Oscillateurs couplés

Bibliographie :

- Brebec Ondes ed Hachette,
- Renvoizé Cap prepa 2 ed Pearson,
- Bertin Faroux Renault Mécanique 2 ed Dunod,
- Brasselet Mécanique ed Puf,
- Taillet Dictionnaire de physique ed De Boeck,
- Quaranta Tome 1 Mécanique ed Pierron,
- Lumbroso Problèmes résolus de mécanique du point et des systèmes de points ed Dunod.

Prérequis :

- Bases de la mécanique newtonienne.
- Bases de l'électrocinétique

Objectifs : Oscillateurs harmonique à plusieurs degrés de liberté

- Équation du mouvement ;
- Fréquences propres ;
- Modes propres ;
- Oscillations libres : superposition de modes propres ;
- Interprétations physiques des fréquences nulles.

Table des matières

Introduction :

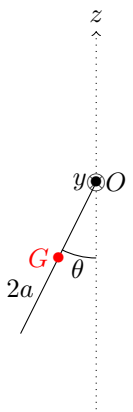
Dans ce chapitre, nous allons comprendre quelles sont les conséquences d'un couplage d' oscillateurs. Nous allons dans un premier temps donner des rappels pour l'oscillateur mécanique à une variable d'état puis nous allons, dans un second temps, étudier les oscillateurs à 2 degrés de libertés pour finir dans un troisième temps avec l'étude d'une chaîne d'oscillateurs couplés. Le but final étant de montrer qu'une chaîne infinie d'oscillateurs est un bon modèle pour expliquer la **propagation d'ondes** (sonores, sur une corde, une échelle de perroquet...).

I Oscillations libres d'un système à un degré de liberté

I.1 Exemple de système isolé : Cas du pendule pesant

I.1.a Position du problème

Soit le système suivant étudié :



I.1.b Mise en équation

Nous appliquons dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen le théorème du moment cinétique (TMC) au point O :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_0}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathscr{M}}_i\left(\overrightarrow{F}_{i,ext}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P} + \cancelto{0}{\overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{R}}$$

En projetant la relation ci-dessus sur l'axe Oy et en posant Jle moment d'inertie du pendule pesant par rapport à une extrémité , nous obtenons l'équation ci-dessous :

$$J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta$$

Dans l'approximation des petits angles, $\sin\theta \approx \theta$ et en posant la pulsation propre ω_0, nous avons :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{mga}{J}$. Il s'agit là de l'équation d'un **oscillateur harmonique**.

I.1.c Solution

Les solutions d'une telle équation différentielle s'écrivent :

$$\boxed{\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{ou} \qquad \theta(t) = B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)}$$

avec A, B, C des constantes à déterminer et φ la phase initiale.

Remarque :

Pour déterminer le moment d'inertie de ce pendule, il suffit simplement de connaître la période de ses oscillations. $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

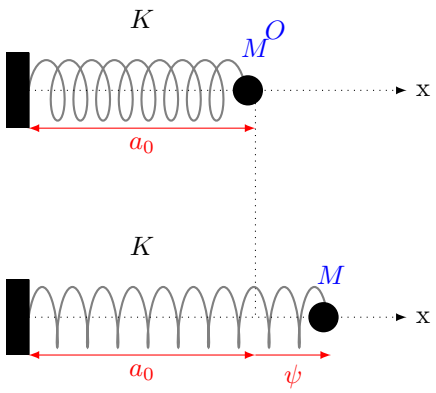
Remarque :

Le moment d'inertie J de pendule se retrouve utilisant la définition :

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m$$

I.2 Oscillateur mécanique à rappel linéaire

On considère un mobile de masse M, lié par un ressort de raideur K, astreint à glisser sans frottements le long d'une tige horizontale. La position au repos, pour laquelle la longueur du ressort est a_0, étant prise comme origine de l'axe Ox, le déplacement du mobile par rapport à cette position d'équilibre est $\Psi(t)$.



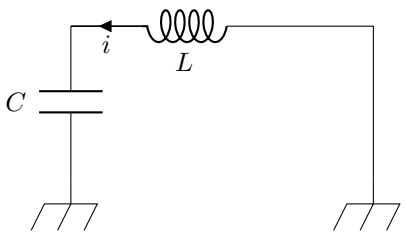
Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, l'équation du mouvement est :

$$\boxed{M\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}t^2} = -K\Psi}$$

qui conduit à des oscillations harmoniques de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$.

