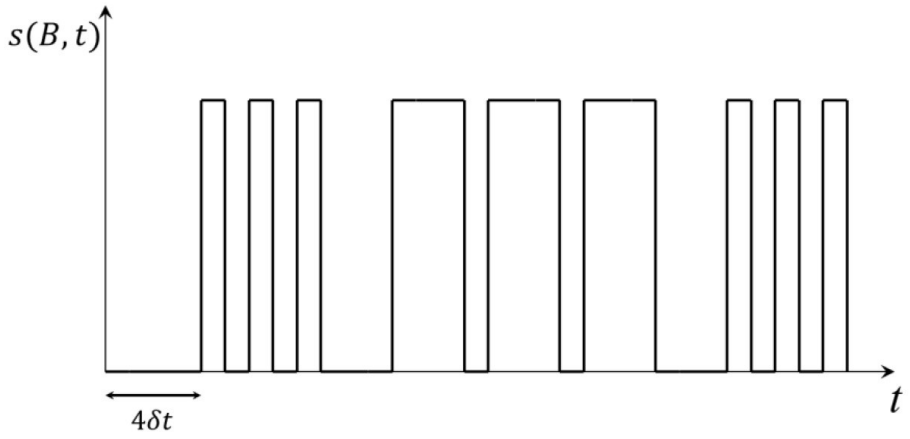
CORRIGE PROBLÈME 1 CPGE IPhO 2019

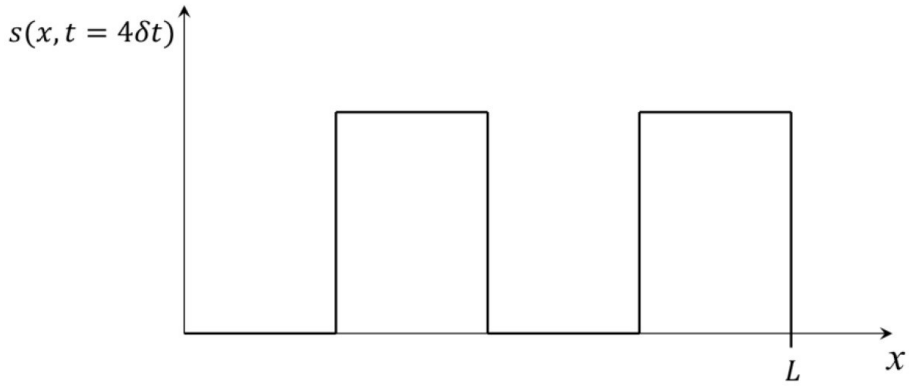
I. Télégraphe électrique

1) $\boxed{\tau = \frac{L}{c} = 4\delta t}$.

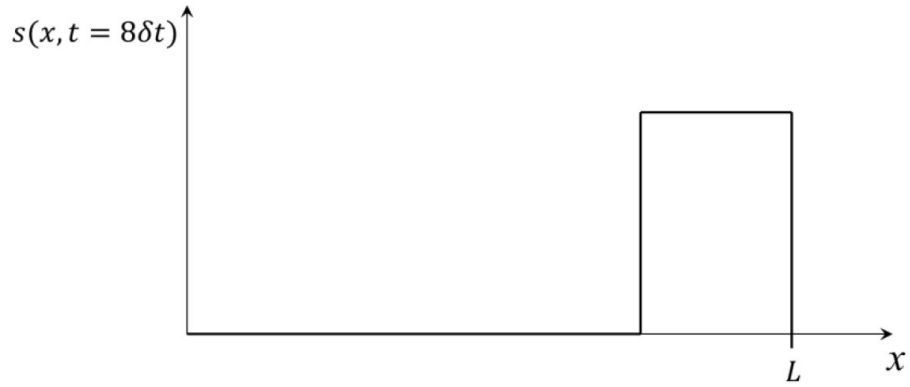
2)



3) a)



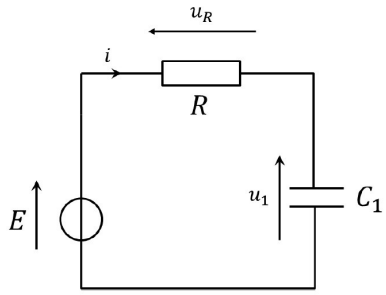
b)



