Relativité restreinte

En 1905, Albert Einstein formulait sa fameuse théorie de la relativité restreinte. En fait Einstein n'a pas inventé la théorie de la relativité, il en a simplement énoncé une nouvelle pour remplacer la précédente qui remontait à Galilée et Newton. C'était une nouvelle théorie pour un même principe, le principe de realtivité.
Ce principe de relativité affirme en fait qu'il existe des référentiels dits « équivalents » dans lesquels les lois physiques prennent la même forme et les phénomènes physiques même allure. Par contre, les grandeurs physiques, elles, diffèrent d'un référentiel à l'autre comme le montre par exemple les simples lois de composition des vitesses et accélérations vues en cours de 1ère année ; les référentiels « équivalents » sont bien entendu les réferentiels galiléens.
En mécanique classique, si un référentiel $\mathscr{R}'$ est en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_x}$ par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$, la transformation de Galilée permet de trouver la position x d'un point dans le référentiel $\mathscr{R}$ en fonction de la position x' dans le référentiel $\mathscr{R}'$ selon une loi du type $x = x' + ut$ qui découle de la loi de composition des vitesses $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{u}$. On remarquera que dans cette approche, le temps s'écoule de la même manière dans les deux référentiels.
Cependant, la théorie du champ électromagnétique, synthétisée par James MAXWELL (1831-1879) vers 1870 violait la relativité galiléenne en assignant à la lumière une vitesse invariante ce qui est absurde du point de vue galiléen où la vitesse dépend toujours du référentiel utilisé ! On pensa d'abord que la lumière se propageait en fait dans un milieu appelé « éther » avec cette vitesse invariante mais toutes les expériences menées, notamment celles menées de Michelson et Morley, en 1881, échouèrent dans leur tentative de mesurer une quelconque variation de cette vitesse de propagation par rapport à la Terre à l'aide d'une conception galiléenne de la relativité.
Einstein proposa alors de renverser la démarche en renonçant à la relativité galiléenne mais en conservant le principe de relativité.

I – Principe de relativité restreinte

1/ Enoncé

> Toutes les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiels galiléens

Il résulte donc de cet énoncé que les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme doivent avoir la même forme dans deux réferentiels galiléens $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$, en particulier pour les équations de Maxwell qui font intervenir une vitesse de la lumière indépendante du référentiel d'étude. Ainsi Einstein postula en outre que la vitesse de propagation dans le vide des ondes électromagnétiques, égale à c, doit être la même dans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$.

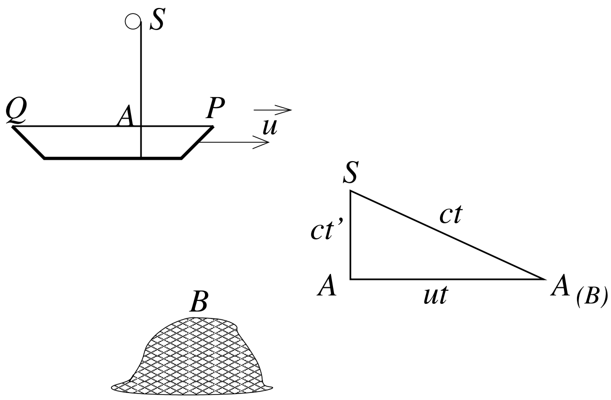
2/ Conséquences

Bien évidemment cela nécessite une remise en cause de la notion de relativité galiléenne qui ne peut pas concevoir que la vitesse soit la même dans deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. Pour la remettre en cause, Einstein admis que dans un réferentiel $\mathscr{R}$ et dans un autre $\mathscr{R}'$ en mouvement à vitesse ($\overrightarrow{u}$) constante par rapport au premier il n'y avait pas de raison a priori pour que les étalons de longueur et de temps coïncident comme on va le voir ci-dessous.
Il obtint alors des formules de transformation plus compliquées que $x' = x - ut$ (cf II-). Ces formules avaient déjà été établies par H. Lorentz mais sans que celui-ci ne puisse y apporter une explication autre que phénoménologique. Il avait simplement cherché une transformation mathématique qui laissait les équations de

Maxwell (régissant l'électromagnétisme) invariantes. Le caractère fondamental de cette tranformation ne fut véritablement apporté qu'avec la nouvelle théorie d'Einstein.

a. Dilatation des durées

On considère un référentiel $\mathscr{R}'$ en mouvement à vitesse $\overrightarrow{u}$ par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$. Par exemple, on choisira pour $\mathscr{R}'$ le référentiel lié à un bateau avançant à la vitesse $\overrightarrow{u}$ par rapport au rivage où se trouve un observateur B immobile par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ lié au rivage. Sur le dessin ci-contre B est par exemple sur un rocher.