I.3 Oscillateur électrique

L'équivalent électrique de l'oscillateur mécanique présenté ci dessus est le suivant :



L'application de la loi des mailles au circuit donne :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0$$

avec $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. ou encore :

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{q}{C}}$$

Les équations différentielles électrique et mécanique sont égales si le ressort de constante de raideur K et la masse M sont remplacés respectivement par l'inverse d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L.

L'évolution de la charge q est régie par l'équation différentielle :

$$\ddot{q} + \Omega_0^2 q = 0$$

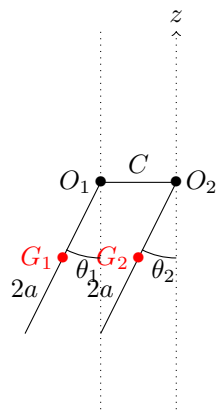
où $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est l'analogue de la pulsation de l'oscillateur mécanique $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$.

II Oscillations libres d'un système à deux degrés de liberté

II.1 2 Pendules couplés par un fil de torsion

II.1.a Étude du dispositif

Soit le système suivant étudié :



Le système est constitué de deux pendules pesant de moments d'inertie identique J. Ils sont tout les deux couplés par un fil de torsion de constante de torsion C. Le système d'équation régissant l'évolution au cours du temps de ces pendules est :

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -mga\sin\theta_1 + C\left(\theta_2 - \theta_1\right) \\ J\ddot{\theta}_2 = -mga\sin\theta_2 + C\left(\theta_1 - \theta_2\right) \end{cases}$$

Dans l'approximation des petits angles, le système d'équations devient le suivant :

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 + \theta_1\left(mga + C\right) - C\theta_2 = 0 \\ J\ddot{\theta}_2 + \theta_2\left(mga + C\right) - C\theta_1 = 0 \end{cases}$$

Remarque :

On remarque un changement de la pulsation propre si l'on maintient un pendule fixe, l'autre a une pulsation de :

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{mga + C}{J}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{C}{J}}$$

On observe donc une augmentation de la pulsation propre lors du couplage.

On réécrit donc le système d'équation sous la forme :

$$\begin{cases} -\theta_1\omega_0'^2 + \frac{C}{J}\theta_2 = \ddot{\theta}_1 \\ -\omega_0'^2\theta_2 + \frac{C}{J}\theta_1 = \ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

Pour découpler ce système d'équations, on utilise souvent l'astuce qui consiste d'une part à sommer l'équation 1 avec l'équation 2 et d'autre part à soustraire l'équation 1 avec l'équation 2. 1-2 donne :

$$\left(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2\right) = \frac{C}{J}\left(\theta_2 - \theta_1\right) + \omega_0'^2\left(\theta_2 - \theta_1\right) = \theta_1\left(-\frac{C}{J} - \omega_0'^2\right) - \theta_2\left(-\frac{C}{J} - \omega_0'^2\right)$$

$$\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 = \left(-\frac{C}{J} - \omega_0'^2\right)\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

En posant $\theta_a = \theta_1 - \theta_2$, nous obtenons :

$$\boxed{\ddot{\theta}_a + \left(\omega_0'^2 + \frac{C}{J}\right)\theta_a = 0}$$

En faisant 1+2, nous obtenons :

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = \left(\frac{C}{J} - \omega_0'^2\right)\left(\theta_1 + \theta_2\right)$$

En posant $\theta_s = \theta_1 + \theta_2$, nous arrivons à :

$$\boxed{\ddot{\theta}_s + \left(-\frac{C}{J} + \omega_0'^2\right)\theta_s = 0}$$

Avec $\omega_0'^2 = \omega_0^2 + \frac{C}{J}$ et en réorganisant les termes, nous obtenons :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_s + \omega_s^2\theta_s = 0 \\ \ddot{\theta}_a + \omega_a^2\theta_a = 0 \end{cases}$$

Avec :

$$\boxed{\omega_s = \omega_0 \qquad \text{et} \qquad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2C}{J}}}$$

Les solutions sont les suivantes :

$$\begin{cases} \theta_a(t) = A_a\cos\left(\omega_a t + \varphi_a\right) \\ \theta_s(t) = A_s\cos\left(\omega_s t + \varphi_s\right) \end{cases}$$

II.1.b Modes propres et battements

IMPORTANT

Les pulsations ω_s et ω_a sont appelées **pulsations propres** du système d'oscillateurs couplés.

