Eau et objets (10 points)

Dans ce problème, nous considérons des phénomènes causés par l'interaction entre l'eau et des objets dus à la tension superficielle (ou tension de surface).

La partie A traite d'une situation avec du mouvement tandis que les parties B et C concernent des situations statiques.

Si nécessaire, il est possible d'utiliser le fait que si une fonction $y(x)$ satisfait l'équation différentielle $y''(x) = ay(x)$ avec a une constante strictement positive, alors sa forme générale est $y(x) = A\,\mathrm{e}^{\sqrt{a}\,x} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{a}\,x}$ où A et B sont des constantes arbitraires.

Partie A. Coalescence de gouttes d'eau (2,0 points)

Comme présenté sur la figure 1, on considère deux gouttes d'eau sphériques à la surface d'un matériau super-hydrophobe (une force répulsive importante existe entre le matériau et l'eau).

Initialement, les deux gouttes d'eau sphériques identiques sont placées, immobiles, à des positions voisines sur la surface. Alors, les deux gouttes qui se touchent coalescent, c'est-à-dire fusionnent, et forment une goutte d'eau sphérique plus grosse qui saute soudainement vers le haut.

A.1	Le rayon a des deux gouttes d'eau avant la fusion est $100\ \mu$m. La masse volumique ρ de l'eau est $1{,}00 \times 10^3$ kg/m^3. La tension superficielle γ est $7{,}27 \times 10^{-2}$ J/m^2. Une proportion k de la différence d'énergie de surface ΔE entre avant et après la coalescence est transformée en énergie cinétique de la goutte d'eau qui saute. Déterminer la valeur de la vitesse initiale v de saut de la goutte d'eau fusionnée avec deux chiffres significatifs en tenant compte des hypothèses suivantes : • $k = 0{,}06$; • le volume total d'eau est conservé entre avant et après la coalescence.	2.0pt

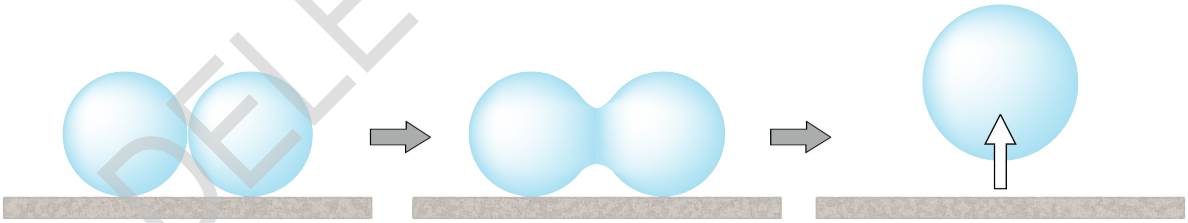

Fig. 1 : Coalescence de deux gouttes d'eau et saut de la goutte d'eau fusionnée.

DELEGATION PRINT

Partie B. Une plaque positionnée verticalement (4,5 points)

Une plaque plane est immergée verticalement dans l'eau. Les figures 2(a) et 2(b) montrent respectivement les formes de la surface de l'eau pour des plaques hydrophile (attraction entre son matériau et l'eau) et hydrophobe (répulsion entre son matériau et l'eau). On néglige l'épaisseur de la plaque.

La surface de la plaque est dans le plan yz et la surface horizontale de l'eau loin de la plaque est dans le plan xy (i.e. $z = 0$). La forme de la surface ne dépend pas de la coordonnée y. Soit $\theta(x)$ l'angle entre la surface de l'eau et le plan horizontal en un point (x, z) de la surface de l'eau dans le plan xz. Cet angle $\theta(x)$ est mesuré par rapport à l'axe des x et d'orientation positive dans le sens trigonométrique ; il vaut θ_0 au point de contact entre la plaque et la surface de l'eau ($x = 0$). Dans la suite, θ_0 est fixé par les propriétés du matériau de la plaque.