Au sommet du mat du bateau, une lampe S émet des flashs lumineux. Un observateur A, placé dans le même plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$ que S, mesure avec un dispositif comportant un chronomètre embarqué le temps t' que met la lumière émise au sommet du mat pour arriver à lui au pied du mat. La lumière a ainsi parcouru la distance ct' égale à la hauteur du mat.
De la même manière, l'observateur B sur le rocher fait la même mesure avec son chronomètre, il mesure, entre l'émission au sommet du mat et l'arrivée au bas du mat un temps t. Cependant, dans $\mathscr{R}$, ces deux événements ne sont pas colocalisés (c'est à dire qu'ils n'ont pas lieu dans le même plan orthognal à $\overrightarrow{u}$), le bas du mat s'étant déplacé, dans $\mathscr{R}$ au cours de la propagation de la lumière de la longueur ut. Si t est la mesure de l'observateur B, comme on le voit sur le dessin ci-dessus, la vitesse de la lumière étant c dans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$, on doit écrire

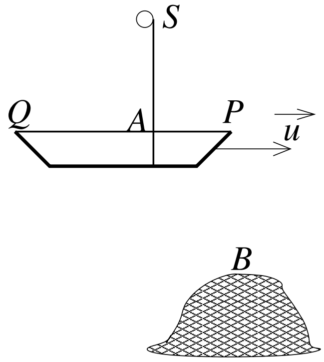
$$(ct)^2 = (ut)^2 + (ct')^2$$

soit

$$\boxed{t = \gamma t' \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}}$$

On appelle $t' = t'_0$ la durée propre entre les deux événements colocalisées dans $\mathscr{R}'$ et mesurée par un observateur fixe par rapport aux événements etudiés. On constate qu'alors la durée t mesurée par un observateur en mouvement à la vitesse $||\overrightarrow{u}||$ (ici B est en mouvement par rapport à $\mathscr{R}'$ et on remarque que seul u^2 intervient et pas le sens de $\overrightarrow{u}$), est toujours plus grande puisque $t = \gamma t'$ avec $\gamma > 1$. C'est ce phénomène qu'on appelle dilatation des durées.

b. Contraction des longueurs



De la même manière et toujours avec l'exemple du bateau, pour l'observateur A fixe dans le bateau, la longueur L' du bateau est la distance entre la proue P et la poupe Q ($\mathrm{L}' = \mathrm{L}_0 = \mathrm{PQ}$). C'est cette longueur qu'on appelle longueur propre du bateau, elle correspond à la longueur de l'objet dans le référentiel où il est au repos.
Deux observateurs placés respectivement à la poue P et à la poupe Q du bateau voient l'observateur B sur son rocher se déplacer à la vitesse $-\overrightarrow{u}$. Avec chacun un chronomètre, P peut mesurer l'instant t'_P où B passe devant lui et Q l'instant t'_Q où B passe devant lui. De ces mesures, et connaissant u, ils déduisent la longueur propre du bateau $\mathrm{L}' = ut'$ avec $t' = t'_\mathrm{Q} - t'_\mathrm{P}$. On

remarque que les instants t'_{P} et t'_{Q} ne correspondent pas à des évenements colocalisés dans $\mathscr{R}'$ puisque le déplacement de B à lieu selon la direction PQ.
Dans son référentiel $\mathscr{R}$, l'observateur B peut déterminer de même la longueur L en mesurant les instants t_{P} et t_{Q} où P et Q passent devant lui. Il en déduit $\mathrm{L} = ut = u(t_{\mathrm{Q}} - t_{\mathrm{P}})$. Cette fois les instants t_{P} et t_{Q} correspondent bien à des événements colocalisés dans $\mathscr{R}$ par rapport auxquels B est fixe. Avec ce qui vient d'être étudié dans le paragraphe sur la dilatation des durées, on peut donc assimiler $t = t_{\mathrm{Q}} - t_{\mathrm{P}}$ à une durée propre et écrire $t' = \gamma t$ cette fois. En revenant sur les longueurs, on en déduit que

$$\mathrm{L}' = \mathrm{L}_0 = \gamma \mathrm{L}$$

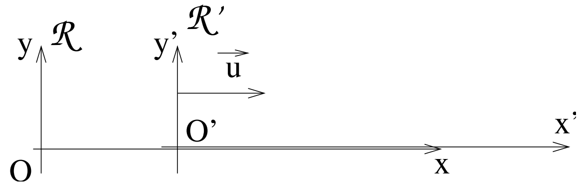
c'est à dire $\mathrm{L} < \mathrm{L}'_0$, c'est ce qu'on appelle la contraction des longueurs. L'observateur qui voit le bateau se déplacer mesurera une longueur de bateau plus petite que celle mesurée par des passagers fixes du bateau placés sur la proue et sur la poupe. On remarquera que cela suppose aussi que les longueurs mesurées et la vitesse $\overrightarrow{u}$ ont même direction.

