Corrigé du problème 1 : Jumelles

I. Modélisation simplifiée des jumelles

Q1. On considère un objet A à l'infini sur l'axe optique. Où se trouvent l'image A_1 de A par la lentille $\mathcal{L}_1$ et l'image A' de A_1 par la lentille $\mathcal{L}_2$? Justifier la nécessité de former l'image A' à cet endroit.

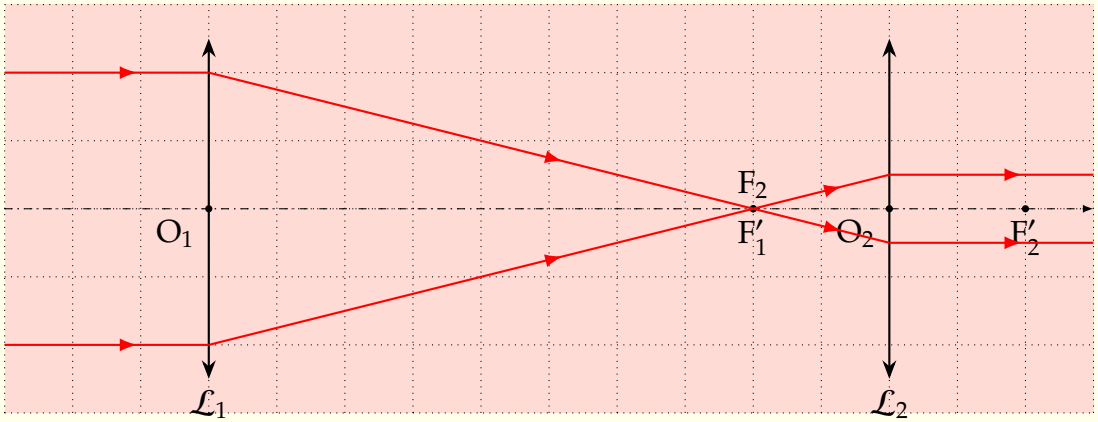
Réponse (/0.5 pt)

A_1 se trouve sur F'_1, foyer principal image de $\mathcal{L}_1$. Comme F'_1 et F_2 sont confondus, A_1 se situe sur F_2, foyer principal objet de $\mathcal{L}_2$. Son image par $\mathcal{L}_2$ est donc à l'infini sur l'axe optique.

Cela est nécessaire car un œil emmétrope voit nettes des images à l'infini sans accommodation.

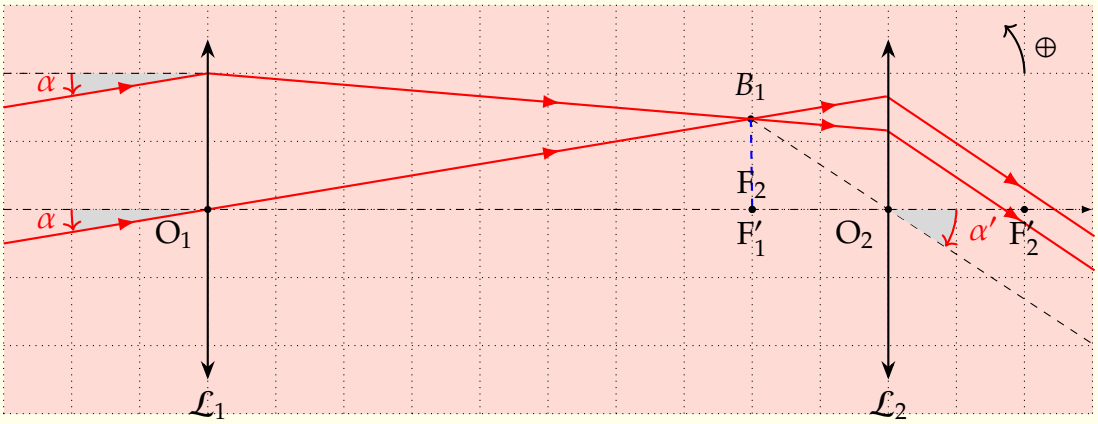
Q2. Construire le trajet des rayons lumineux sur le schéma ci-après.

