Introduction à la relativité

Les choses seraient-elles *relatives* ? Dépendraient-elles du *point de vue*, c'est-à-dire en particulier, de l'observateur ? Si le terme *relativité* est certes consacré par l'usage, il apparaît peu approprié car *la relativité* est plutôt une *théorie des invariants*, c'est-à-dire des grandeurs ou quantités qui *ne dépendent pas du point de vue*.

A- ASPECTS CINÉMATIQUES : PRINCIPE DE RELATIVITÉ, ADDITION DES VITESSES, EFFET DOPPLER RELATIVISTE[1]

I- Le principe de relativité commence avec Galilée

On peut énoncer ce principe de la manière suivante : *Il existe des « points de vue équivalents » sur le monde physique*. Ce principe a été énoncé pour la première fois par Galilée sous la forme « *le mouvement est comme rien* » : le point de vue sur le monde physique de celui qui voyage en bateau est partagé par celui qui est resté sur le quai. S'ils font la même expérience, ils obtiendront le même résultat.
On peut le reformuler en affirmant qu*'il existe des classes de référentiels d'espace et/ou de temps équivalents pour les lois de la physique.* Ces classes de référentiels équivalents d'espace et/ou de temps sont rangés dans deux catégories.

1) Les classes de référentiels équivalents au repos l'un par rapport à l'autre

- Deux référentiels d'espace au repos l'un par rapport à l'autre et simplement « décalés » (ils se déduisent par une translation) sont équivalents pour la physique. C'est ainsi que *les lois physiques ne font jamais intervenir intrinsèquement la position d'un point dans l'univers*. Elles ne font apparaître que *des distances*. *L'espace est homogène* et les lois physiques sont *invariantes par le changement de variable* $x' = x - a$.
- Des référentiels d'espace au repos l'un par rapport à l'autre et simplement « tournés » (ils se déduisent par une rotation des axes de coordonnées) sont équivalents pour les lois de la physique. *Il n'y a pas de directions privilégiées dans l'univers*. *L'espace est isotrope* et les lois physiques sont *invariantes dans une rotation des axes de coordonnées*. Elles s'expriment donc indépendamment de la référence à des axes et admettent une *expression vectorielle*.
- Des référentiels de temps simplement « décalés » (horloges avec un décalage d'origine) sont équivalents pour les lois de la physique. Les lois physiques ne font jamais apparaître intrinsèquement un instant particulier dans le temps. *Le temps est homogène (uniforme)* et les lois physiques ne font intervenir que *des durées*. Le temps n'y apparaît qu'au travers d*'équations différentielles où figurent les dérivées de certaines grandeurs physiques par rapport au temps*.

2) La classe des référentiels en mouvement relatif et équivalents pour les lois de la mécanique

La transformation de Galilée définit la façon dont se correspondent les coordonnées (x, y, z, t) d'un *évènemen*t (couple position-date) dans un référentiel associé au repère d'espace R et ses coordonnées (x', y', z', t') dans un référentiel associé au repère d'espace R' en translation rectiligne uniforme dans R avec une vitesse $\vec{V} = V\,\vec{u_x}$ lorsque

- les axes des repères d'espaces sont parallèles
- les évènements origine coïncident

$$x' = x - V\,t \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

On connaît d'autre part l'énoncé galiléen de la loi du mouvement d'un point matériel (deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique). Moyennant l'*invariance de la masse* et une hypothèse *d'invariance des forces* implicite en physique préeinsteinienne, *le principe fondamental de la dynamique est invariant dans la transformation de Galilée.*

Deux référentiels d'espace en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre sont équivalents pour les lois de la mécanique. Cette catégorie de référentiels d'espace équivalents constitue d'ailleurs la classe des *référentiels galiléens.*

[1] Syllabus : **PRINCIPLE OF RELATIVITY, ADDITION OF VELOCITIES, RELATIVISTIC DOPPLER EFFECT**

II- De Michelson à Einstein : la question de l'addition des vitesses en physique pré-einsteinienne

1) La transformation de Galilée sous-tend la loi classique de composition des vitesses

Les relations $x' = x - V\,t$ et $t' = t$ conduisent sans difficulté à

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\cdot 1 = \frac{d}{dt}\left(x - V\,t\right) = \frac{dx}{dt} - V = v_x - V$$

$$v'_x = v_x - V$$

Cette relation s'interprète comme la projection sur l'axe Ox de la loi de composition des vitesses qui prend ici une forme particulièrement simple puisque le référentiel R' est en translation rectiligne uniforme dans R (la vitesse d'entraînement est uniforme et égale à la vitesse de O' dans R). *La transformation de Galilée est donc cohérente avec la loi classique de composition des vitesses.*