La masse volumique de l'eau ρ est une constante, ainsi que la tension superficielle de l'eau γ. La constante représentant l'intensité de l'accélération de la pesanteur est notée g. La pression atmosphérique, notée P_0, est supposée toujours uniforme. Dans la suite, on cherche à déterminer la forme de la surface de l'eau. On rappelle que l'unité de la tension superficielle est aussi bien le J/m² que le N/m.

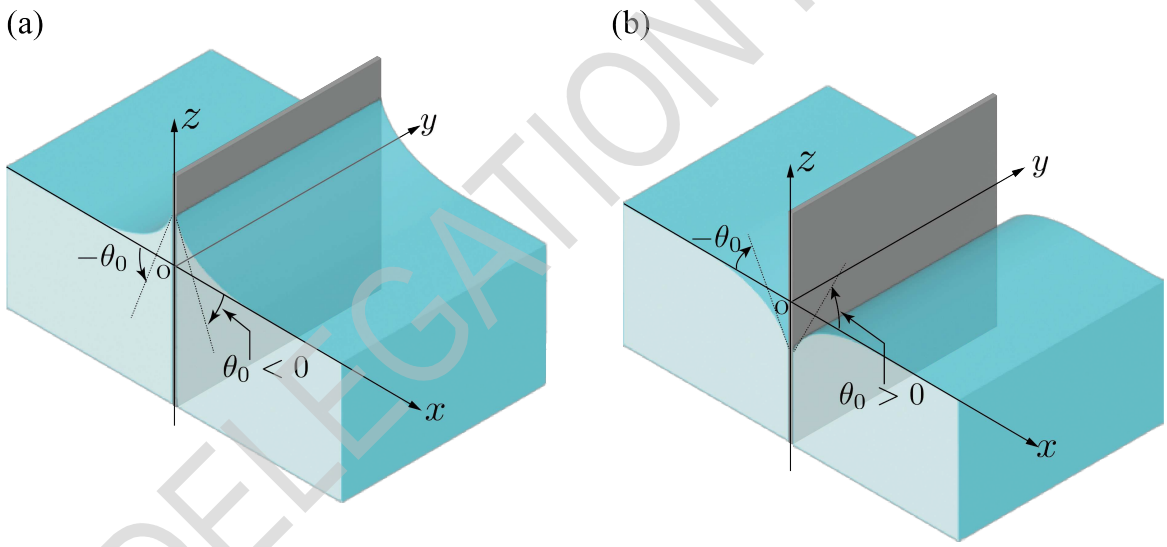

Fig. 2 : Plaques immergées verticalement dans l'eau. (a) cas d'une plaque hydrophile ; (b) cas d'une plaque hydrophobe.

DELEGATION PRINT

B.1	On considère le cas d'une plaque hydrophile, comme le montre la figure 2(a). On peut remarquer que la pression de l'eau, notée P, satisfait aux conditions $P < P_0$ pour $z > 0$ et $P = P_0$ pour $z = 0$. Exprimer P à la cote z en fonction de ρ, g, z, et P_0.	0.6pt

B.2 On considère un bloc d'eau dont la découpe est représentée en grisé sur la figure 3(a). Sa coupe transversale dans le plan xz est précisée par une zone hachurée plus sombre délimitée par des pointillés sur la figure 3(b). Soient z_1 et z_2 les cotes respectives des bords gauche et droit de la surface de ce bloc, à la surface de l'eau (entre le bloc d'eau et l'air). 0.8pt

Déterminer l'expression de la composante horizontale f_x (selon l'axe x) de la force totale linéique (i.e. par unité de longueur le long de l'axe y) exercée sur le bloc d'eau en raison de la pression en fonction de ρ, g, z_1 et z_2 ; on notera que la pression atmosphérique P_0 n'intervient pas et n'a pas à apparaître dans le calcul de cette force linéique.