Réponse (/1 pt)



Q3. Construire le trajet des rayons lumineux sur le schéma ci-après. Placer B_1, image de B par $\mathcal{L}_1$ et noter α' l'angle orienté que font les rayons émergents par rapport à l'axe optique.

Réponse (/1.5 pts)



Q4. Le grossissement G du système optique est par définition :

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha}}$$

Déterminer l'expression du grossissement G de ce système optique en fonction de f_1' et f_2' (on rappelle qu'on se place dans les conditions de Gauss).

Réponse (/1pt)

On travaille dans les conditions de Gauss, donc :

$$\alpha \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\overline{F_2B_1}}{\overline{O_1F_2}} = \frac{\overline{F_2B_1}}{f_1'}$$

De même :

$$\alpha' \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha' \simeq \tan\alpha' = \frac{\overline{F_2B_1}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{\overline{F_2B_1}}{f_2'}$$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'}}$$

Q5. Faire l'application numérique. Justifier que ce dispositif permet bien de voir les objets plus gros. Expliquer pourquoi l'image est retournée.

Réponse (/1 pt)

L'application numérique donne :

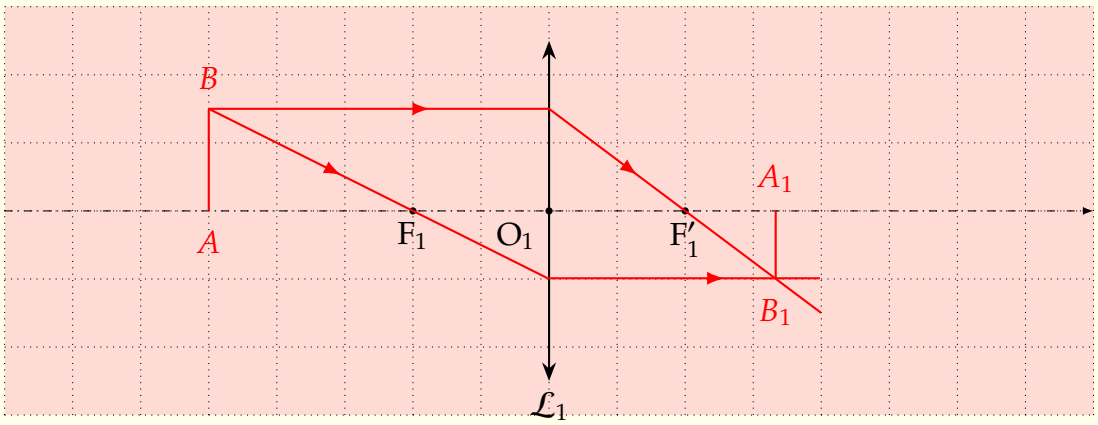
$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'} = -20}$$

Ainsi :

- $|G| > 1$: l'image apparaît **grossie** à travers la jumelle.
- $G < 0$: l'image est **retournée**.

Q6. Sur le schéma ci-après, représenter l'image A_1B_1 de l'objet AB par la lentille $\mathcal{L}_1$.

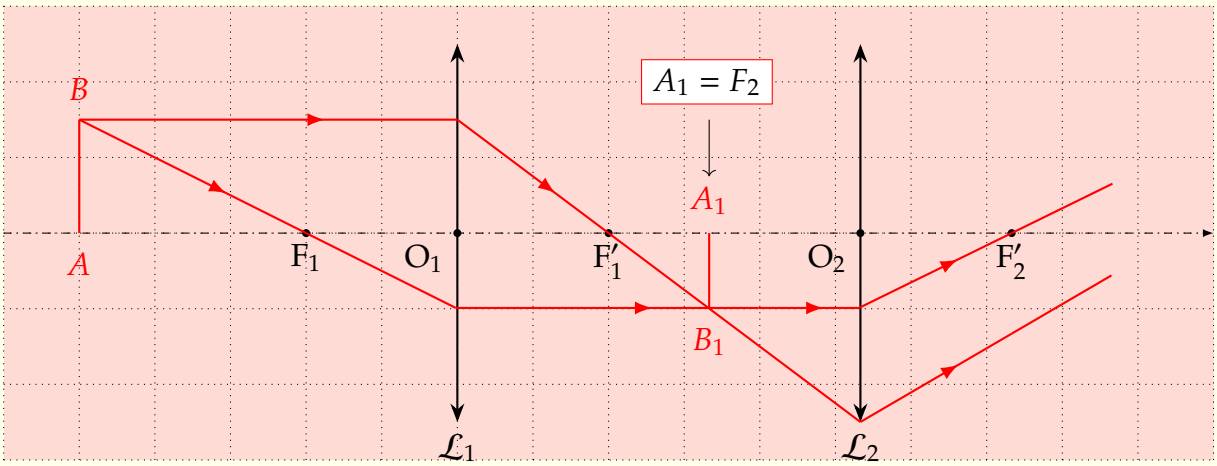
Réponse (/0.5 pt)