2) Le problème posé par la vitesse de la lumière à la fin du 19ème siècle

- La vitesse de la lumière est mesurée dès le 17ème siècle : Galilée propose une première méthode puis Roemer l'évalue en s'intéressant à la variation de la période d'occultation des satellites de Jupiter à différents moments de l'année. Elle est mesurée à nouveau avec précision au 19ème siècle par Fizeau (1849, méthode de la roue dentée) puis par Foucault (1862, méthode du miroir tournant). Toutes ces mesures déterminent évidemment la vitesse de la lumière *par rapport à un référentiel terrestre*. Cette vitesse apparaît *isotrope* dans ce référentiel, c'est-à-dire que sa valeur semble indépendante de sa direction de propagation.
- Par ailleurs, depuis Maxwell (1865) et les expériences historiques de Hertz (1880), la lumière est identifiée à une onde électromagnétique dont la propagation est inscrite dans les *équations de Maxwell* qui régissent le champ électromagnétique. La valeur de la célérité de propagation est liée aux constantes de la théorie électromagnétique par la relation fondamentale $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$. Le problème posé est alors le suivant :

- *Si le principe de relativité s'applique à l'électromagnétisme*, alors les équations de Maxwell sont invariantes par changement de référentiel, la célérité de propagation de la lumière est isotrope dans tous les référentiels, c'est-à-dire qu'elle a la même valeur, quelle que soit la direction de propagation et ceci dans tous les référentiels. *Mais alors, cela signifie que la loi de composition galiléenne des vitesses ne s'applique pas à la vitesse de la lumière.*
- Inversement, *si la loi galiléenne de composition des vitesses s'applique à la vitesse de la lumière*, alors, cela signifie que la célérité de propagation n'est isotrope que dans un seul référentiel et donc que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par changement de référentiel. En d'autres termes, cela signifie que *le principe de relativité ne s'applique pas à l'électromagnétisme.*

- Une question est donc posée et l'expérience doit trancher entre ces deux éventualités.

3) L'expérience de Michelson et Morley (1880-1885)

- L'expérience est conçue pour mesurer la vitesse de la Terre dans l'Éther (nom qu'on donne, à l'époque, au référentiel supposé unique au sein duquel les équations de Maxwell seraient valables).
- Présentation rapide de l'appareil (observation des anneaux à l'infini) et du principe de l'expérience. Il s'agit d'un dispositif interférentiel, avec lequel on peut réaliser des franges d'interférences ou des anneaux (selon le mode d'utilisation). La mécanique très fine de l'appareil permet de voir les franges ou les anneaux défiler lorsque la longueur d'un des bras de l'appareil varie. En effet, la variation de longueur d'un bras de l'appareil introduit une différence de marche optique entre les deux voies qui modifie la figure d'interférences observée.
- De manière analogue, si, sans changer la longueur des bras de l'appareil, on introduit une variation de la vitesse de propagation de la lumière sur l'un des bras (air chaud), on voit de la même façon une modification de la figure d'interférences. C'est cet effet qui va être mis à profit par Michelson.
- Un calcul sommaire de l'ordre de grandeur des effets attendus : si les deux bras ont une même longueur L et si la vitesse de la Terre dans l'Ether est V, alors, la variation Δp de l'ordre d'interférence en un point lorsqu'on échange les deux bras de l'appareil est $\Delta p = 2\dfrac{L}{\lambda}\left(\dfrac{V}{c}\right)^2$.
- L'expérience réitérée un très grand nombre de fois dans des conditions permettant une précision croissante se soldera par un échec : *il n'est pas possible de mesurer une vitesse de la terre dans l'Éther*, et ceci à quelque moment que l'expérience soit faite. La conclusion est donc la suivante : *la borne supérieure de la vitesse de la Terre dans l'Éther ne cesse de décroître au fur et à mesure que la précision des expériences réalisées s'accroît et on est amené à la considérer comme nulle.*

- En d'autres termes, *l'Éther n'existe pas*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas mettre en évidence un référentiel privilégié unique au sein duquel les équations de Maxwell seraient valables. Au contraire, *la vitesse de propagation de la lumière apparaît isotrope dans tous les référentiels.*
- Mais alors, cela signifie que la composition galiléenne des vitesses ne peut pas s'appliquer à la vitesse de la lumière. *Il va falloir reconstruire la cinématique*.

III- Einstein 1905 : une nouvelle cinématique

1) La transformation de Lorentz

Einstein va *repenser les concepts d'espace et de temps* et déboucher sur une cinématique nouvelle fondée sur quelques idées extrêmement générales et fondamentales, parmi lesquelles :

- l'espace est *homogène et isotrope*,
- le temps est *uniforme*,
- il existe en physique un *principe de causalité* qui exprime que certains événements entretiennent les uns avec les autres des relations de cause à effet.

Ces hypothèses conduisent à une structure de l'espace-temps définie par la *transformation de Lorentz* par laquelle se correspondent les coordonnées *(x, y, z, t)* et *(x', y', z', t')* d'un événement dans deux référentiels différents.

$$x' = \frac{x - V\,t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{V\,x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + V\,t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{V\,x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Cette forme correspond à une situation simple où

- Les évènements origine coïncident : l'événement de coordonnées $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$ qui a lieu au point origine de R à la date origine est également caractérisé par $x' = 0, y' = 0, z' = 0, t' = 0$.
- Les axes des deux référentiels restent parallèles (ils sont donc en translation l'un par rapport à l'autre).
- Cette translation est rectiligne uniforme parallèlement à la direction commune des axes *Ox* et *O'x'*.