Il est possible de connaître θ_1 et θ_2 en remarquant que :

$$\theta_1(t) = \frac{1}{2}\left(\theta_a + \theta_s\right) \qquad \text{et} \qquad \theta_2(t) = \frac{1}{2}\left(-\theta_a + \theta_s\right)$$

L'évolution de notre système évolue dans un mode ou un autre dépend simplement des conditions initiales.

Un mode propre : le mode symétrique Supposons qu'on donne à notre système les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1(t=0) = \theta_2(t=0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

Application 1:

Si temps, leur demander d'utiliser les C.I pour arriver à :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0\cos\left(\omega_s t\right) \\ \theta_2(t) = \theta_0\cos\left(\omega_s t\right) \end{cases}$$

L'utilisation des conditions initiales nous fait arriver à la conclusion suivante :

$$\boxed{\theta_1(t) = \theta_2(t)}$$

Le système oscille alors à la seule pulsation ω_s. Ce **mode propre** d'oscillation associé à la pulsation ω_s correspond à des déplacements identiques des mobiles. Il s'agit d'un mode d'**oscillations symétrique**.

Un autre mode propre : le mode antisymétrique

Supposons maintenant que nous imposions les conditions initiales suivantes à notre système :

$$\begin{cases} \theta_1(t=0) = -\theta_2(t=0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

L'utilisation des conditions initiales nous donne :

$$\boxed{\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \theta_0\cos\left(\omega_a t\right)}$$

Le système oscille à la seule pulsation ω_a. Nous obtenons alors le mode propre d'oscillation de pulsation ω_a. C'est un mode d'**oscillation antisymétrique**.

Que se passe-t-il maintenant si le système est préparé dans des conditions initiales quelconques ?

On choisit par exemple :

$$\theta_1 = \theta_0 \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = 0$$

et des vitesses initiales nulles. La condition sur les vitesses initiales donne $\varphi_a = \varphi_s = 0$ et celle sur les positions initiales donne $Aa = A_s = \frac{\theta_0}{2}$. On obtient donc les lois d'évolutions suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}\left(\cos\left(\omega_a t\right) + \cos\left(\omega_s t\right)\right) \\ \theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2}\left(-\cos\left(\omega_a t\right) + \cos\left(\omega_s t\right)\right) \end{cases}$$

En utilisant les lois élémentaires sur les cosinus :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

et

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0\cos\left(\frac{(\omega_a+\omega_s)}{2}t\right)\cos\left(\frac{(\omega_a-\omega_s)}{2}t\right) \\ \theta_2(t) = \theta_0\sin\left(\frac{(\omega_a+\omega_s)}{2}t\right)\sin\left(\frac{(\omega_a-\omega_s)}{2}t\right) \end{cases}$$

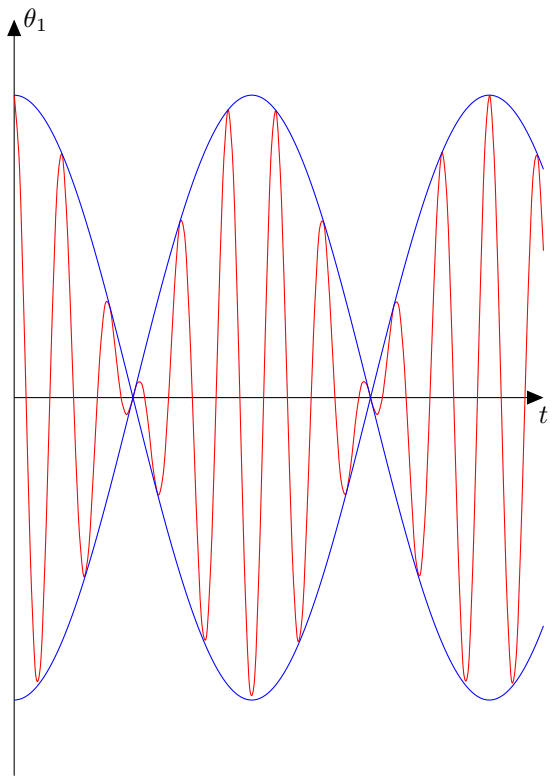
En posant :

$$\Delta\Omega = \frac{\omega_a - \omega_s}{2} \qquad \text{et} \qquad \Omega = \frac{\omega_a + \omega_s}{2}$$

