Étoiles à neutrons (10 points)

On étudie ici la stabilité des gros noyaux et on estime la masse des étoiles à neutrons de façon théorique et expérimentale.

Partie A. Masse et stabilité des noyaux (2,5 points)

L'énergie de masse au repos d'un noyau composé de Z protons et de N neutrons, notée $m(Z,N)c^2$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide, est inférieure à la somme des masses des protons et des neutrons, appelés nucléons dans la suite du problème. La différence correspond à l'énergie de liaison $B(Z,N)$. En ignorant des corrections mineures, on peut considérer que l'énergie de liaison est composée d'un terme de volume contenant a_V, d'un terme de surface contenant a_S, d'un terme d'énergie de Coulomb contenant a_C et d'un terme d'énergie de symétrie contenant a_{sym}, sous la forme suivante :

$$m(Z,N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z,N), \qquad \text{où} \qquad B(Z,N) = a_VA - a_SA^{2/3} - a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}}\frac{(N-Z)^2}{A}. \tag{1}$$

Dans les expressions précédentes, $A = Z + N$ est le nombre de masse et m_N la masse d'un nucléon. Pour les applications numériques, on prendra $a_V \approx 15{,}8\ \text{MeV}$, $a_S \approx 17{,}8\ \text{MeV}$, $a_C \approx 0{,}711\ \text{MeV}$ et $a_{\text{sym}} \approx 23{,}7\ \text{MeV}$ (MeV = 10^6 électronvolts).

A.1	Dans le cas particulier où $Z = N$, calculer la valeur numérique de A pour laquelle l'énergie de liaison par nucléon B/A est maximale.	0.9pt

A.2	Dans le cas particulier où A est fixé, le numéro atomique du noyau le plus stable Z^* est déterminé en maximisant $B(Z, A-Z)$. Pour $A = 197$, calculer la valeur numérique de Z^* à l'aide de l'équation (1).	0.9pt

A.3	Un noyau ayant une grande valeur de A se scinde en deux noyaux plus légers par fission, afin de minimiser l'énergie de masse au repos totale. Pour simplifier, on considère le cas particulier où un noyau, caractérisé par le couple (Z,N), se scinde en deux noyaux identiques, ce qui se produit lorsque l'inégalité énergétique suivante est vérifiée : $$m(Z,N)c^2 > 2m(Z/2,N/2)c^2.$$ Écrire cette inégalité sous la forme $$Z^2/A > C_{\text{fission}}\frac{a_S}{a_C}$$ pour calculer la valeur numérique de C_{fission} avec deux chiffres significatifs.	0.7pt

DELEGATION PRINT

Partie B. Étoile à neutrons considérée comme un gigantesque noyau (1,5 point)

Pour les gros noyaux ayant un nombre de masse supérieur à un seuil A_c , c'est-à-dire tels que $A > A_c$, ces noyaux restent stables vis-à-vis de la fission nucléaire lorsque la gravité rend l'énergie de liaison suffisamment grande.

B.1 On suppose que l'on est dans le cas où $N = A$ et $Z = 0$ pour une valeur suffisamment grande de A et que l'équation (1) reste valable à condition d'y ajouter l'énergie de liaison gravitationnelle. Cette dernière s'exprime sous la forme : 1.5pt

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

où $M = m_N A$ désigne la masse du noyau et $R = R_0 A^{1/3}$, avec $R_0 \simeq 1{,}1 \times 10^{-15}$ m $= 1{,}1$ fm, désigne le rayon du noyau.
Pour $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$, calculer la valeur numérique de a_{grav} en MeV avec un chiffre significatif.
Ensuite, en ignorant le terme de surface, calculer la valeur numérique de A_c avec un chiffre significatif.
Pour les applications numériques, utiliser $m_N c^2 \simeq 939$ MeV et $G = \hbar c / M_P^2$ avec $M_P c^2 \simeq 1{,}22 \times 10^{22}$ MeV et $\hbar c \simeq 197$ MeV $\cdot$ fm.