Les caractères essentiels de la transformation de Lorentz :

- Les relations sont « symétriques » et traduisent évidemment l'équivalence des deux référentiels.
- L'existence d'une vitesse limite *c*, borne supérieure de toute vitesse de déplacement est inscrite dans la transformation : en effet, les relations n'ont un sens que si $V < c$. Il s'agit en fait de la *vitesse maximale de propagation de l'action causale*, dont l'existence est nécessaire pour satisfaire le *principe de causalité*.[2]
- La nouvelle cinématique redonne la cinématique de Galilée pour les faibles vitesses $V << c$. En revanche, la nouvelle cinématique doit être utilisée dès que les vitesses atteignent une fraction appréciable (10 à 20 %) de *c*.
- Dans cette nouvelle cinématique, la loi de composition des vitesses conduit bien à une vitesse de la lumière dont la norme est invariante par changement de référentiel.
- La transformation de Galilée et la loi classique de composition des vitesses apparaissent donc comme un comportement limite associé à un domaine de validité qui correspond très largement aux situations usuelles où toutes les vitesses sont très inférieures à *c*.

[2] La dynamique relativiste montre que cette vitesse est aussi celle des particules de masse nulle. Elle est donc assimilée à la vitesse des photons, c'est-à-dire à la vitesse de la lumière dans le vide.

2) La métrique de l'espace-temps : un invariant cinématique entre deux évènements

- Dans la cinématique d'Einstein, l'espace et le temps sont liés de manière symétrique et le temps ne joue plus le rôle singulier qu'il jouait dans la transformation de Galilée. C'est la raison pour laquelle on parle d'*espace-temps*.
- La transformation de Lorentz est associée à une notion de *distance dans l'espace-temps* (métrique) telle que la distance d'espace-temps entre l'événement considéré (repéré par *x, y, z, t* ou par *x', y', z', t'* selon le référentiel) et l'événement origine (repéré par *0, 0, 0, 0* dans les deux référentiels) soit *invariante* par changement de référentiel :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

- Dans l'espace-temps einsteinien, l'espace et le temps ne jouent cependant pas le même rôle comme le montre la forme de la métrique : si *x, y* et *z* jouent bien le même rôle (comme dans l'espace géométrique usuel), le signe – dont est précédé le terme c^2t^2 montre bien le statut particulier du temps. Avec Einstein, l'espace et le temps ne sont *pas* devenus équivalents.
- Dans cet univers cinématique à quatre dimensions, il faudra repenser les lois physiques pour en donner une expression nouvelle, compatible avec la nouvelle cinématique et avec le formalisme quadridimensionnel. Ce point est examiné au **chapitre B.**

3) Un effet remarquable : la dilatation des durées

Considérons un couple d'évènements ayant lieu en un même point d'un référentiel R' : un émetteur périodique lié à R' émet une succession de « tops » séparés, dans le référentiel R' par une durée T_0 (période propre de l'émetteur). Nous pouvons alors considérer le couple d'évènements suivants :

- Émission du premier top ($x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$ dans R et $x' = 0, y' = 0, z' = 0, t' = 0$ dans R')
- Émission du deuxième top : coordonnées dans R' ($x' = 0, y' = 0, z' = 0, t' = T_0$). La date de cet événement dans R est

$$t = \frac{t' + \frac{V\,x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

La durée entre les deux évènements dans R est donc $\dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ alors que dans R', elle est égale à T_0. Ainsi, la durée entre les deux évènements dépend du référentiel, alors qu'en cinématique einsteinienne elle aurait la même valeur dans les deux référentiels. C'est le phénomène de *dilatation des durées*. La durée la plus courte entre les deux évènements est celle que l'on mesure dans *le référentiel propre au couple d'évènements*, c'est-à-dire dans *un référentiel où les deux évènements ont lieu au même point*. Dans tout autre référentiel, la durée entre ces deux évènements qui ont lieu en deux points différents est plus grande.

4) La durée de vie des muons et la dilatation des durées

La dilatation des durées permet d'*observer des particules très instables* : en créant ces particules avec des vitesses *V* très proches de *c* dans les *accélérateurs de particules*, on allonge leur durée de vie apparente (durée de vie dans le laboratoire) et on a donc le temps de faire des observations sur ces particules qu'on ne pourrait absolument pas observer au repos.

Il en va ainsi des *muons*, particules instables ayant une charge égale à la charge élémentaire *e* mais une masse 207 fois plus importante que celle de l'électron. La durée de vie d'un muon au repos est 2,2 µs, durée moyenne au bout de laquelle il se désintègre.

C'est ainsi qu'on peut créer (lors de collisions) des muons à des vitesses *V* approchant *c* : par exemple $V = 0.9994\ c$. À une vitesse aussi proche de *c*, l'effet de dilatation des durées devient très important et on prévoit que la durée de vie Δt des muons dans le laboratoire passe ainsi de 2,2 µs (durée dans leur référentiel) à 63,6 µs.