c. Mise en évidence expérimentale

Il existe plusieurs vérifications expérimentales de ces phénomènes. Une des plus « parlantes » est celle qui se base sur la désintégration des muons. Ces particules sont produites dans la haute atmosphère (entre 5 et 10 km d'altitude) par le rayonnement cosmique. Le durée de vie propre d'un muon c'est à dire son temps de demi-vie dans le référentiel où il est au repos, mesuré par exemple dans un métal au repos où des muons existent est de $t'_0 = 2,2.10^{-6}\,\mathrm{s}$. Avec un tel temps de demi-vie et des muons qui se déplaceraient à la vitesse de la lumière, la moitié de la population des muons disparaîtrait tous les 660 mètres et on ne devrait pratiquement pas en détecter au niveau du sol en provenance du ciel. Or dans le référentiel lié à la Terre, les muons se déplacent avec une vitesse très proche de celle de la lumière (par exemple $0,9952.c$, dans l'expérience donnée). Ainsi, la durée de vie moyenne d'un muon, pour un observateur terrestre est $t = \gamma t'_0$ avec $\gamma = 1/\sqrt{1-(0,9952)^2} = 10,2$. Pour un observateur terrestre, les muons « vivent » donc pendant $t = 2,2.10^{-5}\,\mathrm{s}$, ce qui leur laisse le temps de parcourir cette fois plus de 6 km avant de voir leur population divisée par deux. Des mesures fines de populations de muons réalisées entre différentes altitudes terrestres ont permis de valider cette loi de dilatation des durées.
On peut aussi noter que le système GPS basé sur les mesures de temps que mettent différents signaux (émis par plusieurs satellites) pour arriver sur Terre, tient compte de cette correction.

II – La transformation de Lorentz

1/ Formules de transformation



On considère un référentiel $\mathscr{R}'$ en translation à la vitesse $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_x}$ par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$. Dans le cas de la relativité galiléenne les formules de transformation permettant de passer du référentiel $\mathscr{R}(\mathrm{O}xyz,t)$ au référentiel $\mathscr{R}'(\mathrm{O}'x'y'z',t')$ sont classiquement :

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

La transformation de Lorentz modifie ces relations en introduisant le facteur γ vu plus haut qui dépend de la vitesse u et traduit la différence d'étalons de longueur et de temps entre les deux réferentiels comme on vient de le voir avec les phénomènes de dilatation de durée et de contraction de longueur :

$$\boxed{\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} > 1}$$

On remarque que la définition de γ suppose $u < c$, la vitesse de la lumière dans le vide apparaît donc comme une vitesse limite. De plus pour $u \to 0$, $\gamma \to 1$ la transformation de Lorentz tend vers celle de Galilée.
De même la transformation inverse permettant d'obtenir (x, y, z, t) à partir de (x', y', z', t') s'obtient en changeant u en $-u$, soit

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{ux'}{c^2}\right) \end{cases} \quad \text{avec le même } \gamma$$

En respectant les hypothèses, notamment la colocalisation des événements dans le référentiel propre pour la dilatation des durées, on peut bien sûr à l'aide de ces transformations retrouver les formules de dilatation des durées et de contractions des longueurs vues au I- comme le montre les paragraphes suivants.

