du rocher, C est une constante inconnue expérimentalement.
 e : épaisseur de la couche fluide entre le rocher et le socle. C est un variable dépendant de h .
 R : rayon du rocher. On a déterminé $R = 428.2mm$
 z : altitude. On a fixé $z = 0m$ à la base du rocher
 ϕ : angle dans le plan vertical.
 θ : angle dans le plan horizontal.
 ρ : masse volumique de l'eau. $\rho = 1000kg \cdot m^{-3}$.
 m : masse du rocher.
 $p(\phi)$: pression au point du fluide formant un angle ϕ avec la base du rocher.
 p_0 : pression de la chambre, considérée uniforme.
 p_t : pression statique de l'eau à la sortie du tuyau Q_v : débit volumique
 k : coefficient de frottement
 E_v : énergie volumique
 S_t : section du tuyau S_0 : section de la chambre, considérée circulaire pour simplifier les calculs. $S_0 = 49 \cdot 10^{-4}m^2$
 O : point situé à la base du rocher
 C : point au centre du rocher
 S_{socle} : surface projetée du socle
 R_s : rayon du support
 S_ϕ : surface de révolution balayée horizontalement par le segment d'épaisseur e . Δ : axe vertical, au centre du rocher

17

2 Photos



FIGURE 11 – Photo de la grande fontaine à l'entrée du musée Parque de la ciencias

Vidéo avec la lentille : <https://youtu.be/N0S6jX0xc1Q>

18

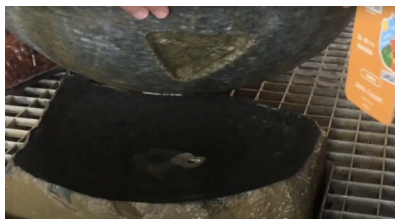


FIGURE 12 – Petite fontaine avec le rocher soulevé du socle ce qui laisse apparaître l'arrivée d'eau et le creux sous le rocher



FIGURE 13 – Reproduction maison

19

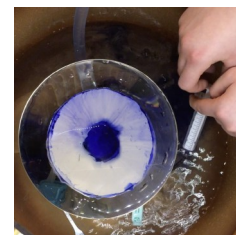


FIGURE 14 – Encre et lentille



Image 1



Image 2

FIGURE 15 – Marqueurs sur la galette