Cette expérience a été réalisée au CERN : les muons accélérés à $V = 0.9994\ c$ « vivent » bien 63,6 µs et non plus 2,2 µs.

5) La dilatation des durées et le fonctionnement du GPS

Dans un système de localisation par satellites, les distances sont déterminées par la mesure des durées Δt de propagation de signaux électromagnétiques émis par des satellites en direction du récepteur GPS. La mesure de la durée Δt donne accès à la distance *d* selon $d = c\ \Delta t$. Bien entendu, pour se repérer il faut trois coordonnées donc trois satellites. Le point M se trouve ainsi à l'intersection de trois sphères centrées chacune sur l'un des satellites[3].

Une bonne localisation repose sur une détermination précise des rayons des sphères précédentes, donc nécessite la mesure précise des durées Δt de propagation de la lumière entre le GPS et les trois satellites. Il faut alors prendre en compte les effets de dilatation des durées.

Dans sa rotation autour de la Terre, le satellite en orbite à 20 000 km d'altitude se déplace à V = 3,9 .10^3 m/s. L'effet de dilatation des durées est de l'ordre de

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3{,}9.10^3}{3{,}0.10^8}\right)^2}}=1+8{,}45.10^{-11}$$

Ceci signifie par exemple que l'écart sur une durée de l'ordre du jour (86 400 s) est de 7 µs. Cet écart peut paraître infime, mais il a des conséquences sur la mesure en question puisqu'il peut conduire à une erreur de positionnement, au bout d'un jour, de l'ordre de 2 km.

En réalité, un deuxième effet relativiste doit être pris en compte. En effet, le champ de gravitation est plus faible à l'altitude des satellites qu'au niveau du sol et la *relativité générale* prévoit que les horloges des satellites sont affectées par un décalage en sens inverse de 46 µs par jour par rapport à l'horloge du GPS de l'utilisateur.

Les GPS intègrent donc les deux corrections relativistes pour déterminer à quelques mètres près la position de l'utilisateur.

IV- L'effet Doppler relativiste

1) Rappel : l'effet Doppler en cinématique classique.

Effet Doppler longitudinal

Considérons un récepteur immobile en $x = 0$ qui reçoit les signaux d'un émetteur en mouvement rectiligne et uniforme de vitesse V (algébrique) le long de la droite Ox et situé en $x_0 > 0$ à l'instant t. L'émetteur délivre un signal sinusoïdal de période T_0 se propageant à la célérité c[4]. Pour plus de simplicité, on imagine ce signal comme une succession de tops équidistants de T_0. Un premier top est émis à la date $t = 0$ vers le récepteur. Une période plus tard, l'émetteur est en $x = x_0 + V\,T_0$ et le top qu'il a émis à la date $t = 0$ est en $x_1 = x_0 - cT_0$. La distance qui sépare ces deux tops est la période spatiale de l'onde dans le référentiel du récepteur, c'est-à-dire la longueur d'onde que va mesurer le récepteur immobile. Elle est donc telle que

$$\lambda_{reçu} = (x_0 + V\,T_0) - (x_0 - c\,T_0) = (V + c)T_0$$

Si l'émetteur était au repos ($V = 0$), elle serait égale à la longueur d'onde émise $\lambda_{émis} = x_0 - (x_0 - c\,T_0) = cT_0$. Du fait du déplacement de l'émetteur, il y a donc une modification de la longueur d'onde telle que

$$\frac{\lambda_{reçu}}{\lambda_{émis}} = 1 + \frac{V}{c}$$

Le décalage est $\lambda_{reçu} - \lambda_{émis}$ et le décalage relatif est $(\lambda_{reçu} - \lambda_{émis})/\lambda_{émis} = \lambda_{reçu}/\lambda_{émis} - 1 = V/c$. Il est

- positif quand l'émetteur s'éloigne du récepteur ($V > 0$ et décalage vers le rouge ou *redshift*)
- négatif quand l'émetteur se rapproche du récepteur ($V < 0$ et *blueshift* ou décalage vers le bleu).
- Ces appellations sont liées à la lumière visible sachant que le spectre électromagnétique perçu par l'œil s'étale du rouge (0,65 à 0,75 µm) au bleu (0,40 µm).
- Dans le cas du son, ces termes sont moins appropriés et on traduit plutôt le résultat en terme de fréquence : le son apparaît plus grave quand l'émetteur s'éloigne et plus aigu quand il se rapproche.