II. Télégraphe sans fil

4) Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur : $u_1(t = 0^+) = u_2(t = 0^+) = 0$.
Par la loi des mailles, $u_1 = u_2 + u_e$ donc $\boxed{u_e(t=0^+) = 0}$.
L'éclateur se comporte comme un interrupteur ouvert pour toute tension inférieure à U_E.
Or $u_e(t = 0^+) < U_E$. Donc l'éclateur se comporte au départ comme un interrupteur ouvert.

5) L'éclateur étant assimilé à un interrupteur ouvert, le circuit se réduit à une seule maille.



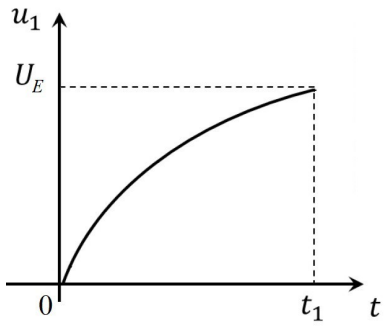
La loi des mailles s'écrit $E = u_R + u_1 = Ri + C_1 \dfrac{du_1}{dt}$.

D'où l'équation différentielle : $\boxed{\dfrac{du_1}{dt} + \dfrac{u_1}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau = RC_1}$.

La solution est somme d'une solution particulière $u_p(t) = E$ et d'une solution homogène $u_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.
D'où $u_1(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.
En utilisant la condition initiale $u_1(t = 0^+) = 0$, on obtient : $\boxed{u_1(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$.

6) L'éclateur se comporte comme un fil lorsque $u_e = U_E$. Or, pour $t \leq t_1$, $u_2 = 0$. Donc par la loi des mailles, $u_1(t_1) = u_e$. Le temps t_1 est donc défini par $u_1(t_1) = U_E$.
On obtient donc : $\boxed{t_1 = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{U_E}{E}\right)}$ ($1 - \dfrac{U_E}{E} > 0$ car $E > U_E$).

7)

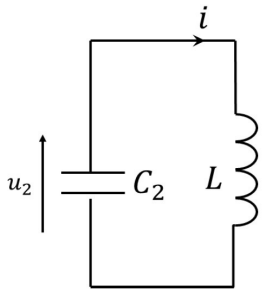


8) $\boxed{R = \dfrac{-t_1}{C_1 \ln\left(1 - \dfrac{U_E}{E}\right)} = 1{,}0\ \text{k}\Omega}$.

9) L'éclateur se comportant comme un fil, $u_e = 0$. Par la loi des mailles, $u_1 = u_2 = U_0$.
La charge d'un condensateur est donnée par $Q = CU$. Donc, par conservation de la charge avant et après le transfert, on a : $C_1 U_E = (C_1 + C_2) U_0$. D'où $\boxed{U_0 = \dfrac{C_1}{(C_1 + C_2)} U_E}$.

10) Puisque $C_2 \gg C_1$, $\dfrac{C_1}{(C_1 + C_2)} \ll 1$ et $U_0 \ll U_E$.
Ainsi $Q_{1f} = C_1 U_0 \ll C_1 U_E = Q_{1i}$.
La charge Q_{1f} accumulée sur l'armature positive du condensateur de capacité C_1 après le transfert est très inférieure à la charge Q_{1i} qu'il possédait avant le transfert. Le condensateur de capacité C_1 s'est donc quasi-intégralement déchargé à l'issue de ce transfert.

11) On étudie le circuit pour $t' > 0$. Sachant que l'éclateur se comporte comme un interrupteur ouvert, le circuit se réduit à une seul maille.



On a : $i = -C_2 \dfrac{du_2}{dt'}$ et $u_2 = L \dfrac{di}{dt'}$.

On en déduit l'équation différentielle : $\boxed{\dfrac{d^2u_2}{dt'^2} + \dfrac{u_2}{LC_2} = 0}$.

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique : $\dfrac{d^2u_2}{dt'^2} + \omega_0^2 u_2 = 0$ avec $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC_2}}}$.