2/ Retour sur temps propre et dilatation des durées

On note $\Delta t'_0$ l'intervalle de temps mesuré dans $\mathscr{R}'$ entre deux phénomènes se produisant en $x' = x'_0$ (colocalisation dans un plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$) fixe aux instants t'_1 et $t'_2 = t'_1 + \Delta t'_0$. $\Delta t'_0$ est le temps propre de ce phénomène. En utilisant la transformation de Lorentz, on peut donc écrire :

$$x'_0 = \gamma(x_1 - ut_1) \quad \text{et} \quad x'_0 = \gamma(x_2 - ut_2)$$

$$t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1) \quad \text{et} \quad t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2)$$

avec (x_1, t_1) la coordonnée spatio-temporelle du premier événement dans $\mathscr{R}$, et (x_2, t_2), celle du deuxième événement. On obtient alors

$$\begin{cases} \Delta x' = 0 = \gamma(\Delta x - u\Delta t) \\ \Delta t' = \Delta t'_0 = \gamma(\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{et} \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

On tire de la première équation $\Delta x = u\Delta t$ qu'on réinjecte dans la seconde pour obtenir

$$\Delta t'_0 = \gamma\Delta t\left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right) = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

soit

$$\Delta t = \gamma\Delta t'_0$$

La durée impropre Δt entre les deux événements pour un observateur extérieur à $\mathscr{R}'$ est supérieure ou égale à la durée propre $\Delta t'_0$ observée dans le référentiel où les deux événements sont colocalisés.

3/ Longueur propre et contraction des longueurs

a. Contraction longitudinale

On considère ici une règle AB (par exemple) de longueur l'_0, fixe dans $\mathscr{R}'$, telle que $x'_B - x'_A = l'_0$. Cette règle est donc disposée parallèlement à la direction de translation de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$. Par rapport à $\mathscr{R}$ cette règle se déplace donc à la vitesse $\overrightarrow{u}$. A un instant t quelconque mesuré par un observateur de $\mathscr{R}$, les positions x_A et x_B des extrémités de la règle dans $\mathscr{R}$ sont reliées à x'_A et x'_B par les relations :

$$x'_A = \gamma(x_A - ut) \quad \text{et} \quad x'_B = \gamma(x_B - ut)$$

on obtient donc la longueur $l = x_B - x_A$ de la règle dans $\mathscr{R}$ à tout instant

$$l = \frac{l'_0}{\gamma} < l'_0$$

La longueur propre d'un objet est celle mesurée dans le réferentiel où il est au repos. La longueur mesurée dans un référentiel en mouvement par rapport à celui-ci est toujours inférieure (ou égale) à la longueur propre.

b. Invariance transversale

Si maintenant la même règle est placée perpendiculairement à la direction de translation de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$ telle que $y'_B - y'_A = l'_0$ par exemple. La transformation de Lorentz permet donc d'obtenir $y_B = y'_B$ et $y_A = y'_A$. On en déduit donc que pour des observateurs fixes de chacun des référentiels la longueur l_0 de la règle disposée tranversalement à la direction de translation de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$ est invariante.

Conséquence : Cette contraction des longueurs implique donc une non-conservation des densités volumiques de masse ou de charge par passage entre les deux référentiels.

III – L'effet Doppler relativiste

1/ Effet Doppler longitudinal

En reprenant le schéma du II-1/, on considère une source émettant un signal périodique électromagnétique de période propre T_0 placée en O′ origine de $\mathscr{R}'$ en translation à la vitesse $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_x}$ par rapport à $\mathscr{R}$. On suppose de plus qu'à $t' = 0$, la première émission à lieu en O′ alors confondu avec O. Il a alors reception immédiate en O. On assimiliera le milieu à du vide dans lequel les ondes se propagent à la vitesse c. On cherche alors la période apparente du phénomène pour un observateur fixe de $\mathscr{R}$ en O.
La deuxième émission à lieu en O′ à $t' = T_0$ donc, d'après la tranformation de Lorentz inverse en $x = \gamma u T_0$ et à $t = \gamma T_0$. Pour être reçu en O, ce signal doit donc alors parcourir la distance $\gamma u T_0$ à la vitesse c. Il arrivera donc en O à la date $t_r = \gamma T_0 + \gamma \frac{u}{c} T_0$. Ce temps t_r correspond donc à la période apparente pour un observateur fixe de $\mathscr{R}$, soit $T = T_0 \gamma\left(1 + \frac{u}{c}\right)$ ou encore, en remarquant que $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$:

$$T = T_0 \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}$$

et pour la fréquence apparente en fonction de la fréquence propre :

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{u}{c}$$

On remarque que dans le cas où $u/c \ll 1$, un développement limité au premier ordre en u/c redonne bien la formule classique $f \simeq f_0(1-u/c) \simeq \dfrac{f_0}{1+u/c}$ vue dans le poly sur les ondes.