L'effet Doppler est d'autant plus facile à détecter que le rapport V/c est grand : dans le cas du son, la valeur de la célérité de propagation $c = 340$ *m/s* le rend très aisément audible pour des émetteurs ayant des vitesses de quelques dizaines de *km/h*. Dans le cas de la lumière, la valeur $c = 3{,}00.10^8$ *m/s* rend l'effet imperceptible sauf pour des vitesses très élevées. C'est grâce à l'observation du *redshift* sur des galaxies lointaines que Hubble a mis en évidence en 1928 l'*expansion de l'Univers* en observant le décalage vers le rouge, dans le spectre de la lumière qui nous parvient des étoiles et galaxies les plus éloignées

[3] En réalité le nombre de satellites est plus élevé, pour minimiser les erreurs.
[4] Il s'agit à ce stade d'une onde d'un type quelconque, pas forcément électromagnétique.

de l'Univers[5]. Dans le cas du *radar de vitesse* utilisé dans la *circulation routière*[6], il s'agit d'un signal électromagnétique (non visible) les vitesses des véhicules sont de l'ordre de *30 m/s* et le rapport *V/c* est donc de l'ordre de 10^{-7}. La mesure effectuée (par un procédé de détection approprié) est celle du décalage en fréquence entre le signal émis et le signal reçu. Ce décalage est proportionnel à la vitesse du véhicule.

Généralisation : la largeur Doppler des raies spectrales

On peut montrer que quand la vitesse de l'émetteur n'est pas orientée dans la direction de la source, il subsiste un effet Doppler qui fait simplement intervenir la vitesse radiale V_r de l'émetteur. Alors

$$\frac{\lambda_{reçu}}{\lambda_{émis}} = 1 + \frac{V_r}{c}$$

L'effet Doppler est à l'origine de la *largeur Doppler* des raies spectrales d'émission des atomes : dans une lampe à vapeur de sodium ou de mercure telle que celles qui sont utilisées en travaux pratiques, la température de la vapeur de gaz est associée à une vitesse d'agitation thermique V de l'ordre de quelques centaines ou milliers de *m/s*, conformément à ce que suggère le modèle cinétique du gaz parfait

$$V = \sqrt{\frac{3\, k_B\, T}{m}}$$

Ces vitesses ayant toutes les orientations possibles par rapport au laboratoire, la vitesse radiale, relativement à l'observateur est donc comprise entre $-V$ et V d'où une largeur spectrale relative $2V/c$. Cette largeur est faible mais elle contribue au fait qu'une radiation ne soit jamais absolument monochromatique. La largeur Doppler des raies spectrales peut être réduite en travaillant avec une vapeur à très basse température.

Absence d'effet Doppler transversal en physique préeinsteinienne

La relation précédente montre que si la vitesse radiale est nulle (mouvement de la source orthogonal à la direction de visée), il n'y a pas d'effet Doppler.

2) L'effet Doppler relativiste

Effet Doppler longitudinal

Cette approche est nécessaire dans le cas où l'émetteur se déplace à une vitesse V non négligeable devant c. Considérons toujours le récepteur immobile en $x = 0$ qui reçoit les signaux de l'émetteur situé en x_0 à l'instant $t = 0$ et en mouvement rectiligne et uniforme de vitesse V le long de la droite Ox. Supposons toujours que l'émetteur envoie des tops de période T_0 dans son référentiel. Mais que signifie désormais « une période plus tard » ? Conformément à la *dilatation des durées*, cette durée dans R est $\dfrac{T_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$. Il faut donc considérer, dans R, l'émission du deuxième top à la date $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$.

Un premier top est émis à la date $t = 0$ vers le récepteur. Une période plus tard, quand l'émetteur est en $x = x_0 + V\,T$ et qu'il émet le second top, le premier est parvenu en $x_1 = x_0 - c\,T$. La distance qui sépare les deux tops est la période spatiale de l'onde dans le référentiel du récepteur à un instant donné, c'est-à-dire la longueur d'onde que va mesurer le récepteur immobile. Elle est donc telle que

$$\lambda_{reçu} = (x_0 + V\,T) - (x_0 - c\,T) = (V + c)T$$

Si l'émetteur était au repos ($V = 0$), elle serait $\lambda_{émis} = x_0 - (x_0 - c\,T_0) = c\,T_0$. Du fait du déplacement de l'émetteur, il y a donc une modification de la longueur d'onde telle que

$$\frac{\lambda_{reçu}}{\lambda_{émis}} = \left(1 + \frac{V}{c}\right)\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{V}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}$$

---

[5] Le spectre d'émission des étoiles est un spectre continu de rayonnement thermique de type « corps noir ». Le décalage observé est celui qui concerne en réalité les raies d'absorption de ce rayonnement par l'atmosphère périphérique (« couronne » de l'étoile) ou par les nuages de matière intergalactique. Ce spectre d'absorption est discret, sa structure est caractéristique de l'élément chimique absorbant (H et He essentiellement) et permet donc de l'identifier. La mesure fine, par des techniques spectroscopiques, des longueurs d'onde de ces raies montre le décalage par rapport au spectre d'émission d'une lampe à hydrogène au repos sur Terre. C'est ce qui a permis à Hubble d'obtenir ses résultats.

[6] Il y a, dans ce cas, un double effet Doppler : le véhicule reçoit une fréquence distincte de celle de l'émetteur, il réfléchit le signal sans changement de fréquence dans son propre référentiel et le radar reçoit ensuite une fréquence différente de celle qui a été réfléchie. Une étude détaillée montre que les deux effets ne s'annulent pas mais sont au contraire cumulatifs.