Q7. Où doit se situer la lentille $\mathcal{L}_2$ par rapport à A_1 ? Représenter la lentille $\mathcal{L}_2$ sur le schéma précédent, ainsi que le trajet des rayons lumineux issus de A_1B_1 à travers $\mathcal{L}_2$.

Réponse (/1.5 pts)

A_1 doit être confondu avec F_2, foyer objet de $\mathcal{L}_2$, afin que l'œil puisse voir l'image de A_1B_1 à l'infini.



Q8. On note d la distance $\overline{F_1'F_2}$ et $D = -\overline{O_1A}$ la distance positive à laquelle se situe l'objet A par rapport à l'objectif. Déterminer l'expression de D en fonction de d et f_1'.

Réponse (/1.5 pts)

La relation de conjugaison entre A et A_1 donne :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f_1'+d} + \frac{1}{D} = \frac{1}{f_1'}$$

Donc :

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{f_1'} - \frac{1}{f_1'+d} = \frac{f_1'+d-f_1'}{f_1'(f_1'+d)}$$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{D = \frac{f_1'(f_1'+d)}{d}}$$

Q9. L'oculaire a une amplitude de déplacement maximale $d_{\text{max}} = 10$ mm. Calculer jusqu'à quelle distance minimale D_{min} il est possible de voir un objet net à travers la jumelle.

Réponse (/1.5 pts)

On vient d'établir que :

$$\boxed{D = \frac{f_1'(f_1'+d)}{d} = f_1'\left(\frac{f_1'}{d}+1\right)}$$

Donc D diminue lorsque d augmente. On obtient donc D_{min} pour $d_{\text{max}} = 10$ mm. Ainsi :

$$D_{\text{min}} = f_1'\left(\frac{f_1'}{d_{\text{max}}}+1\right) = 4{,}2 \text{ m}$$

II. Prisme de Porro

Q10. Justifier que les angles à la base du prisme sont égaux à $45°$.

Réponse (/0.5 pt)

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, donc $\widehat{KLM} = \widehat{LMK}$.
Comme la somme des angles d'un triangle est égale à π, on a :

$$\widehat{KLM} + \widehat{LMK} + \widehat{MKL} = \pi \quad \Rightarrow \quad 2\,\widehat{KLM} + \widehat{MKL} = \pi$$

Le triangle étant rectangle en K, on a :

$$\widehat{MKL} = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc :} \quad \boxed{\widehat{KLM} = \widehat{LMK} = \frac{\pi}{4} = 45°}$$

Q11. Justifier que le rayon lumineux est non dévié après traversée du dioptre au point C.

Réponse (/0.5 pt)

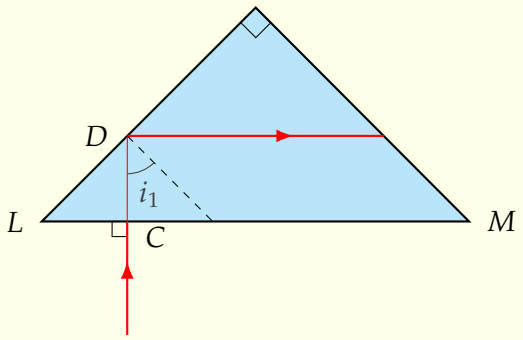
On applique la seconde loi de Descartes pour la réfraction au point C :

$$\sin(i_1) = n\,\sin(i_2)$$

Or, $i_1 = 0$ (**incidence normale**), et i_2 est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc $i_2 = 0$: **le rayon réfracté est confondu avec la normale**. Le rayon n'est donc pas dévié.