2/ Effet Doppler transversal

On considère maintenant que la source, fixe dans $\mathscr{R}'$, se trouve en S tel que $x'_\mathrm{S} = z'_\mathrm{S} = 0$ et $y'_\mathrm{S} = l$. On suppose de plus que la première émission a lieu en S à $t' = 0$ alors que O et O$'$ sont confondus. Cette émission a alors aussi lieu à $t = 0$. Le signal se propageant à la vitesse c, la prémière réception en O à lieu à $t_1 = l/c$. La seconde émission à lieu en S, à $t' = \mathrm{T}_0$ mais alors, en utilisant la transformation de Lorentz inverse en $x = \gamma u \mathrm{T}_0$, $y = l$ et à $t = \gamma \mathrm{T}_0$. La deuxième réception aura alors lieu à $t_2 = \gamma \mathrm{T}_0 + \dfrac{1}{c}\sqrt{(\gamma u \mathrm{T}_0)^2 + l^2}$, on obtient alors la période apparente pour un observateur fixe de $\mathscr{R}$: $\mathrm{T} = t_2 - t_1$.
Dans le cas où $l \gg \gamma u \mathrm{T}_0$, qui correspond par exemple au cas d'une émission d'une onde électromagnétique par une étoile lointaine, cette expression se simplifie et on obtient

$$\mathrm{T} = \gamma \mathrm{T}_0 = \frac{\mathrm{T}_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}$$

et pour la fréquence

$$f = \frac{f_0}{\gamma} = f_0\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

IV – Transformation des vitesses

En différenciant les expressions obtenues par la transformation de Lorentz, on peut obtenir les composantes cartésiennes du vecteur vitesse dans $\mathscr{R}'$ ($v'_x = \dfrac{dx'}{dt'}, v'_y = \dfrac{dy'}{dt'}, v'_z = \dfrac{dz'}{dt'}$) en fonction des composantes cartésiennes du vecteur vitesse dans $\mathscr{R}$ ($v_x = \dfrac{dx}{dt}, v_y = \dfrac{dy}{dt}, v_z = \dfrac{dz}{dt}$). La différenciation donne :

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - u dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \dfrac{u dx}{c^2}\right) \end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx - u dt}{dt - \dfrac{u dx}{c^2}} \\ \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{\gamma\left(dt - \dfrac{u dx}{c^2}\right)} \\ \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{\gamma\left(dt - \dfrac{u dx}{c^2}\right)} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} \\[2ex] v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{uv_x}{c^2}\right)} = v_y \dfrac{\sqrt{1 - \left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} \\[2ex] v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{uv_x}{c^2}\right)} = v_z \dfrac{\sqrt{1 - \left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} \end{cases}$$

On remarque donc que contrairement au cas newtonien, on ne peut pas écrire une forme vectorielle simple de composition des vitesses. C'est pour cela qu'on préfère le terme de transformation des vitesses.
On peut cependant écrire deux formules vectorielles en distinguant la vitesse $\overrightarrow{v_\parallel}$ suivant la direction de translation de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$, et la vitesse $\overrightarrow{v_\perp}$ suivant la direction perpendiculaire à la direction de translation de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{v'_\parallel} = \frac{\overrightarrow{v_\parallel} - \overrightarrow{u}}{1 - \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}/c^2} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v'_\perp} = \frac{\overrightarrow{v_\perp}}{\gamma\left(1 - \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}/c^2\right)}$$

V – Dynamique relativiste

1/ Equation du mouvement relativiste. Quantité de mouvement

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ une particule de masse m, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ et subissant un ensemble de forces $\overrightarrow{f}$ a son mouvement régi par l'équation vectorielle :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}\right)_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{f} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{p} = \gamma m \overrightarrow{v}\ ;\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

Remarques :
① Le coefficient γ qui intervient ici prend en compte la vitesse v de la particule, ce n'est plus exactement le même que celui vu ci-dessus qui prenait en compte la vitesse de translation d'un référentiel par rapport à un autre.
② La présence du coefficient γ fait que la loi $p = \|\overrightarrow{p}\| = p(v)$ n'est plus linéaire.
③ De même, on peut écrire $\overrightarrow{f} = \gamma m \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt} m \overrightarrow{v}$. En dynamique relativiste, la force $\overrightarrow{f}$ n'est plus colinéaire à l'accélération $\overrightarrow{a} = \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}$. Ce concept d'accélération n'est d'ailleurs pas très utilisé en dynamique relativiste.