Le décalage relatif est $$\frac{\lambda_{reçu}}{\lambda_{émis}} - 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} - 1$$

- Pour un émetteur dont la vitesse V reste très inférieure à c, le développement limité donne $\frac{\lambda_{re'u}}{\lambda_{'mis}} - 1 = \left(1 + \frac{V}{2\,c} + \frac{V}{2\,c}\right) - 1 = \frac{V}{c}$. C'est le même résultat que dans le calcul pré-relativiste.
- En revanche pour des vitesses V qui s'approchent de c, l'écart relatif devient très grand. Ainsi, les galaxies les plus lointaines que l'on connaisse présentent des *redshifts* supérieurs à 4 ou 5.

En cosmologie l'interprétation cinématique du *redshift* (vu comme un effet du *mouvement de l'émetteur dans l'espace*) est parfois remplacée par une interprétation liée à la *dilatation de l'espace*.

Effet Doppler transversal

Une étude plus complète montre qu'il y a, en relativité einsteinienne, un effet Doppler transversal.

B- ASPECTS DYNAMIQUES : ÉQUATION RELATIVISTE DU MOUVEMENT, QUANTITÉ DE MOUVEMENT, ÉNERGIE, RELATION ENTRE MASSE ET ÉNERGIE, CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ET DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT[7]

I- Quantité de mouvement et équation relativiste du mouvement

1) Quantité de mouvement (impulsion, *momentum*)

En désignant par m la masse d'une particule et par $\vec{v}$ sa vitesse dans un galiléen, la quantité de mouvement est définie en dynamique relativiste par

$$\vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\,\gamma\,\vec{v} \qquad avec \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

- On retrouve la définition galiléenne de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$ à la limite des vitesses très inférieures à c.
- L'expression perd son sens si la norme v du vecteur vitesse de la particule dépasse c : ainsi, la vitesse v d'une particule dans un référentiel ne peut jamais atteindre la valeur c.
- On peut aussi considérer cette relation sous la forme $\vec{p} = i(v).\,\vec{v}$ où

$$i\,(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\,\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

i(v) est une *inertie* variable avec la vitesse et qui ne s'identifie à la masse m que dans la limite des faibles vitesses. Ainsi, à la différence de la physique galiléenne, la dynamique relativiste distingue-t-elle le *concept de masse* (caractéristique de la particule et invariante par changement de référentiel) du *concept d'inertie* (étroitement liée à la vitesse donc au référentiel).

2) Équation relativiste du mouvement

Si $\vec{F}$ représente la somme des forces subies par la particule de masse m, son mouvement dans le référentiel R est régi par

[7] Syllabus : **RELATIVISTIC EQUATION OF MOTION, MOMENTUM, ENRGY, RELATION BETWEEN ENERGY AND MASS, CONSERVATION OF ENERGY AND MOMENTUM**

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = m\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

À la limite des faibles vitesses, cette relation redonne bien la deuxième loi de Newton $\vec{F} = \dfrac{d\,\vec{p}}{d\,t} = m\,\dfrac{d}{dt}\vec{v}$.

II- Énergie

1) Définition de l'énergie d'une particule dans un référentiel

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\,\gamma\,c^2 \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

2) Énergie de repos ou énergie de masse : équivalence entre masse et énergie

- À vitesse nulle, la particule possède une énergie de repos $E_0 = mc^2$**.**
- Ce concept d'énergie au repos est nouveau par rapport à la physique classique qui n'attribue pas une valeur particulière particulière à l'énergie d'une particule au repos.
- Une application de cette relation est l'expression des masses en unités d'énergie, et, compte tenu des ordres de grandeur, le plus souvent en keV ou MeV. C'est ainsi qu'on dira couramment que masse d'un proton est de 930 MeV ou que la masse de l'électron est de 510 keV :

Masse de l'électron $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ *kg*

Énergie de repos $E_0 = m_e.c^2 = 9{,}1.10^{-31}\,.\,(3{,}00.10^8)^2 = 81{,}9.10^{-15}\ J = 81{,}9.10^{-15}.\,(1{,}6.10^{-19})^{-1} = 5{,}1.10^3\ eV$

3) Énergie cinétique

$$E_{cin} \;=\; E - E_0 \;=\; (\gamma-1)\,m\,c^2 = m\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) = m\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$$

Cohérence avec l'expression classique

Un développement à l'ordre 1 en β^2 montre que cette expression est bien cohérente avec l'expression classique :

$$E_{cin} = m\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) = m\,c^2\left(1+\frac{\beta^2}{2}-1\right) = m\,c^2\,\frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Limite de validité de l'expression classique

L'énergie cinétique classique est $\quad E_{cin}^{class} = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 = m\,c^2\,\dfrac{v^2}{2\,c^2} = m\,c^2\,\dfrac{\beta^2}{2}$

L'erreur relative commise en assimilant l'expression relativiste à une expression classique est

$$\frac{E_{cin}-E_{cin}^{class}}{E_{cin}^{class}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1}{\frac{\beta^2}{2}} - 1 = \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)-1$$

soit, en faisant un développement limité au deuxième ordre en β^2

$$\frac{E_{cin}-E_{cin}^{class}}{E_{cin}^{class}} = \frac{2}{\beta^2}\left(1+\frac{\beta^2}{2}+\frac{3\beta^4}{8}-1\right)-1 = \frac{3}{4}\,\beta^2$$

Ainsi, même si $v \approx 0{,}1\,c$ l'erreur relative reste inférieure à 1%. L'expression classique reste donc valable avec une excellente précision jusqu'à des vitesses assez élevées.