Q12. Avec quel angle d'incidence i_1 (par rapport à la normale) le rayon arrive-t-il en D ? Il y a réflexion totale au point D si $n\,\sin(i_1) > 1$. Est-ce le cas ici ?

Réponse (/1.5 pts)



On a :

$$\widehat{LCD} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{DLC} = \frac{\pi}{4}$$

Donc :

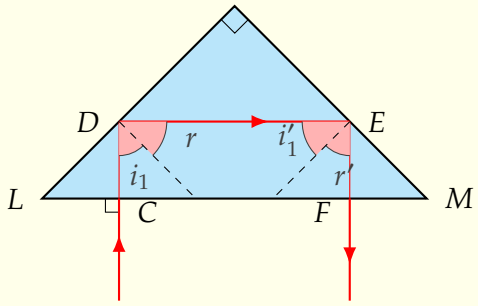
$$\widehat{CDL} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad i_1 = \frac{\pi}{2} - \widehat{CDL} = \frac{\pi}{4}$$

Le rayon lumineux arrive donc en D avec une incidence i_1 de $45°$. Il y a réflexion totale si $n_1 \sin(i_1) > 1$. Or : $n_1\,\sin(i_1) = 1,5\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1,06 > 1$

$\Rightarrow$ Il y a donc bien **réflexion totale** en D.

Q13. Déterminer l'incidence du rayon DE lorsqu'il arrive en E. On identifiera les angles introduits sur un schéma.

Réponse (/1 pt)



Il y a réflexion totale en D, donc :

$$r = i_1 = \frac{\pi}{4}$$

Donc :

$$\widehat{KDE} = \frac{\pi}{2} - r = \frac{\pi}{4}$$

Et comme :

$$\widehat{EKD} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{DEK} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Donc :

$$i'_1 = \frac{\pi}{2} - \widehat{DEK} = \frac{\pi}{4}$$

Le rayon lumineux arrive donc en E avec une incidence i'_1 de $45°$.

Q14. Justifier que le rayon incident et le rayon émergent au dioptre sont parallèles.

Réponse (/0.5 pt)

$$i'_1 = \frac{\pi}{4}$$

Pour les mêmes raisons que celles vues question **Q12.**, il y a donc réflexion totale en E, et :

$$r' = i'_1 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad i'_1 + r' = \frac{\pi}{2}$$

(DE) et (EF) sont donc perpendiculaires.
Par ailleurs :

$$i_1 + r = \frac{\pi}{2}$$

(CD) et (DE) sont donc perpendiculaires $\Rightarrow$ (CD) et (EF) sont donc parallèles $\Rightarrow$ **Les rayons incident et émergent au dioptre sont donc parallèles.**

Q15. Déterminer l'expression de i_2 en fonction de i_1 et n.

Réponse (/0.5 pt)

On applique la seconde loi de Descartes pour la réfraction au point C :

$$\sin(i_1) = n \sin(i_2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2 = \text{Arc}\sin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)}$$

Q16. Déterminer l'expression de i_3 en fonction de i_2.

Réponse (/0.5 pt)

On a :

$$\widehat{LCD'} = \frac{\pi}{2} + i_2 \quad \text{et} \quad \widehat{D'LC} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{CD'L} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + i_2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - i_2 \quad \text{donc} \quad i_3 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - i_2\right) = \frac{\pi}{4} + i_2$$

Q17. Déterminer l'expression de i_4 en fonction de i_2.

Réponse (/0.5 pt)

Il y a réflexion totale en D', donc :

$$\widehat{KD'E'} = \frac{\pi}{2} - i_3 \quad \text{donc} \quad \widehat{D'E'K} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - i_3\right) = i_3$$

$$\Rightarrow \quad i_4 = \frac{\pi}{2} - i_3 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + i_2\right) = \frac{\pi}{4} - i_2$$

Q18. Montrer que $i_5 = i_2$ et en déduire que le rayon émergent en F' est parallèle au rayon incident en C. Justifier que l'image d'un objet à l'infini par un prisme de Porro est à l'infini.