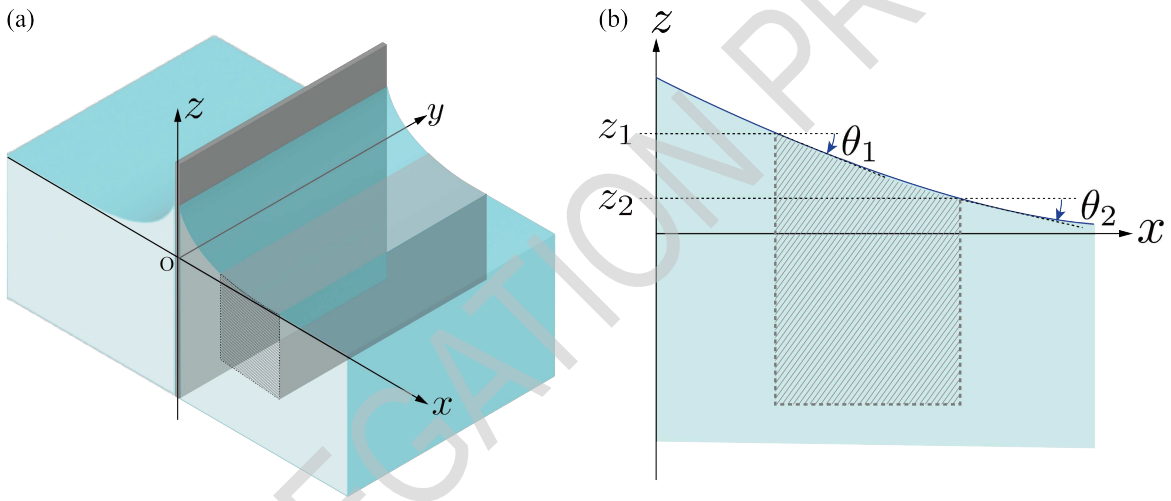

Fig. 3 : Forme du bloc d'eau sous la surface de l'eau. (a) Vue tridimensionnelle et (b) vue en coupe.

B.3 Les forces de tension superficielle agissant sur le bloc d'eau sont équilibrées par l'existence de la force linéique f_x discutée en B.2. On définit respectivement θ_1 et θ_2 comme les angles entre la surface de l'eau et le plan horizontal sur les bords gauche et droit du bloc d'eau. 0.8pt

Exprimer f_x en fonction de γ, θ_1 et θ_2.

B.4 L'équation suivante s'applique à un point arbitraire (x, z) à la surface de l'eau : 0.8pt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constante}. \qquad (1)$$

Déterminer l'exposant a et exprimer la constante ℓ en fonction de γ et ρ.

On note que cette équation est valable que la plaque soit hydrophile ou hydrophobe.

DELEGATION PRINT

B.5	Dans l'équation (1) en B.4, on suppose que les variations de la hauteur de l'eau sont faibles, i.e. $\lvert z'(x)\rvert \ll 1$ (les angles des figures 2 et 3 sont exagérés pour une meilleure lisibilité et ne satisfont donc pas cette condition). Avec cette condition $\lvert z'(x)\rvert \ll 1$, on peut développer $\cos\theta(x)$ au second ordre en $z'(x)$ (dérivée de $z(x)$). Ensuite, en dérivant l'équation obtenue par rapport à x, on obtient une équation différentielle satisfaite par $z(x)$. Résoudre cette équation différentielle et déterminer $z(x)$ pour $x \geq 0$ en fonction de $\tan\theta_0$ et ℓ.	1.5pt

Partie C. Interaction entre deux tiges (3,5 points)

Des tiges identiques A et B, constituées du même matériau, flottent à la surface de l'eau en étant disposées parallèlement et à la même distance de l'axe y (figure 4).