2/ Energie cinétique d'une particule relativiste

A cause de la remarque ③ précédente, la démonstration du théorème de l'énergie cinétique en mécanique newtonienne n'est plus directement transposable, en effet :

$$\overrightarrow{f}\,.\,\overrightarrow{v} = \gamma m \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\,.\,\overrightarrow{v} + \frac{d\gamma}{dt} m v^2$$

or

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\frac{d(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v})}{dt}=v\frac{dv}{dt}\quad \text{et}\quad \frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\gamma}{dv}\frac{dv}{dt}=\frac{\gamma^3 v}{c^2}\frac{dv}{dt}$$

on obtient alors

$$\overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}=\gamma mv\left(1+\frac{\gamma^2v^2}{c^2}\right)\frac{dv}{dt}$$

soit en remarquant que $\gamma^2=1+\dfrac{\gamma^2v^2}{c^2}$:

$$\overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}=\gamma^3 mv\frac{dv}{dt}$$

or on a déjà vu que $\dfrac{d\gamma}{dt}=\dfrac{\gamma^3 v}{c^2}\dfrac{dv}{dt}$ ce qui permet d'écrire

$$\overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}=mc^2\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma mc^2)$$

En mécanique newtonienne, on trouvait

$$\overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$$

pour autant il ne faut pas assimiler trop vite γmc^2 à l'énergie cinétique E_c de la particule relativiste, on peut juste écrire alors $\mathrm{E}_c=\gamma mc^2+\mathrm{cte}$.
De plus en developpant le terme γmc^2 pour les faibles valeurs de v/c, on doit retrouver $\mathrm{E}_c=\dfrac{1}{2}mv^2$ à une constante près, or

$$\gamma mc^2=mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\simeq mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\simeq\frac{1}{2}mv^2+mc^2=\mathrm{E}_c-\mathrm{cte}$$

On obtient donc la valeur de la constante $\mathrm{cte}=-mc^2$ et alors l'expression de l'énergie cinétique d'une particule relativiste :

$$\boxed{\mathrm{E}_c=(\gamma-1)mc^2}$$

3/ Energie propre. Relation masse-énergie

On appelle énergie propre la grandeur invariante et constante, introduite par le calcul précédent :

$$\mathrm{E}_0=mc^2$$

Elle est assimilable à l'énergie associée à la seule masse m en l'absence de tout mouvement. L'énergie totale de la particule en mouvement est constituée de la somme de cette énergie propre et de l'énergie cinétique :

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_0+\mathrm{E}_c=mc^2+(\gamma-1)mc^2=\gamma mc^2$$

On reviendra sur cette équivalence entre masse et énergie qu'Einstein résuma par :
Si un corps libère la quantité d'énergie E *sous forme de rayonnement, sa masse diminue de* E/c^2*. La masse d'un corps est une mesure de l'énergie qu'il contient.*

4/ Relation entre quantité de mouvement et énergie

On utilise les relations déjà établies :

$$\overrightarrow{p} = \gamma m \overrightarrow{v} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E} = \gamma m c^2$$

ce qui permet d'écrire

$$\boxed{\overrightarrow{p} = \frac{\mathrm{E}}{c^2}\overrightarrow{v}}$$

et

$$\mathrm{E}^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ou plus simplement

$$\boxed{\mathrm{E}^2 - p^2c^2 = m^2c^4}$$

Cas d'une particule de masse nulle : c'est par exemple le cas du photon (et des neutrinos). Ces particules possèdent une énergie sans possèder de masse. Le seul moyen de satisfaire la relation générale $\mathrm{E} = \gamma mc^2$, est alors de considérer $\gamma \to \infty$ c'est à dire que ces particules se déplacent nécessairement à la vitesse c de la lumière. On déduit alors des relations précédentes que

$$\mathrm{E} = pc = h\nu$$

c'est à dire aussi $p = \dfrac{h\nu}{c}$ pour la quantité de mouvement d'un photon, ν étant la fréquence de l'onde associée.

VI – Conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie pour un système de particules

Les lois de conservation que l'on va établir ici sont très utiles notamment dans le cas de l'étude des collisions entre particules relativistes. Ces collisions ont par exemple lieu dans les accélérateurs de particules ou au cours des réactions nucléaires.

1/ Conservation de la quantité de mouvement totale

On généralise un résultat de mécanique newtonienne :

Au cours d'une collision entre particules, la quantité de mouvement totale du système se conserve

La quantité de mouvement totale étant la somme des quantités de mouvement individuelles de chaque particule. Cette loi est valable quelle que soit la nature de la collision et même si la nature des particules change au cours de la collision.

