Corrigé du problème 1 :
Détection de gaz par spectroscopie photoacoustique

I. Excitation de monoxyde de carbone dans l'air ambiant

Q1. Déterminer la valeur numérique de la masse réduite μ.

Réponse :

On exprime les masses des atomes à partir de leurs masses molaires :

$$\mu = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} = \frac{\frac{M(C)}{\mathcal{N}_A} \times \frac{M(O)}{\mathcal{N}_A}}{\frac{M(C)}{\mathcal{N}_A} + \frac{M(O)}{\mathcal{N}_A}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{M(C)M(O)}{\mathcal{N}_A(M(C)+M(O))}}$$ /0.5pt

L'application numérique donne : /0.5pt

$$\mu = 1,14 \times 10^{-26}\, kg$$

Q2. Déterminer les expressions de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}\mu v^2$ et de l'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, en fonction de μ, ω_0, x_m et t. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m en fonction de μ, ω_0 et x_m.

Réponse :

Pour déterminer l'énergie cinétique E_c, on commence par déterminer la vitesse $v(t) = \dot{x}(t)$: /0.5pt

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\mu v^2(t) = \frac{1}{2}\mu {\omega_0}^2 {x_m}^2 \sin^2(\omega_0 t)}$$

La constante de raideur k peut s'exprimer en fonction de μ et de ω_0.

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{\mu} \quad \Rightarrow \quad k = \mu {\omega_0}^2$$

On en déduit l'énergie potentielle élastique : /0.5pt

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\mu {\omega_0}^2 {x_m}^2 \cos^2(\omega_0 t)}$$

Par conséquent, puisque $E_m = E_c + E_p$ et que $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$, on en déduit que : /0.5pt

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}\mu {\omega_0}^2 {x_m}^2}$$

Q3. Dans quel domaine du spectre électromagnétique émet ce laser ?

Réponse : /0.5pt

Une longueur d'onde de $4,664\ \mu m$ appartient au domaine **infrarouge**.

Q4. Déterminer l'expression de l'écart d'énergie entre les niveaux de vibration $n = 0$ et $n = 1$ en fonction de h, c et λ. Faire l'application numérique.

Réponse :

Par la relation de Planck-Einstein :

$$\boxed{\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{hc}{\lambda}}$$ /0.5pt

L'application numérique donne : $\Delta E = 4,26 \times 10^{-20}\ J$ /0.5pt

Q5. En déduire la fréquence propre de vibration f_0 de la molécule. Faire l'application numérique.

Réponse :

En utilisant la relation des niveaux d'énergie :

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{h\omega_0}{2\pi}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \frac{h\omega_0}{2\pi} = hf_0$$

Par identification avec la relation de Planck-Einstein, on obtient :

$$hf_0 = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_0 = \frac{c}{\lambda}}$$ /0.5pt

L'application numérique donne : $f_0 = 6,43 \times 10^{13}\ Hz$ /0.5pt

Q6. Calculer la constante de raideur k du ressort équivalent à la liaison $C-O$ dans le monoxyde de carbone.

Réponse : On peut écrire :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Ce qui donne : /0.5pt

$$\boxed{k = 4\pi^2 \mu f_0{}^2}$$

L'application numérique donne : $k = 1,86 \times 10^3\ N.m^{-1}$ /0.5pt

Q7. À quelle caractéristique de la liaison peut être qualitativement liée cette constante de raideur ?

Réponse : /0.5pt

F_2 possède une liaison **simple**, O_2 une liaison **double**, N_2 une liaison **triple**. On constate que plus la valeur de la constante de raideur est élevée, plus la liaison est multiple.

Q8. Les niveaux d'énergie de vibration peuvent être associés à l'énergie mécanique de la molécule au sens de la mécanique classique (exprimée à la **question 2**). Quelle est l'amplitude x_m de l'élongation de la molécule lorsque celle-ci est dans son niveau de vibration $n = 1$? Commenter la valeur obtenue, sachant que la longueur de la liaison C – O dans le monoxyde de carbone est $\ell_0 = 112,8\,pm$.

