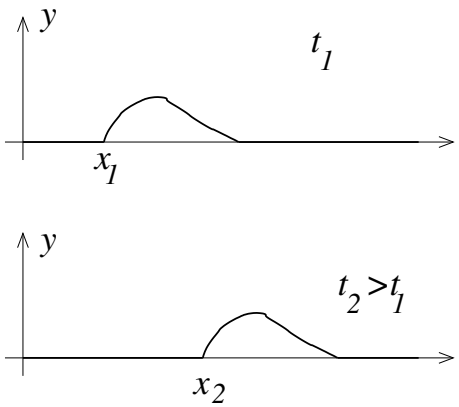
Ondes

I – Ondes progressives

1/ Description

Dans un milieu à une dimension (corde, ressort), on peut observer une onde se propager selon la direction Ox du milieu comme par exemple la déformation de la corde ou un ébranlement le long du ressort. On peut aussi entendre une onde sonore, dans ce cas c'est une surpression de l'air qui se propage.

Dans tous les cas, la propagation de l'onde, est caractérisée par le fait qu'une déformation du milieu observée à un instant donné t_1 en une position donnée x_1 se retrouve un peu plus tard en $t_2 > t_1$ à l'abscisse x_2. Si il n'y a pas d'atténuation la déformation prend rigoureusement la même forme en tous les points où elle passe.



On remarque que le déplacement de l'onde dans la direction Ox ne s'accompagne d'aucun transport de matière dans cette direction de propagation.

On constate donc une double dépendance spatiale et temporelle de la variable $y(x,t)$. Mais le fait de retrouver toujours la même déformation à des instants différents et des positions différentes impose à la fonction $y(x,t)$ d'être fonction de deux variables qui ne sont pas indépendantes lors de la description de la propagation de l'onde.

2/ Vitesse de propagation

Dans le cas du schéma précedent, la propgation de l'onde impose : $y(x_1,t_1) = y(x_2,t_2)$.
On peut alors naturellement définir la vitesse de l'onde comme le rapport de ce qu'elle a progressé sur le temps pendant lequel elle l'a fait. Ici, en notant c sa vitesse (ou célérité), on aura

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

soit encore en utilisant le signal en $x_1 = 0$ et en posant $t = t_2$ et $x = x_2$, $x = ct - ct_1$ soit $t_1 = t - x/c$ ce qui donne une relation caractéristique des ondes progressives :

$$y(x,t) = y(0, t - x/c) = f(t - x/c)$$

Cette vitesse dépend aussi des carctéristiques du milieu. Par exemple, pour les ondes sur une corde tendue, elle vaut

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}$$

avec T la tension de la corde et μ sa masse linéique.

3/ Direction de propagation

Le raisonnement précédent vaut pour une onde se propageant dans le sens des x croissants. Si l'onde se propage dans l'autre sens, vers les x décroissants, on obtient par un raisonnement identique (ou en changeant la vitesse c en $-c$)

$$y(x,t) = y(0,t+x/c) = g(t+x/c)$$

On peut remarquer que si il y a réflexion d'un ébranlement (par exemple au bout d'un ressort) on peut observer successivement en un même point une onde dans un sens puis dans l'autre. Pour caractériser l'amplitude de l'onde réfléchie par rapport à celle de l'onde incidente on peut définir un coefficient de réflexion r par

$$r = y_r(x_0,t)/y_i(x_0,t)$$

où $y_i(x_0,t)$ et $y_r(x_0,t)$ sont les amplitudes respectives des ondes incidentes et réfléchies à l'abscisse x_0 où a lieu la réflexion.

