Le texte ci dessous se réfère à des mesures classiques pour déterminer les caractéristiques d'un filtre passe bande.
On essaie de mettre en valeur les points suivants :

- détermination des incertitudes sur les mesures directes et dérivées
- détermination des incertitudes sur les valeurs attendues ; comparaison des intervalles.
- détermination de caractéristiques par la méthode es moindres carrés ; incertitude ; poids excessif de certains points, incertitude.
- Comparaison des courbes expérimentales et théoriques. Critère quantitatif de validité de la courbe théorique.

L'exemple proposé est réalisé à partir d'un circuit RLC série en RSF, tension de sortie aux bornes de R.. C=0,1µF et R=200Ω (boites de précision 1%) ; r (bobine)=34 Ω (au multimètre 1%). Les valeurs numériques du corrigé ont été relevées expérimentalement.

Dans une première partie on mesure les caractéristiques classiques (fréquence de résonance, gain à la résonance Go, facteur de qualité Q), avec leurs incertitudes et on les compare aux grandeurs calculées elles mêmes entachées d'incertitudes.
Dans une deuxième partie on détermine Q par la méthode des moindres carrés. On s'interroge ensuite sur l'incertitude et sur les points pertinent ou non.
Dans la troisième partie on cherche à comparer les points expérimentaux et la courbe théorique . la validité de la prévision théorique est testée en comparant l'erreur moyenne aux incertitudes.
Ces propositions sont modulaires, certaines questions pouvant être un peu lourdes numériquement ce qui n'est pas nécessairement un problème à l'heure des calculatrices et de Maple…

1 Caractéristiques du filtre

1-1) Déterminer la fréquence de résonance fo ; on passera en XY et on déterminera la fréquence pour laquelle le déphasage est nul. Evaluer l'incertitude Δf_o en tenant compte de l'incertitude de sensibilité Δf_{os} et celle due à l'appareil Δf_{oc}.

Pour l'incertitude de sensibilité on déterminera l'intervalle de fréquence $[f_1, f_2]$ pour lequel le déphasage nul n'est pas modifié de façon sensible. L'incertitude liée à l'appareil est donnée par la notice du constructeur.
On a $\Delta f_o = \Delta f_{os} + \Delta f_{oc}$

1-2) En déduire la valeur de l'inductance L. Déterminer l'incertitude sur L. On montrera que $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta C}{C} + 2\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}$ L'incertitude sur la capacité est indiquée par le constructeur de la boite de capacités.
Ecrire le résultat définitif en faisant attention aux chiffres significatifs.

2) Détermination du facteur de qualité et du gain à la résonance.

2-1) Relever et tracer les courbes du déphasage φ et du gain G en fonction de la fréquence . Attention à l'effet de charge sur la tension d'entrée.
2-2) A partir des courbes précédentes déterminer le gain à la résonance Go et la largeur D de la bande passante. Estimer les incertitudes sur Go et D. On n'oubliera pas que ces grandeurs résultent de mesures à l'aide d'appareils.
2-3) En déduire le facteur de qualité Q et l'incertitude ΔQ.
2-4) Confrontation avec les valeurs prévues Go_{att} et Q_{th}.

On a $Ho_{att}=\frac{R}{R+r}$ et $Q_{ttt}=\frac{L\omega_o}{R+r}$

Mesurer r à l'ohmmètre. Déterminer les incertitudes sur R,r puis sur Ho_{th} et Q_{th}.
Donner les encadrement correspondants pour les valeurs théoriques et expérimentales.
Conclure.

3) Détermination de Q à l'aide des moindres carrés.

En posant $X=(\frac{f}{fo}-\frac{fo}{f})^2$ et $y=\frac{1}{G^2}$ on a $y=\frac{1}{G_0^2}(1+Q^2X)$

$$err=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\frac{1}{H_o{}^2}-\frac{Q^2}{H_o^2}X_i)^2$$

On est ainsi ramené à une régression linéaire que l'on traite explicitement.

3-1) Calcul de Q.

On prend pour H_0 et ω_0 les valeurs déterminées en 2, déterminations qui ont typiquement la précision des appareils contrairement à celle de Q qui est liée au tracé de la courbe.

Déterminer l'expression de $\frac{\partial err}{\partial Q}=0$ et résoudre cette équation. Comparer à la valeur attendue.

3-2) Précision sur la pente $a=\frac{Q^2}{H_0{}^2}$

On peut montrer que l'incertitude sur a en négligeant les incertitudes sur les Xi (et donc sur l'indication de fréquence donnée par le générateur), est donnée par :

$$\Delta a=\frac{1}{Den}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}[(nX_j-\sum_{i=1}^{n}X_i)^2\Delta y_i]}\quad \text{avec}\quad Den=n\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2$$

on a $\Delta y_i=\frac{2}{G_i{}^2}\frac{\Delta G}{G}$ pourquoi ? Que vaut $\frac{\Delta G}{G}$?

calculer Δa. Quels termes ont un effet désastreux ? Reprendre les calculs en tronquant les sommes pour éliminer ces termes. En déduire l'incertitude sur Q.

4) Comparaison avec les courbes théoriques.

Tracer les courbes de gain et de phase en superposant les tracés expérimentaux et théoriques obtenus avec les valeurs précédentes.
Pour mieux maîtriser l'accord entre les mesures et la courbe théorique il faut calculer le rapport entre l'erreur et l'incertitude totale (expérimentale et induite sur la valeur théorique).

Il faut donc prendre la moyenne de $\frac{\sqrt{(G-(\frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2X\wedge 2)}})^2}}{\Delta G_{\exp}+\Delta G_{th}}$ et constater qu'elle est inférieure à un .

En négligeant les incertitudes sur X on a

$$\Delta G_{th}=G\sqrt{\frac{\Delta H_0{}^2}{H_0{}^2}+\frac{H_0{}^2}{G^2}2Q\Delta Q}$$

Calculer la moyenne ce dessus et conclure.