Les solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ se réécrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0\cos\left(\Omega t\right)\cos\left(\Delta\Omega t\right) \\ \theta_2(t) = -\theta_0\sin\left(\Omega t\right)\sin\left(\Delta\Omega t\right) \end{cases}$$

Nous allons observer un **phénomène dit de battements**, en effet une enveloppe de fréquence lente $\Delta\Omega$ module le signal rapide Ω. L'allure de $\theta_1(t)$ est la suivante :



On peut faire l'hypothèse d'un couplage faible c'est à dire que :

$$\Omega \gg \Delta\Omega$$

On obtient en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de ω_a :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2C}{J}} = \omega_0\sqrt{1 + \frac{2C}{\omega_0^2 J}} \approx \omega_0\left(1 + \frac{C}{\omega_0^2 J}\right)$$

Soit finalement :

$$\Delta\Omega = \frac{\omega_a - \omega_s}{2} = \frac{C}{2\omega_0 J}$$

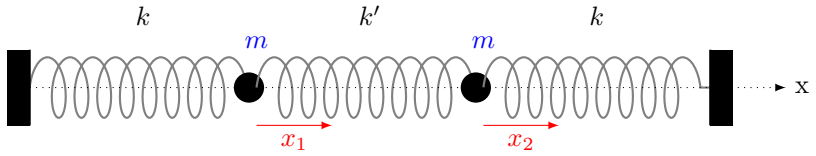
Remarque :

Plus le couplage C est lâche, plus le transfert d'énergie entre les 2 pendules est long.
Le terme $\frac{1}{\Delta\Omega}$ traduit le temps qu'il faut au système pour passer du mode symétrique au mode antisymétrique.

IMPORTANT

- Les mouvements d'un système stable dont l'évolution est décrite par un système différentiel linéaire résultent d'une superposition de mouvements correspondant aux modes propres du système.
- Ces modes propres sont des états d'oscillation, où tous les éléments du système sont animés d'un mouvement oscillant dont la pulsation est une pulsation propre du système.
- Si le système est excité initialement dans l'un de ses modes propres, il y reste par la suite.

II.2 Application d'après IPhO 2015



Calculer la fréquence de battements.

La mise en équation du problème permet d'obtenir le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k'(x_1 - x_2) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k'x_1 - k'x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + k'x_2 - k'x_1 = 0 \end{cases}$$

En faisant 1-2 et 1+2, le système devient :

$$\begin{cases} m\left(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2\right) + k\left(x_1 - x_2\right) + 2k'\left(x_1 - x_2\right) = 0 \\ m\left(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2\right) + k\left(x_1 + x_2\right) = 0 \end{cases}$$

On pose $u = x_1 + x_2$ et $v = x_1 - x_2$ ainsi :

$$\begin{cases} \ddot{v} + \Omega_1^2 v = 0 \\ \ddot{u} + \Omega_2^2 u = 0 \end{cases}$$

avec $\Omega_1^2 = \frac{k+2k'}{m}$ et $\Omega_2^2 = \frac{k}{m}$. L'hypothèse d'un couplage lâche, nous permet d'écrire à l'ordre 1 :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2k'}{k}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2k'}{k}}$$

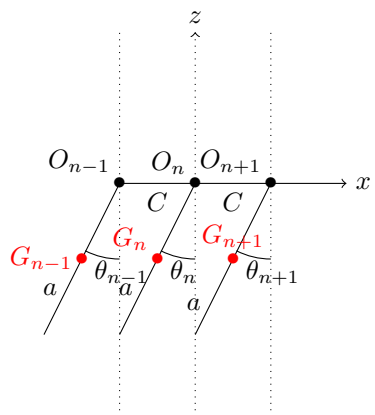
$$f_1 \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}\left(1 + \frac{k'}{k}\right)$$

finalement la fréquence de battement Δf vaut :

$$\Delta f = f_1 - f_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k'}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

III Chaîne infinie de pendules couplés

III.1 Position du problème



On considère une chaîne infinie de pendules pesants couplés par un fil de torsion. Chaque pendule a un moment d'inertie identique J fixée à l'axe de rotation Ox au point O_n d'abscisse $x_n = nd$. Il oscille dans le plan yO_nz. On négligera les phénomènes dissipatifs.