Réponse :

En égalant l'expression classique et l'expression quantique pour le niveau $n = 1$:

$$\frac{1}{2}\mu{\omega_0}^2{x_m}^2 = \frac{3h\omega_0}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_m = \sqrt{\frac{3h}{4\pi^2\mu f_0}}} \quad \boxed{\quad /1\text{pt}}$$

L'application numérique donne $x_m = 8,29\,pm$. L'élongation est inférieure à 1/10 de la liaison $C - O$, ce qui paraît cohérent. $\boxed{\quad /0.5\text{pt}}$

II. Détection de l'onde acoustique par poutre vibrante

Q9. Donner les expressions de $s_T(P,t)$ et $s_R(M,t)$ (où P et M désignent respectivement les points de réflexion sur la poutre et le miroir M_1) en fonction de A_0, ω_L, λ_L, d_L, d, t et $e(t)$.

Réponse :

L'onde étant progressive :

$$s_T(P,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} s\left(t - \frac{d_L + d + e(t)}{c}\right) = \sqrt{2} A_0 \cos\left(\omega_L\left(t - \frac{d_L + d + e(t)}{c}\right)\right)$$

En remarquant que :

$$k_L = \frac{\omega_L}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_L}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{s_T(P,t) = \sqrt{2} A_0 \cos\left(\omega_L t - \frac{2\pi}{\lambda_L}(d_L + d + e(t))\right)} \quad \boxed{\quad /0.5\text{pt}}$$

Par le même raisonnement pour le faisceau réfléchi, on obtient :

$$\boxed{s_R(M,t) = \sqrt{2} A_0 \cos\left(\omega_L t - \frac{2\pi}{\lambda_L}(d_L + d)\right)} \quad \boxed{\quad /0.5\text{pt}}$$

Q10. En déduire les expressions de $s_T(D,t)$ et $s_R(D,t)$ (où D désigne la position d'arrivée sur le détecteur optique) en fonction de A_0, ω_L, λ_L, d_L, d, d_{opt}, t et $e(t)$.

Réponse :

On a :

$$s_T(D,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} s_T\left(P, t - \frac{d_{opt} + d + e(t)}{c}\right)$$

Donc :

$$\boxed{s_T(D,t) = A_0 \cos\left(\omega_L t - \frac{2\pi}{\lambda_L}(d_L + d_{opt} + 2d + 2e(t))\right)} \quad \boxed{\quad /0.5\text{pt}}$$

De même :

$$\boxed{s_R(D,t) = A_0 \cos\left(\omega_L t - \frac{2\pi}{\lambda_L}(d_L + d_{opt} + 2d)\right)} \quad \boxed{\quad /0.5\text{pt}}$$

Q11. Les signaux $s_T(D,t)$ et $s_R(D,t)$ se somment au niveau du détecteur. On note A l'amplitude de l'onde obtenue. Le détecteur est sensible à l'intensité lumineuse $I(t)$, et son temps de réponse est très petit devant la période de l'onde acoustique.

Montrer que $I(t)$ s'écrit :

$$\boxed{I(t) = I_0\left(1+\cos\left(\frac{4\pi e(t)}{\lambda_L}\right)\right)}$$

On donnera l'expression de I_0.

Réponse : /1pt

Les signaux $s_T(D,t)$ et $s_R(D,t)$ se somment au niveau du détecteur. Le déphasage entre ces deux signaux est :

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi e(t)}{\lambda_L}$$

Par la formule de Fresnel, on détermine l'amplitude résultante :

$$A = \sqrt{{A_0}^2 + {A_0}^2 + 2{A_0}^2\cos(\Delta\varphi)} \quad \text{soit :} \quad A = \sqrt{2{A_0}^2\left(1+\cos\left(\frac{4\pi e(t)}{\lambda_L}\right)\right)}$$

Le détecteur est sensible à l'intensité lumineuse I, qui est proportionnelle au carré de l'amplitude A : $I = \alpha A^2$, avec α la constante de proportionnalité.

On obtient ainsi l'expression de l'intensité lumineuse $I(t)$:

$$\boxed{I(t) = \alpha A(t)^2 = 2\alpha {A_0}^2\left(1+\cos\left(\frac{4\pi e(t)}{\lambda_L}\right)\right)}$$

Avec $\boxed{I_0 = 2\alpha {A_0}^2}$

Q12. Déterminer les expressions de I_{max} et I_{min}, intensités maximale et minimale reçues par le détecteur au cours du mouvement de la poutre. Que vaut l'intensité lumineuse reçue lorsque la poutre est à l'équilibre ?