Particule classique, relativiste, ultrarelativiste

Paramètres de la particule	Classique	Relativiste	Ultra-relativiste
Vitesse v	$v << c$	$0,1\, c < V < 0,9\, c$	V proche de c
β	$\beta << 1$	$0,1 < \beta < 0,9$	$\beta \to 1$ si $v \to c$
γ	$\gamma \approx 1$	γ de l'ordre de quelques unités	$\gamma >> 1$ $\gamma \to \infty$ si $v \to c$

4) Théorème de l'énergie cinétique

Il exprime toujours que le travail de la force subie par une particule est responsable de l'accroissement de son énergie cinétique (donc de son énergie). Il reste donc valable en tenant compte de la nouvelle expression de l'énergie cinétique, par exemple sous l'une ou l'autre des formes suivantes où P désigne la puissance de la force subie par la particule envisagée :

$$P = \frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad ou \qquad \delta W = dE_{cin} = dE = d\left(\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Application au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

La puissance P de la force de Lorentz $\vec{F} = q\, \vec{v} \wedge \vec{B}$ est nulle. Le mouvement s'effectue donc à énergie cinétique constante, et, d'après l'expression de l'énergie cinétique, avec une *vitesse de norme v constante*. Ce résultat est le même qu'en mécanique classique.

Dans un champ magnétique uniforme, si la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique, la trajectoire est circulaire ; sinon, c'est une hélice. Ce résultat est le même qu'en mécanique classique. Mais le rayon de courbure de la trajectoire a une valeur différente de celle qu'il a en mécanique classique. On montre que, pour la trajectoire circulaire

$$R = \frac{R_{classique}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\, R_{classique} = \frac{m\, v}{|q|\, B}\gamma = \frac{p}{|q|\, B}$$

Le rayon du cercle étant proportionnel à la quantité de mouvement de la particule, on dispose ainsi, en physique des particules, d'une *méthode de mesure de la quantité de mouvement* de la particule, B étant fixé et la charge de la particule connue. Cette propriété est utilisée dans les *détecteurs de particules* (CERN) où l'analyse des évènements collisionnels s'effectue par *mesure du rayon des trajectoires des enregistrements* obtenus jadis par les clichés de chambres à bulles ou de chambres à brouillard et aujourd'hui par des moyens électroniques.

Application au mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique

Une particule de masse m et de charge q passe d'un point O où le potentiel électrostatique a une valeur V_0 à un point M où le potentiel a une valeur V. Le travail de la force électrostatique est lié à la d.d.p. entre les deux points selon :

$$W_0^M = \int_O^M q\,.\,\overrightarrow{E}\,.\overrightarrow{dl} = q\int_O^M .\overrightarrow{E}\,.\,\overrightarrow{dl} = q\,(V_0 - V)$$

Si la particule a, en O, une vitesse initiale v_0, elle atteint M avec une vitesse v telle que :

$$\frac{m\, c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m\, c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = q\,(V_0 - V)$$

III- Un invariant dynamique : relation entre masse, quantité de mouvement et énergie

1) Introduction de l'invariant

À partir des relations de définition de l'énergie et de la quantité de mouvement, on établit que

$$\vec{p}^{\,2} - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \left(m\,\gamma\,\vec{v}\right)^2 - \left(\gamma\, m\, c\right)^2 = \left(m\,\gamma\right)^2\left(\vec{v}^{\,2} - c^2\right) = m^2\frac{\left(\vec{v}^{\,2} - c^2\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = = -\, m^2\, c^2$$

Dans un autre référentiel R', on aurait de même

$$\vec{p'}^2 - \frac{E'^2}{c^2} = -m^2 c^2$$

Si l'énergie et la quantité de mouvement dépendent, individuellement, du référentiel, il existe cependant une forme quadratique invariante construite à partir de ces quantités. La relation peut être utilement mémorisée sous la forme

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

2) Cas des particules de masse nulle (photon, neutrino)

Une vitesse égale à c n'est compatible avec une énergie et une quantité de mouvement finies que si la masse de la particule est nulle. Les seules particules qui peuvent atteindre une vitesse égale à c sont donc les particules de masse nulle. C'est le cas du photon pour lequel l'invariant dynamique conduit à

$$E = pc.$$

Son énergie de masse est nulle et son énergie E se réduit à une énergie cinétique proportionnelle à sa quantité de mouvement.