Partie C. Étoile à neutrons dans un système binaire (6,0 points)

Certaines étoiles à neutrons sont des pulsars émettant régulièrement des ondes électromagnétiques à intervalles réguliers. Pour simplifier, on désigne ces ondes par le terme de "lumière". Les étoiles à neutrons forment souvent des systèmes binaires avec une naine blanche. On considère la configuration stellaire illustrée à la figure 1, où une impulsion lumineuse d'une étoile à neutrons **N** vers la Terre **E** passe à proximité d'une naine blanche **W** du système binaire. La mesure de l'influence de la gravité de cette étoile sur ces impulsions permet une estimation précise de la masse de **W**, comme expliqué ci-dessous, ce qui permet d'estimer la masse de **N.**

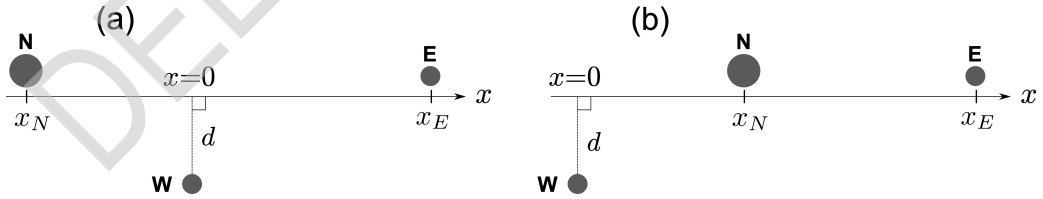


Fig. 1 : Deux configurations stellaires. L'axe des x est orienté de **N** vers **E** – (a) Cas où $x_N < 0$ – (b) Cas où $x_N > 0$.

DELEGATION PRINT

C.1 Sur la figure ci-dessous, on considère deux altitudes I et II, séparées d'une hauteur $\Delta h > 0$. On considère deux horloges identiques situées aux altitudes I et II et respectivement notées horloge-I et horloge-II. Une troisième horloge identique aux précédentes, notée horloge-F, est liée à un système F en chute libre dans le champ de gravitation g. 1.0pt

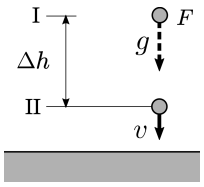


Schéma de l'expérience de pensée.

On suppose qu'un observateur est lié à l'horloge-F. Le système F est initialement placé à la même altitude que l'horloge I, avec une vitesse nulle. Comme les horloges sont identiques, elles enregistrent des intervalles de temps égaux, soit $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\mathrm{I}}$. On libère le système F qui tombe alors en chute libre. On travaille dans le référentiel lié à F, que l'on considère comme inertiel.
Dans ce référentiel, l'horloge-II passe au niveau de l'horloge-F à la vitesse v de sorte que la dilatation du temps de l'horloge-II peut être déterminée par la transformation de Lorentz. Lorsqu'un intervalle de temps $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ s'écoule sur l'horloge-F, l'intervalle de temps $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ s'écoule sur l'horloge II.
Déterminer l'expression de $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ en fonction de $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ au premier ordre en $\Delta\phi/c^2$, où $\Delta\phi = g\Delta h$ est une différence de potentiel gravitationnel, c'est-à-dire une énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse.

DELEGATION PRINT

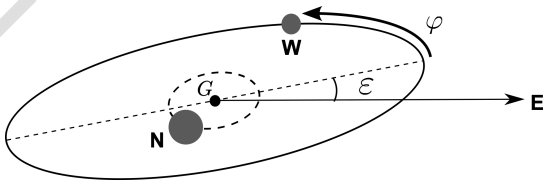
C.2 Sous l'effet d'un potentiel gravitationnel Φ, le calcul d'un décalage temporel pour un observateur à l'infini utilise une vitesse de la lumière effective c_{eff}, même si la vitesse de la lumière locale reste égale à c. Lorsque $\phi(r=\infty)=0$, on peut écrire c_{eff} au premier ordre en ϕ/c^2 sous la forme : 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) c.$$

Cette expression comprend aussi l'effet de la distorsion de l'espace qui n'était pas prise en compte dans **C.1**. On note que le chemin suivi par la lumière peut être considéré comme rectiligne.
Comme le montre la figure 1 (a), l'axe des x est confondu avec le trajet suivi par la lumière depuis l'étoile à neutrons **N** jusqu'à la Terre **E** et on définit l'origine $x=0$ au niveau de l'abscisse de la naine blanche **W**. Soient $x_N\,(<0)$ l'abscisse de **N**, $x_E\,(>0)$ celle de **E** et d la distance entre **W** et l'axe des x.
Exprimer la correction temporelle Δt définie comme la modification du temps mis par la lumière entre **N** et **E** à cause de la présence de la naine blanche de masse M_{WD}. On exprimera le résultat sous une forme simple, à l'ordre le plus bas en fonction des petites quantités suivantes : $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$ et $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Si nécessaire, utiliser la formule suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+d^2}+x}{\sqrt{x^2+d^2}-x}\right)+C. \qquad (\log \text{ est le logarithme népérien noté ln en français})$$