III.2 Mise en équation

Appliquons le théorème du moment cinétique en O_n, projeté sur l'axe Ox, au pendule n.

L'inventaire des moments s'exerçant sur le nième pendule est :

- son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ de moment $\overrightarrow{\mathscr{M}}_{O_n}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{O_nG_n} \wedge m\overrightarrow{g} = -\frac{L}{2}mg\sin(\theta_n)\overrightarrow{e_x}$;
- le couple de rappel exercé par le fil de torsion compris entre O_{n-1} et O_n est $-C\left(\theta_n - \theta_{n-1}\right)\overrightarrow{ex}$.
- le file de torsion compris entre O_n et O_{n+1} exerce le couple de rappel $-C(\theta_n - \theta_{n+1})\overrightarrow{e_x}$.

Dans le cas de petites amplitudes et après projections sur l'axe Ox, le théorème du moment cinétique appliqué en O_n s'écrit :

$$J\ddot{\theta_n} = C\left(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}\right) - \frac{mgL}{2}\theta_n$$

III.3 Approximation des milieux continus

Supposons maintenant que la distance d entre deux pendules successifs est très faible devant les longueurs d'onde des ondes étudiées. On construit une fonction $\theta(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^2$, telle que $\theta(x = nd, t) = \theta_n(t)$.

On effectue un développement de Taylor-Young au voisinage de $x = nd$ à l'ordre 2 de :

$$\theta_{n+1}(t) = \theta\left(x + d, t\right) = \theta(x,t) + d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \theta_n(t) + d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

et

$$\theta_{n-1}(t) = \theta(x - d, t) = \theta(x,t) - d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \theta_n(t) - d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

On a alors :

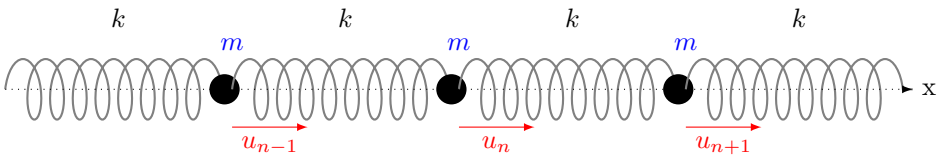
$$\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1} = d^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

Nous obtenons alors une **équation d'onde** :

$$\boxed{J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Cd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mgL}{2}\theta}$$

III.4 Application : chaîne infinie d'oscillateurs

Soit le système suivant étudié :



On considère N points matériels A_i identiques, de masse m, reliés par des ressorts tous identiques de raideur k et de longueur à vide l_0. Au repos, les points A_i sont distants de a.

En étudiant le mouvement du point A_n et en utilisant l'approximation des milieux continus, montrer que l'équation vérifiée par le mouvement du point A_n est l'équation de d'Alembert dont vous donnerez l'expression.

En projection sur l'axe Ox, , le théorème de la résultante cinétique appliqué au point A_n dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen s'écrit :

$$m\ddot{u_n} = -k\left(u_n - u_{n-1}\right) + k\left(u_{n+1} - u_n\right)$$

en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, l'équation devient :

$$\ddot{u_n} = -\omega_0^2\left(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}\right)$$

Définissons $u(x_n, t) = u_n(t)$, fonction de classe $\mathscr{C}^2$, dans l'approximation des milieux continus, nous pouvons effectuer les développements limités à l'ordre 2 suivants :

$$u_{n-1}(t) = u(x_n - a, t) = u(x_n, t) - a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et

$$u_{n+1}(t) = u(x_n + a, t) = u(x_n, t) + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

d'où : $u_{n-1}(t) + u_{n+1}(t) = 2u(x_n, t) + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t)$.

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\omega_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

D'où l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

avec $c = a\omega_0$ la célérité de l'onde.

IV Conclusion

Dans la chaîne d'oscillateurs couplés, le déplacement d'un mobile induit une force qui agit sur ses plus proches voisins, les mettant en mouvements. Cette modélisation va nous permettre d'aboutir à l'équation de d'Alembert ; Équation dont on parlera la semaine prochaine lors de notre étude, entre autres, des ondes sonores et ondes mécaniques.