3) De la particule à l'onde

La relation $E = pc$ peut être rapprochée d'une autre relation proposée par Einstein en 1905 lors de l'étude de l'effet photoélectrique : il s'agit la relation $E = h\nu$ entre l'énergie E du photon et la fréquence ν de l'onde électromagnétique qui lui est associée. Il en résulte que la quantité de mouvement du photon est inversement proportionnelle à la longueur d'onde de l'onde électromagnétique associée :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

C'est la généralisation de ce résultat aux particules douées de masse qui conduira vers 1925 Louis de Broglie[8] la *théorie des ondes de matière* connue sous le nom de *mécanique ondulatoire* et qui fut l'une des préfigurations de la *mécanique quantique* d'aujourd'hui.

III- Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement

Afin de mieux comprendre la structure de la matière, la *physique des particules* et la *physique nucléaire* explorent des situations où sont mises en œuvre des collisions de particules. Lors de ces évènements, les particules qui interagissent sont considérées comme un ensemble isolé du reste de l'univers : en effet, les interactions qu'elles exercent les unes sur les autres sont, au moment du choc, largement prépondérantes devant toute action extérieure.

Dans ces conditions, les collisions de particules s'effectuent avec conservation de la *quantité de mouvement et de l'énergie*.

On distingue alors deux types de collisions

1) La nature des particules est inchangée.

L'énergie de masse est alors conservée et la conservation de l'énergie entraîne la conservation de l'énergie cinétique. Ces collisions sont dites *élastiques*. Les évènements correspondants sont aussi appelés des processus de *diffusion élastique.*

2) La nature des particules est modifiée.

L'énergie de masse varie puisque la masse des particules après la collision n'est pas la même que la masse des particules avant la collision. Ces processus sont dits *inélastiques* car ces collisions s'accompagnent d'une variation de l'énergie cinétique. Il en existe deux types

- *La masse diminue lors de la collision*. Alors l'énergie de masse diminue et l'énergie cinétique augmente. C'est ce qui se produit dans les processus de *fission nucléaire* ou de *fusion nucléaire*. L'énergie cinétique emportée par les particules issues de la collision se traduit, macroscopiquement par un accroissement de l'énergie interne du milieu, donc, par exemple par une élévation de la température, sauf si elle est évacuée à l'extérieur (*chaudière nucléaire*).

---

[8] Prix Nobel de physique en 1929 « for his discovery of the wave nature of electrons ».

- De la masse est créée lors de la collision : alors l'énergie cinétique diminue lors de la collision. Il existe en particulier un seuil d'énergie en deçà duquel l'événement ne peut pas avoir lieu (il faut que l'énergie cinétique finale soit positive ou à la limite nulle). On peut par exemple calculer facilement le seuil d'énergie de deux photons de même énergie et de quantités de mouvement opposées qui entreraient en collision pour *créer une paire électron-positon* (couple particule-antiparticule)[9] .

En notant E_1 (respectivement E_2) l'énergie du photon 1 (respectivement 2) avant la collision

p_1 (respectivement p_2) la quantité de mouvement du photon 1 (respectivement 2)avant la collision

E'_1 et E'_2 les énergies de l'électron et du positon après la collision

p'_1 et p'_2 leurs quantités de mouvement

Conservation de l'énergie $E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$

Conservation de la quantité de mouvement $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}$

Si on utilise deux photons identiques en collision frontale $E_1 = E_2 \qquad \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \vec{0} \qquad avec \qquad E_1 = p_1 c$

Dans la situation seuil, le positon et l'électron sont produits tous les deux au repos (l'énergie cinétique est nulle après la collision) et les énergies E'_1 et E'_2 se réduisent aux énergies de masse (les deux particules ont la même masse m)

$E'_1 = E'_2 = m\,c^2$. D'où $E_1 = mc^2$. Chaque photon doit avoir une énergie au moins égale à l'énergie de masse de l'électron, soit 510 keV. Il s'agit de photons de longueur d'onde telle que

$$h\frac{c}{\lambda} = m\,c^2$$

$$\lambda = \frac{h}{mc} = \frac{6{,}67.10^{-34}}{9{,}1.10^{-31}.\,3{,}0.10^{8}} = 2{,}4.10^{-12}\,m$$

En conclusion :

Le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley a nécessité une remise en cause du cadre cinématique de la physique. Il en résulte des effets cinématiques dont le plus connu est l'effet de dilatation des durées.

La dynamique relativiste se caractérise par une nouvelle expression de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Elle introduit une nouveauté : l'énergie de masse. L'énergie cinétique apparaît comme la différence entre l'énergie et l'énergie de repos.

Les expressions classiques de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique sont obtenues à partir des expressions relativistes par passage à la limite quand $V/c \to 0$

Les énoncés du principe fondamental de la dynamique et du théorème de l'énergie cinétique restent valables, à condition d'utiliser les nouvelles expressions de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie d'un système isolé sont préservées.

[9] D'autres lois de conservation (par exemple celle de la charge) exigent qu'on ne puisse créer l'électron sans créer simultanément son antiparticule, le positon.