C.3 Comme indiqué ci-dessous, dans un système binaire d'étoiles, on suppose que **N** et **W** se déplacent sur des orbites circulaires coplanaires autour du centre de masse G. Soit ε l'angle d'inclinaison de l'orbite défini comme l'angle entre l'axe (Gx) et le plan orbital. On note L la distance entre **N** et **W** et M_{WD} la masse de la naine blanche. Dans ce qui suit, on suppose que $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt



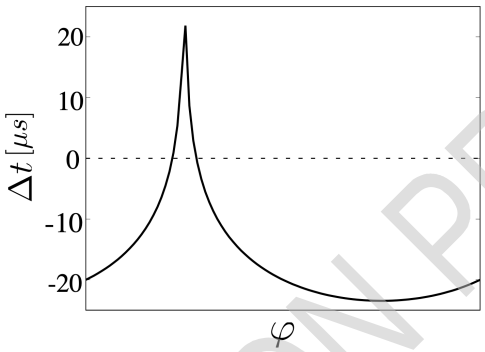
Système stellaire binaire.

On observe des impulsions lumineuses issues de **N** et détectées en **E**, avec **E** situé à grande distance de **N**. Le trajet suivi par la lumière vers **E** varie en fonction du temps selon la configuration de **N** et de **W.** La correction temporelle Δt prend une valeur maximale Δt_{max} pour $x_N \simeq -L$ et une valeur minimale Δt_{min} pour $x_N \simeq L$ (voir la figure 1 (b) pour la configuration).
Déterminer l'expression de $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ sous une forme simple, à l'ordre le plus bas en fonction des petites quantités définies en **C.2,** comme cela a été fait en **C.2**. On notera que les retards dus à la gravité des objets stellaires autres que **W** n'interviennent pas dans $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$.

DELEGATION PRINT

C.4 La figure ci-dessous montre l'évolution de la correction temporelle observée en fonction de l'angle φ (voir la figure de la question **C.3**) pour le système stellaire binaire avec $L \approx 6 \times 10^6\,\mathrm{km}$ et $\cos\varepsilon \approx 0{,}99989$. 0.8pt

Exprimer M_{WD} en fonction de la masse solaire $M_\odot$ et calculer numériquement la valeur de $M_{\mathrm{WD}}/M_\odot$ avec un chiffre significatif. On utilisera la valeur approchée $GM_\odot/c^3 \approx 5\,\mu\mathrm{s}$.

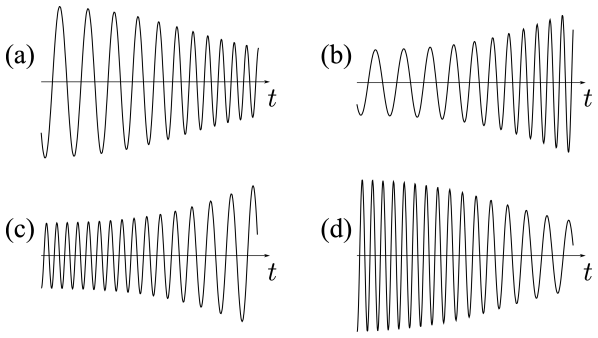


Correction temporelle Δt observée en fonction de l'angle φ (voir la figure de la question **C.3**).

C.5 Dans un système binaire d'étoiles à neutrons, l'énergie et le moment cinétique des deux étoiles diminuent en émettant des ondes gravitationnelles. Les étoiles finissent par entrer en collision pour fusionner. Pour simplifier, on considère uniquement un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω. Si on néglige les effets relativistes, on a la relation $\omega = \chi R^p$, où χ est une constante ne dépendant ni de ω, ni de R. 0.4pt

Déterminer la valeur numérique de p.

C.6 L'amplitude de l'onde gravitationnelle émise par le système binaire en **C.5** est proportionnelle à $R^2\omega^2$. La figure ci-dessous montre qualitativement quatre profils temporels différents des ondes gravitationnelles observées avant la collision entre deux étoiles. Parmi les profils (a) à (d), sélectionner le profil adéquat. 0.2pt



Profils temporels des ondes gravitationnelles.

DELEGATION PRINT