Ainsi $u_2(t') = A\cos(\omega_0 t') + B\sin(\omega_0 t')$, et on détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales.

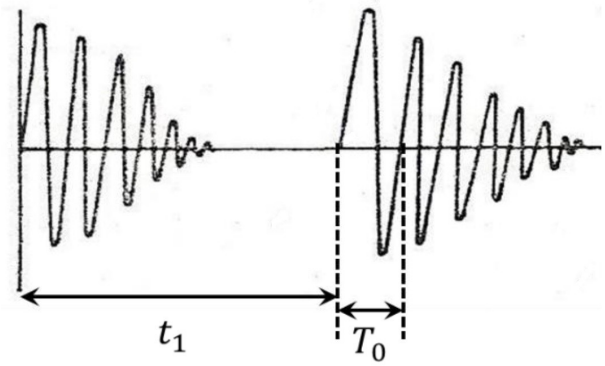
$u_2(t'=0) = U_0 = A$ et $i(t'=0) = 0 = -C_2 \dfrac{du_2}{dt'}(t'=0) = -B\omega_0$, d'où $B = 0$.

Donc $\boxed{u_2(t') = U_0 \cos(\omega_0 t')}$.

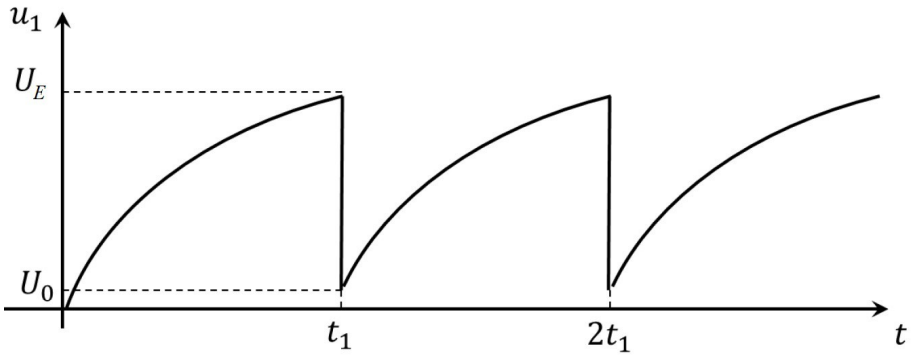
La période des oscillations électriques est donc : $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC_2}}$.

12) Si les pertes par effet Joule sont négligeables, l'intégralité de l'énergie électrique initiale est transmise à l'antenne. Or, l'énergie initiale du circuit est stockée dans le condensateur. Donc l'énergie reçue par l'antenne a pour expression : $\boxed{E_{antenne} = \dfrac{1}{2} C_2 U_0^2}$.

13) Le transfert de charges entre les deux condensateurs est quasi-instantané. Juste après ce transfert :
– l'éclateur se comporte comme un interrupteur ouvert, si bien que le condensateur de capacité C_1 se charge à nouveau ;
– les oscillations amorties du circuit LC_2 associé à l'antenne démarrent.
L'amortissement des oscillations se fait sur une durée inférieure à t_1, qui est la durée séparant deux transferts de charges. La durée entre deux départs d'oscillations amorties est donc de t_1.
T_0 est la pseudo-période de ces oscillations.



14) $U_0 < U_E$.



15) Pour émettre à la fréquence allouée, vu l'expression de T_0, on peut régler la valeur C_2 de la capacité du condensateur, ou la valeur de l'inductance propre L de la bobine.

16) Les fréquences audibles par l'oreille humaine sont comprises entre 20 Hz et 20 kHz.

17) Le signal reçu (figure 3) est un signal périodique non sinusoïdal de période t_1. Il peut être décomposé en série de Fourier, le fondamental ayant la fréquence $\boxed{f_1 = \frac{1}{t_1} = 400 \text{ Hz}}$, les harmoniques de rang n ayant des fréquences $f_n = n\, f_1$.
Le télégraphiste entend donc un son complexe de fréquence 400 Hz (fondamental + harmoniques de fréquences inférieures à 20 kHz).