Réponse :

I_{max} correspond à une situation d'interférence **constructive**, avec :

$$\cos\left(\frac{4\pi e(t)}{\lambda_L}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{max} = 4\alpha {A_0}^2}$$ /0.5pt

I_{min} correspond à une situation d'interférence **destructive**, avec :

$$\cos\left(\frac{4\pi e(t)}{\lambda_L}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{min} = 0}$$ /0.5pt

Lorsque la poutre est à l'équilibre, $e(t) = 0$ donc l'intensité reçue est maximale et vaut I_{max}. /0.5pt

Q13. De quelle distance (exprimée en fonction de λ_L) le point P se déplace-t-il entre deux valeurs consécutives de I_{max} mesurées par le détecteur au cours d'une déflexion dans un sens donné ?

Réponse : /1pt

Entre deux interférences constructives successives, le déphasage varie de 2π. En notant e_n et e_{n+1} les positions successives de la poutre conduisant à ces interférences constructives, on a donc :

$$\frac{4\pi e_{n+1}}{\lambda_L} - \frac{4\pi e_n}{\lambda_L} = 2\pi$$

Ce qui donne :

$$\boxed{e_{n+1} - e_n = \frac{\lambda_L}{2}}$$

La poutre se déplace donc de $\lambda_L/2$ lorsque le détecteur mesure deux fois de suite I_{max}.

Q14. Que représente δ dans le graphique ci-dessus ?

Réponse : /0.5pt

δ représente l'amplitude de la déflexion à l'extrémité de la poutre (en $x = L$).

Q15. Montrer que la déflexion de la poutre peut s'écrire sous la forme :

$$e(t) = K\delta \cos(2\pi f t)$$

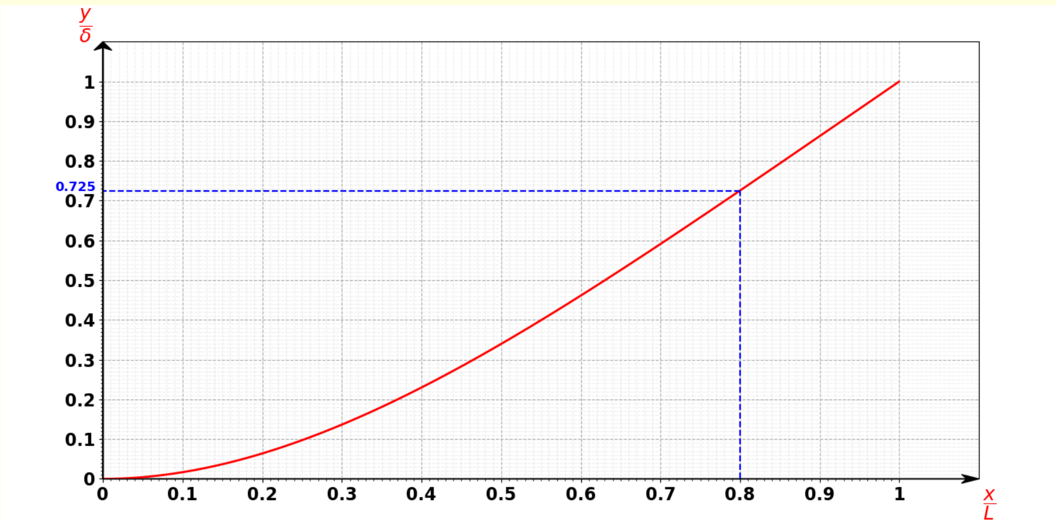
avec K un préfacteur numérique dont on précisera la valeur à partir du graphe de la **figure 4**
.

Réponse : /1pt

On a :

$$e(t) = Y(x_r, t) = y(x_r) \cos(2\pi f t)$$

Or, graphiquement, on lit : $\boxed{y(x_r = 0,8L) = 0,725\delta}$.



On en déduit que :

$$\boxed{e(t) = Y(x_r, t) = 0,725\delta \cos(2\pi f t)} \quad \text{et} \quad \boxed{K = 0,725}$$

Q16. Réécrire $I(t)$ à l'aide de l'expression de $e(t)$.

Réponse : /0.5pt

En combinant les résultats des questions précédentes :

$$\boxed{I(t) = 2\alpha {A_0}^2 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi \times 0,725\delta \cos(2\pi f t)}{\lambda_L}\right)\right)}$$

Q17. Quelle est la distance parcourue par le point P situé à la position $x_r = 0,8L$ sur la poutre entre ses deux positions de déflexion extrémales ? En déduire le nombre N de fois où le détecteur mesure I_{max} entre ces deux positions extrémales.