4/ Cas d'une excitation périodique, double périodicité

Dans le cas où l'excitation du système est périodique en un point en $x = 0$ (par exemple), la fonction $y(0,t)$ est alors périodique de période T_0 et de fréquence $f_0 = 1/\mathrm{T}_0$. Ceci est par exemple obtenu en faisant vibrer mécaniquement une extrémité d'un ressort ou celle d'un corde. D'après les relations déjà vues, on peut donc écrire pour tout x : $y(0,t) = y(x,t+x/c)$ ou encore en changeant l'origine des temps $y(x,t) = y(0,t-x/c) = f(t-x/c)$ pour une onde se propageant dans le sens des x croissants. Ceci montre qu'en tout x, la fonction y présente la même périodicité temporelle qu'en 0.

Cette relation montre qu'alors la périodicité temporelle impose une periodicité spatiale. En effet à tout instant t, deux points en x_1 et x_2 ont la même amplitude de déplacement y dès que

$$(t - x_1/c) = (t - x_2/c) + p\mathrm{T}_0 \quad \text{avec } p \text{ entier}$$

On obtient la période spatiale par différence entre x_2 et x_1 dans le cas $p = 1$, soit une période spatiale appelée longueur d'onde

$$\lambda = c\mathrm{T}_0 = \frac{c}{f_0}$$

Parmi les excitations périodiques, l'excitation sinusoïdale joue un rôle particulier. En effet d'après l'analyse de J. Fourier, on sait qu'on peut écrire toute fonction périodique de période T_0 (fréquence f_0) comme la somme de fonctions sinusoïdales de fréquences multiples nf_0 avec n entier positif, soit avec l'exemple présent

$$y(0,t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

Ceci explique le rôle important des ondes progressives sinusoïdales dans l'étude générale des ondes progressives. Bien sûr, si l'excitation périodique $y(0,t)$ est directement sinusoïdale, la somme ci-dessus se réduit à un seul terme du type

$$y(0,t) = a\cos(2\pi f_0 t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_0}t\right) = a\cos(\omega t)$$

soit alors $y(x,t) = a\cos\big(\omega(t-x/c)\big) = a\cos(\omega t - kx)$ pour une onde se propageant dans le sens des x croissants, avec la pulsation ω telle que $\omega = 2\pi f_0 = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}_0}$ et $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

II – Ondes stationnaires

1/ Obtention

On peut observer sous certaines conditions des ondes qui ne se propagent pas, on les appelle ondes stationnaires. Elles correspondent par exemple à la superposition de deux ondes progressives périodiques sinsoïdales de même période, de même amplitude mais de sens de propagation opposés. Soit en x , à l'instant t :

$$y(x,t) = a\sin\big(\omega(t-x/c)\big) + a\sin\big(\omega(t+x/c)\big) = 2a\sin(\omega t)\cos(\frac{\omega}{c}x) = 2a\sin(\omega t)\cos(kx)$$

avec $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. On retrouve les mêmes périodicités spatiales et temporelles que pour les ondes progressives mais sans le phénomène de propagation, les oscillations sinusoïdales ayant lieu « sur place ».

2/ Exemple de la corde tendue

On peut observer ce phénomène sur une corde tendue fixée à ses deux extrémités en $x = 0$ et $x = l$. Du fait des réflexions sur les extrémités fixes de la corde, celle-ci peut-être parcourue par des ondes progressives dans les deux sens de propagation : vers les x croissants et vers les x décroissants, soit :

$$y(x,t) = f(t-x/c) + g(t+x/c) \quad \text{comme vu précedemment}$$

la corde étant fixe à ses deux extrémités, en $x = 0$ et $x = l$, on peut donc écrire <u>à tout instant t</u>

$$y(0,t) = f(t) + g(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(l,t) = f(t-l/c) + g(t+l/c) = 0$$

soit en combinant ces deux relations

$$f(t-l/c) = -g(t+l/c) = f(t+l/c)$$

ce qui montre que la fonction f (et donc g, son opposée) est périodique de période $2l/c$ (fréquence $c/2l$). On peut donc, comme vu plus haut, les décomposer en somme de fonctions sinusoïdales de fréquences multiples soit :

$$f(t-x/c) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\big(2\pi n\frac{c}{2l}(t-x/c)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\big(2\pi n\frac{c}{2l}(t-x/c)\big)$$

$$g(t+x/c) = -f(t+x/c) = -a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\big(2\pi n\frac{c}{2l}(t+x/c)\big) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\big(2\pi n\frac{c}{2l}(t+x/c)\big)$$

ce qui donne

$$y(x,t) = f(t-x/c) + g(t+x/c) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\Big(2a_n\cos(n\omega t) - 2b_n\sin(n\omega t)\Big)\sin(n\omega\frac{x}{c})\right] \quad \text{où} \quad \omega = \frac{\pi c}{l}$$