2/ Conservation de l'énergie totale

Ici encore on généralise le résultat de la mécanique newtonienne :

L'énergie totale d'un système isolé se conserve au cours d'une collision

On distingue alors les collisions élastiques au cours desquelles le nombre et la nature des particules restent inchangés, des collisions inélastiques au cours desquelles le nombre ou la nature des particules varient.

Dans le cas d'une collision élastique, les énergies propres se conservent au cours de la collision, il en est donc de même pour l'énergie cinétique du système.
Par contre dans le cas d'une collision inélastique, la contribution à l'énergie des énergies propres varie au cours de la collision, il en est donc de même pour l'énergie cinétique du système afin d'assurer la conservation de l'énergie totale.

3/ Défaut de masse

On a vu sur la cas d'une particule que masse et énergie étaient reliées. Pour un système de particules on peut définir de la même manière la masse du système en fonction de l'énergie totale du système et de sa quantité de mouvement selon la formule

$$\mathrm{M} = \frac{1}{c^2}\sqrt{\mathrm{E}^2 - p^2c^2}$$

où E et p représentent respectivement l'énergie totale et la quantité de mouvement totale du système.
Avec cette définition, cette grandeur est invariante et constante mais la masse d'un système n'est plus additive, c'est à dire que M n'est pas forcément la somme des masses des particules constituant le système comme on peut le voir sur l'exemple de la formation d'une particule A_3 à partir de la collision inélastique d'un particule A_1 sur une particule fixe A_2 :

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3$$

La particule A_2 étant immobile, les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie donnent :

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_3} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_1 + m_2c^2 = \mathrm{E}_3$$

E_3 et $\overrightarrow{p_3}$ représentent donc la quantité de mouvement et l'énergie du système qui se conservent au cours de la collision. On peut alors définir la masse M du système par la relation

$$\mathrm{M}^2c^4 = \mathrm{E}_3^2 - p_3^2c^2$$

ou encore

$$\mathrm{M}^2c^4 = \left(\mathrm{E}_1 + m_2c^2\right)^2 - p_1^2c^2 = m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2\mathrm{E}_1m_2c^2 \quad \text{puisque} \quad \mathrm{E}_1^2 - p_1^2c^2 = m_1^2c^4$$

soit encore

$$\mathrm{M}^2 = (m_1 + m_2)^2 + 2m_2(\mathrm{E}_1 - m_1c^2)/c^2$$

Or $\mathrm{E}_1 > m_1c^2$ puisque que l'énergie cinétique de A_1 au moment de la collision n'est pas nulle, on en déduit donc que

$$\mathrm{M} > m_1 + m_2$$

Attention, au cours de cette réaction la masse M du système reste constante, ce n'est que la somme des masses qui le constitue qui n'est pas constante !

4/ Application : Energie de liaison atomique et courbe d'Aston

On considère ici un noyau ${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}$, Z désignant son nombre de protons et A son nombre total de nucléons. Par définition, l'énergie de liaison E_l du noyau est l'énergie qu'il faut fournir à ${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}$ au repos, pour séparer, sans énergie cinétique, les Z protons et $\mathrm{A}-\mathrm{Z}$ neutrons qui le forment selon une réaction :

$${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Z}\,p + (\mathrm{A}-\mathrm{Z})\,n$$

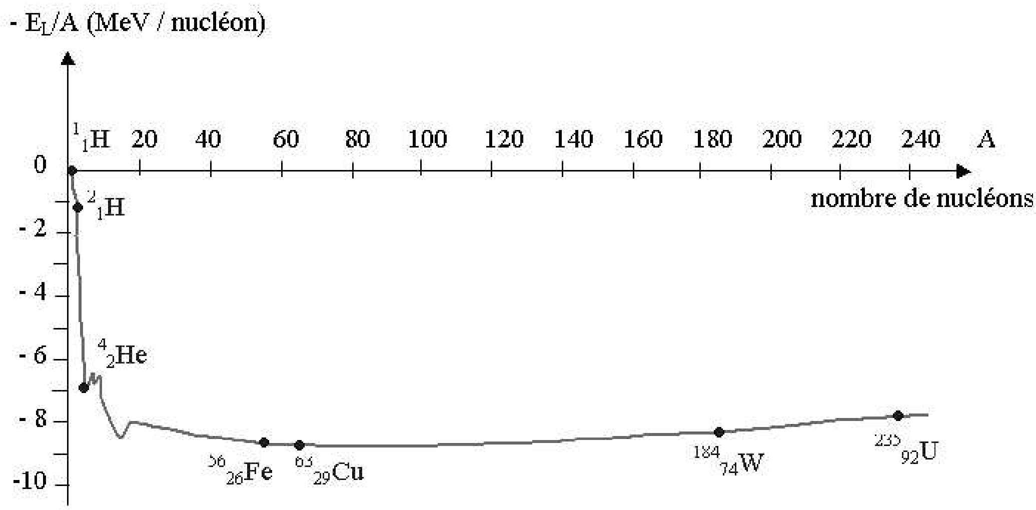
D'après la conservation de l'énergie, on peut écrire en notant m, m_p, m_n les masses respectives du noyau, d'un proton et d'un neutron