Réponse :

La poutre balaie une distance égale à deux fois son amplitude, soit $\boxed{1,45\delta}$ entre ses deux positions extrémales. /0.5pt

On sait que chaque fois que la poutre se déplace de $\lambda_L/2$, le détecteur mesure de nouveau I_{max}, et que lorsque la poutre passe par sa position d'équilibre ($e = 0$), $I = I_{max}$.

Le nombre de fois où I_{max} est détecté est donc : /1pt

$$N = 2E\left(\frac{0,725\delta}{\frac{\lambda_L}{2}}\right) + 1$$

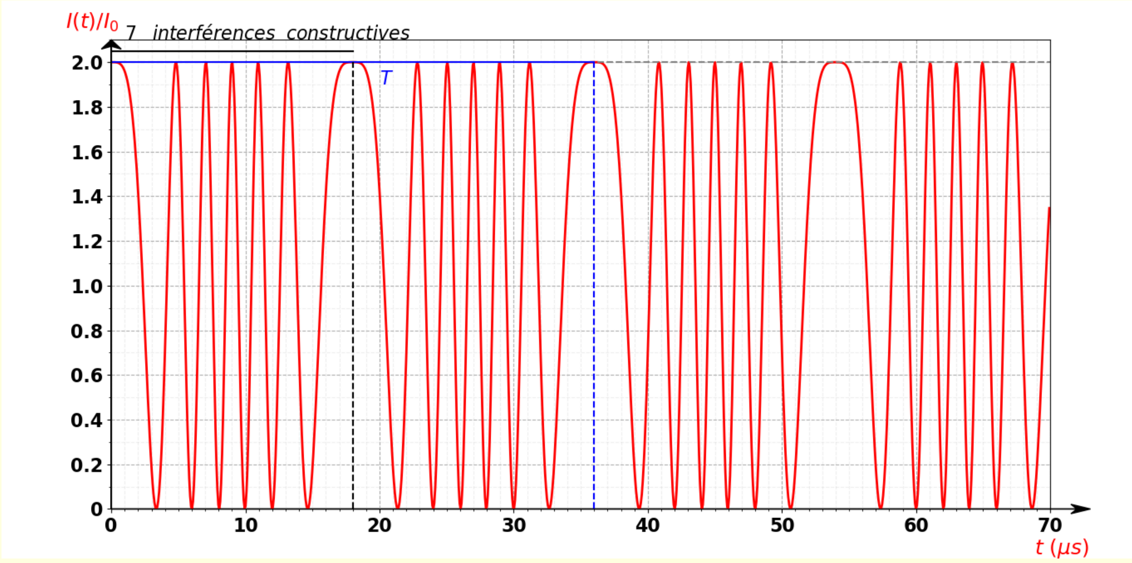
où $E(x)$ désigne la fonction « partie entière ».

Q18. Estimer les valeurs de f et δ à partir de la représentation graphique de $I(t)$. La valeur obtenue pour f est-elle cohérente ?

Réponse :

f est la fréquence de vibration de la poutre. La période de vibration T est la durée d'un **aller-retour** de la poutre.

On observe sur la représentation de $I(t)$ le moment où la poutre ralentit, puisque le défilement des interférences constructives s'espace : ces moments correspondent aux **positions extrémales** de la poutre.



Par conséquent $T = 36\,\mu s$, soit $\boxed{f = 1/T = 28\,kHz}$. Cette valeur est cohérente avec la fréquence du laser pulsé, qui est de $28\,kHz$, et qui détermine la fréquence de l'onde acoustique. /1pt

D'autre part, on compte 7 **interférences constructives** lors du mouvement de la poutre d'une position extrémale à l'autre. On obtient donc : /1pt

$$1,45\delta = 6 \times \frac{\lambda_L}{2} = 3\lambda_L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = 2,1\lambda_L = 1,3\,\mu m}$$

Q19. **Conclure** : comment la mesure de $I(t)$ peut-elle permettre de déterminer la concentration de gaz ?

Réponse : /1pt

La mesure de $I(t)$ permet, comme on vient de le voir, de déterminer l'amplitude de vibration de la poutre, elle-même dépendante de l'amplitude de l'onde acoustique qui l'a mise en vibration.

Cette mesure permet donc de remonter à l'amplitude de l'onde acoustique. L'amplitude de cette onde est liée à la concentration du gaz étudié. La mesure de $I(t)$ permet donc de déduire cette concentration, moyennant un étalonnage préalable de toute la chaîne de mesure.

– FIN DU CORRIGE –