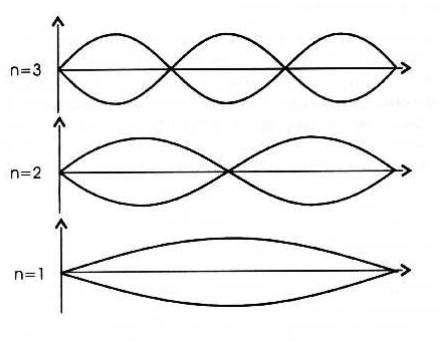
On montre ainsi que des ondes progressives quelconques sur une corde tendue à ses deux extrémités sont en fait la superposition de plusieurs ondes stationnaires de fréquence $f_0 = \dfrac{c}{2l}$ et multiples. L'onde stationnaire de frequence f_0 est appelé le mode fondamental, les autres, de fréquence nf_0, sont appelés les harmoniques.

On peut bien sûr observer ces modes seuls, appelés modes propres, sur une corde tendue. Mais pour observer un seul de ces modes, il faut que la relation entre la fréquence observée, la vitesse de l'onde et la longueur de

la corde soit parfaitement respectée. Cela impose donc une relation entre la longueur d'onde λ du mode et la longueur du fil. Par exemple pour le mode n :

$$f_n = n\frac{c}{2l} = \frac{c}{\lambda_n} \quad \text{soit} \quad l = n\frac{\lambda_n}{2}$$

On représente ci-dessous les trois premiers modes propres d'une corde fixée à ses extrémités



On peut aussi observer ces modes propres en excitant une des extrémités de la corde avec un petite amplitude. Comme pour tous les oscillateurs, on peut observer ces modes propres lors de phénomènes de résonance. Ce phénomène est par exemple observable pour une corde tendue dont une extrémité est fixe (en $x = l$) et l'autre ($x = 0$) vibre sinusoïdalement au cours du temps selon une loi $y(0,t) = a\sin(\omega t)$. On observe alors un régime d'ondes stationnaires résultant de la superposition de l'onde se propageant vers les x croissants et de l'onde qui se réfléchit sur l'extrémité fixe de la corde et qui se propage donc dans l'autre sens. On observe alors sur la corde des fuseaux de vibration. En règle générale, hors résonance, l'amplitude de vibration de la corde est de l'ordre de celle de l'excitation en $x = 0$, ici a.
Cependant, à ω fixé, pour certaines longueurs l de la corde, un phénomène de résonance apparait : certains points particuliers de la corde, régulièrement espacés, possèdent soit :

-une amplitude d'oscillations nulle (nœuds de vibration)

-une amplitude maximale très nettement supérieure à a (ventres de vibration)

On constate qu'alors, le vibreur en $x = 0$ coïncide quasiment avec un nœud tout comme bien sûr l'extrémité fixe en $x = l$, dans cette situation, la longueur de la corde coïncide à un nombre entier de demi-longueurs d'onde λ :

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{avec } n \text{ le nomnbre de fuseaux observés}$$

Ces modes correspondent donc bien aux différents modes propres d'oscillations libres de la corde fixée à ses deux extrémités.