$$\mathrm{E}_l + mc^2 = \mathrm{Z}m_pc^2 + (\mathrm{A}-\mathrm{Z})m_nc^2$$

soit encore

$$\mathrm{E}_l = \big(\mathrm{Z}m_p + (\mathrm{A}-\mathrm{Z})m_n - m\big)c^2$$

Ainsi définie, l'énergie de liaison d'un noyau est toujours positive traduisant ainsi qu'il est nécessaire d'apporter de l'énergie pour vaincre les forces nucléaires assurant sa cohésion. On constate qu'elle peut-être définie comme la différence entre l'énergie propre des nucléons qui le composent et son énergie propre.
On définit aussi l'énergie de liaison moyenne par nucléon E_l/A dont on peut donner une représentation en fonction de A, plus exactement c'est $-\mathrm{B} = -\dfrac{\mathrm{E}_l}{\mathrm{A}} = f(\mathrm{A})$ qui est ici représenté en fonction de A. Cette courbe est en général appelée cours d'Aston du nom d'un chimiste anglais (prix Nobel en 1922).



5/ Energie de liaison dans une réaction nucléaire : cas de la fission nucléaire

Dans le cas d'une réaction de fission nucléaire comme celle réalisée dans les centrales nucléaires, des noyaux d'uranium 235 sont bombardés par des neutrons selon la réaction :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + n \to \ ^{95}_{39}\mathrm{Y} + ^{138}_{53}\mathrm{I} + 3n$$

Par analogie avec l'énergie de liaison du noyau atomique E_l, on définit l'énergie de liaison $\mathrm{E}_{r,l}$ mise en jeu dans une réaction nucléaire par la différence entre les énergies propres des « produits » et les énergies propres des « réactifs ». En utilisant que cette énergie propre est, pour chaque noyau, la différence entre l'énergie propre des nucléons qui le composent et l'énergie de liaison E_l du noyau, on obtient dans le cas présent (l'énergie de liaison du neutron seul étant nulle) :

$$\mathrm{E}_{r,l} = 39m_pc^2 + (95-39)m_nc^2 - \mathrm{E}_l(\mathrm{Y}) + 53m_pc^2 + (138-53)m_nc^2 - \mathrm{E}_l(\mathrm{I}) + 3m_nc^2$$
$$-92m_pc^2 - (235-92)m_nc^2 + \mathrm{E}_l(\mathrm{U}) - m_nc^2$$

Les termes en m_pc^2 et m_nc^2 s'éliminent ici du fait de la conservation des nombres de protons et de neutrons au cours de la réaction, de telle sorte que :

$$\mathrm{E}_{r,l} = -\mathrm{E}_l(\mathrm{Y}) - \mathrm{E}_l(\mathrm{I}) + \mathrm{E}_l(\mathrm{U})$$

ou en introduisant la grandeur B portée sur la courbe d'Aston :

$$\mathrm{E}_{r,l} = -95\mathrm{B}(\mathrm{Y}) - 138\mathrm{B}(\mathrm{I}) + 235\mathrm{B}(\mathrm{U})$$

On remarque alors sur la courbe d'Aston que l'énergie de liaison par nucléon (B) est plus faible pour l'uranium 235 (A = 235) que pour l'yttrium (A = 95) et l'iode (A = 138). Ainsi ici $E_{r,l} < 0$, la conservation de l'énergie totale au cours de la réaction impose donc que le système a gagné de l'énergie sous forme cinétique au cours de la réaction puisque l'énergie de masse du système a diminué. C'est cette énergie qui est disponible et récupérable, qu'on utilise dans les centrales nucléaires.
On peut remarquer qu'il en sera toujours de même au cours d'une réaction nucléaire lorsque des réactifs donnent des produits placés « plus bas » qu'eux sur la courbe d'Aston. C'est aussi le principe utilisé lors de la fusion nucléaire par la réaction

$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^2\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\,\mathrm{H}e $$