Réponse (/1.5 pts)

Il y a réflexion totale en E', donc :

$$\widehat{ME'F'} = \frac{\pi}{2} - i_4$$

Par ailleurs :

$$\widehat{F'ME'} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \widehat{E'F'M} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - i_4 + \frac{\pi}{4}\right) = i_4 + \frac{\pi}{4}$$

Donc :

$$i_5 = \frac{\pi}{2} - \widehat{E'F'M} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + i_4\right) = \frac{\pi}{4} - i_4 \quad \Rightarrow \quad i_5 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - i_2\right) = i_2$$

On applique la seconde loi de Descartes pour la réfraction au point F' :

$$\sin(i_6) = n \sin(i_5)$$

Or :

$$i_5 = i_2 = \text{Arc}\sin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin(i_6) = n \sin(i_5) = \sin(i_1)$$

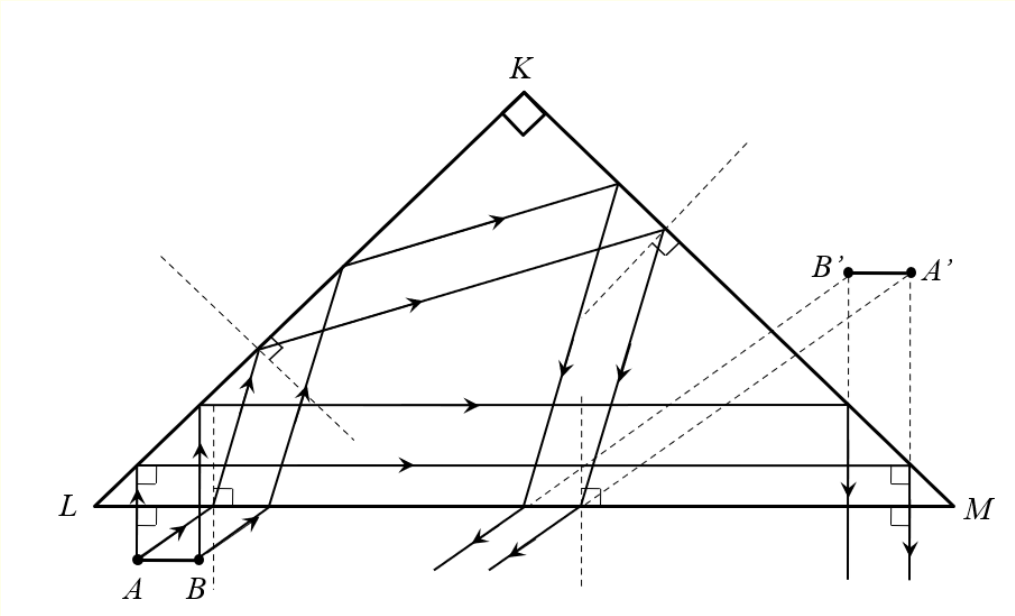
i_1 et i_6 sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc $i_1 = i_6$. Le rayon émergent en F' est donc parallèle au rayon incident en C.

Un objet à l'infini correspond à une série de rayons parallèles. Ces rayons parallèles donnent, par un prisme de Porro, une série de rayons émergents parallèles aux rayons incidents. L'image se forme donc à l'infini, dans la même direction que l'objet.

Q19. On cherche à tracer l'image $A'B'$ d'un objet AB, situé à distance finie, par le prisme de Porro. On a tracé le trajet de deux rayons issus de A, ce qui a permis de déterminer la position de A'.

Tracer sur le schéma ci-après le trajet de deux rayons issus de B, afin de déterminer la position de B'. Tracer alors l'image $A'B'$ de AB.

Réponse (/2 pts)



Q20. Expliquer qualitativement comment l'association des deux prismes de Porro entre l'objectif et l'oculaire permet de redresser correctement l'image.

Réponse (/1 pt)

L'association de l'objectif et de l'oculaire présentée partie I provoque un retournement complet de l'image (gauche/droite et haut/bas), car les lentilles présentent une symétrie de révolution par rapport à l'axe optique.

Or, le premier prisme retourne l'image de haut en bas, mais pas de gauche à droite, comme on le voit sur la figure. Le second prisme retourne l'image de gauche à droite, mais pas de haut en bas. La combinaison des deux prismes permet donc un **retournement complet** de l'image.

Insérer ce système de prismes de Porro entre l'objectif et l'oculaire permet donc de redresser correctement l'image.

– FIN DU CORRIGE –