III – Effet Doppler

Ce phénomène apparait dès qu'une source émettant des ondes se déplace par rapport à un récepteur. Dans ce cas, pour le récepteur, il apparait un décalage de fréquence par rapport à la fréquence d'émission. On considère ici un récepteur fixe R et une source S qui émet des ondes vers R mais avec une vitesse $\overrightarrow{u}$ par rapport à R. On notera c, la vitesse de ces ondes dans le milieu et $f_s = 1/\mathrm{T}_s$ la fréquence des ondes émises au niveau de la source. On peut par exemple considérer que la source S émet de très brèves impulsions espacées de la période T_s.

En choisissant comme origine $t = 0$, l'instant où S et R sont à la même position, $x = 0$, et où S émet une impulsion, lorsque la nième impulsion suivante est émise par S, cela a lieu à $t = n\mathrm{T}_s$ et à l'abscisse $-nu\mathrm{T}_s$,

cette impulsion se propage ensuite vers R à la vitesse c, elle va mettre le temps $\tau = \dfrac{nu\mathrm{T}_s}{c}$ pour arriver en R de telle sorte que la nième impulsion arrive en R à l'instant

$$t_n = n\mathrm{T}_s + \frac{nu\mathrm{T}_s}{c} = n\mathrm{T}_s\big(1+\frac{u}{c}\big)$$

de même la (n+1)ième impulsion, émise en S à $t = (n+1)\mathrm{T}_s$ arrivera en R à l'instant

$$t_{n+1} = (n+1)\mathrm{T}_s + \frac{(n+1)u\mathrm{T}_s}{c} = (n+1)\mathrm{T}_s\big(1+\frac{u}{c}\big)$$

La période des impulsions reçues par R est donc

$$\mathrm{T}_r = t_{n+1} - t_n = \mathrm{T}_s\big(1+\frac{u}{c}\big)$$

soit pour la fréquence des impulsions reçues en R :

$$f_r = \frac{f_s}{1+\dfrac{u}{c}}$$

Ce raisonnement est bien sûr valable si c'est R qui s'éloigne de la source S avec une vitesse $\vec{u} = +u\vec{e_x}$. Il peut aussi être généralisé à toute onde progressive de période T_s et de longueur d'onde λ_s émise en S. En utilisant la relation générale $\lambda = c/f$, on obtiendrait avec des notations évidentes

$$\lambda_r = \lambda_s\big(1+\frac{u}{c}\big)$$

On retiendra donc que lorsque la source s'éloigne du récepteur avec la vitesse u, la fréquence perçue f_r est plus faible que celle émise par S et obtenue par la loi

$$f_r = \frac{f_s}{1+\dfrac{u}{c}}$$

Si la source se rapproche de l'émetteur, à la vitesse u, le raisonnement est identique en changeant u et $-u$. On retiendra que lorsque la source se rapproche du récepteur avec la vitesse u, la fréquence perçue f_r est plus grande que celle émise par S et obtenue par la loi

$$f_r = \frac{f_s}{1-\dfrac{u}{c}}$$

Ainsi, de manière génerale, on peut écrire $\Delta f = f_r - f_s = -f_s\dfrac{u}{c}$ où u est la valeur algébrique de la vitesse d'éloignement de la source. Soit encore

$$\frac{\Delta f}{f_s} = -\frac{u}{c} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_s} = \frac{u}{c}$$

Ceci est par exemple ce qui se passe avec une ambulance qui émet des ondes sonores vers un observateur fixe. Le son parait plus aigu quand l'ambulance se rapproche de nous, puis plus grave lorsqu'elle s'éloigne. Ce phénomène est aussi utilisé en astronomie pour mesurer des vitesses des étoiles ou galaxies émettant de la lumière (ou des ondes électromagnétiques) dans l'univers. Une étoile émet de la lumière dans toutes les directions. La différence de longueur d'onde mesurée au niveau de la Terre entre la lumière émise dans le sens de l'éloignement et celle émise dans le sens du rapprochement est telle que

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\frac{u}{c}$$

où u est la vitesse algébrique d'éloignement de l'étoile. C'est ainsi qu'on a mesuré un décalage vers le rouge ($\Delta\lambda > 0$) du rayonnement des galaxies, confirmant les théories d'expansion de l'univers.