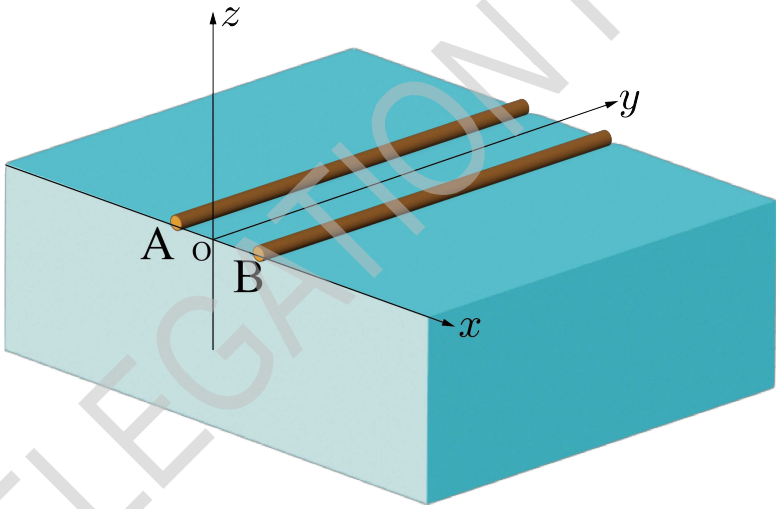

Fig. 4 : Deux tiges A et B flottant à la surface de l'eau.

C.1	Comme le montre la figure 5, on définit les cotes z_a et z_b comme les positions des contacts entre la tige B et la surface de l'eau, ainsi que les angles θ_a et θ_b. Déterminer la composante horizontale F_x de la force linéique (i.e. par unité de longueur le long de l'axe y) sur la tige B en fonction de θ_a, θ_b, z_a, z_b, ρ, g et γ.	1.0pt

DELEGATION PRINT

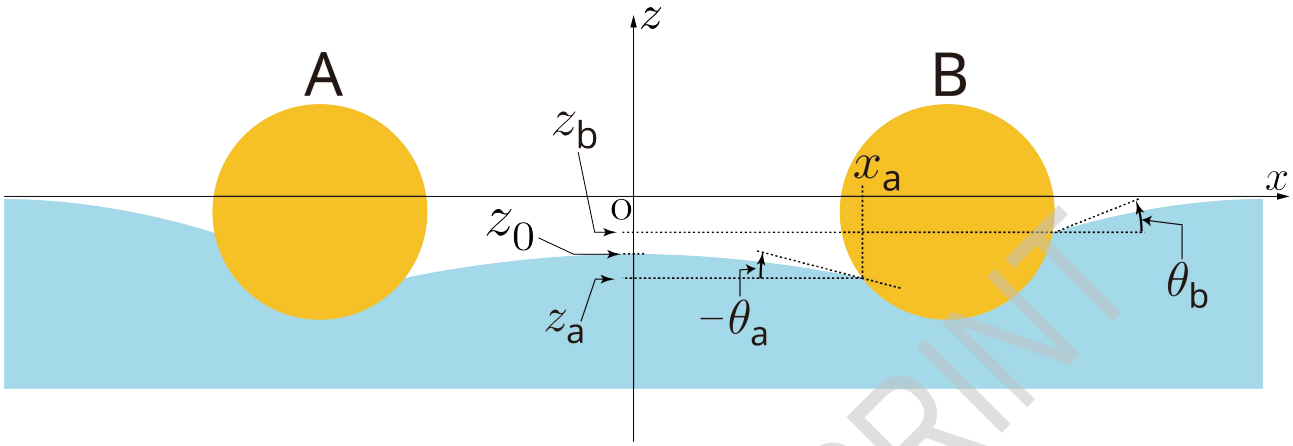

Fig. 5 : Vue en coupe verticale des deux tiges flottant à la surface de l'eau.

C.2	On définit la cote z_0 du point médian des deux tiges à la surface de l'eau dans le plan xz. Exprimer la force linéique F_x obtenue en C.1 sans utiliser θ_a, θ_b, z_a et z_b.	1.5pt

C.3	Soit x_a l'abscisse du point de contact de la tige B avec la surface de l'eau situé le plus à gauche. En utilisant l'équation différentielle obtenue en B.4, exprimer la cote z_0 de la surface de l'eau à mi-distance entre les tiges A et B en fonction de x_a et z_a ; il est possible d'utiliser la constante ℓ introduite en B.4.	1.0pt

DELEGATION PRINT