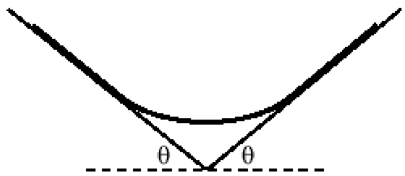
Correction PARTIE C: PROBLEMES

PB 1 : Une corde repose symétriquement sur deux plate-formes, toutes deux inclinées d'un angle θ. La corde possède une masse linéique uniforme, et son coefficient de frottement avec les plate-formes vaut 1.



- Déterminer analytiquement et numériquement la fraction maximale de la corde, qui ne touche pas les plate-formes
- Déterminer analytiquement et numériquement la valeur correspondante de θ

Dans sa totalité, la corde subit comme forces extérieures, son poids $m\vec{g}$ et la résultante $\vec{R} = \int d\vec{R}_n + d\vec{R}_t$ où $d\vec{R}_n$ et $d\vec{R}_t$ désignent les composantes normales et tangentielles des forces de contact s'appliquant sur une portion élémentaire de la corde de masse *dm*, en contact avec la plate- forme. Par symétrie, seules les composantes verticales de $d\vec{R}_n$ et $d\vec{R}_t$ contribuent, et on a donc : $\int d\vec{R}_n.\vec{e}_z + d\vec{R}_t.\vec{e}_z = mg$ avec $\vec{e}_z$ vecteur unitaire sur la verticale ascendante.

En raisonnant sur l'élément *dm* en contact et en projetant suivant la direction $d\vec{R}_n$ pour éliminer les forces de tension internes, on montre que $dR_n = dm\, g \cos\theta$ et donc $d\vec{R}_n.\vec{e}_z = dm\, g \cos^2\theta$

D'autre part $d\vec{R}_t.\vec{e}_z = dR_t \sin\theta = dR_n \sin\theta = dm\, g \cos\theta \sin\theta$ à la limite du glissement.

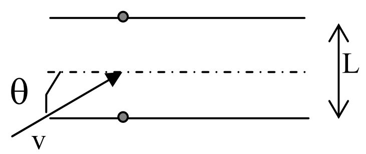
On obtient donc : $(1-f)mg\cos^2\theta + (1-f)mg\cos\theta\sin\theta = mg$, avec pour fraction *f* de la corde en l'air :

$$f = 1 - \frac{1}{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta} = \frac{\tan\theta - \tan^2\theta}{1+\tan\theta}.$$

L'étude de cette fonction donne $f_{\max} = (\sqrt{2}-1)^2 \approx 0{,}172$ pour $\tan\theta_{\max} = \sqrt{2}-1$ ou $\tan 2\theta_{\max} = 1$, soit $\theta_{\max} = \pi/8$

PB 2 : Sur une piste d'atterrissage, deux antennes de guidage sont séparées de L=100 m. Elles émettent deux signaux radio, en phase, de fréquence f_0 = 12 MHz. Un avion se dirige vers la piste, vise le milieu des 2 antennes, avec une vitesse v faisant un angle θ avec la piste.

a) l'intensité émise séparément par chaque antenne est I_0. Déterminer l'intensité du signal combiné des 2 antennes, reçue par l'avion, pour θ=0, et $\theta=\pi/2$. Pour quel angle minimal l'avion ne reçoit-il aucun signal ?



La ddm vaut $\delta = L\sin\theta$

Pour $\theta = 0$, l'interférence est constructive, donc I = 4 I_0

longueur d'onde du signal : $\lambda = \dfrac{c}{f_0}$ =25m = L/4, donc pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\delta = L = 4\lambda$

l'interférence est aussi constructive et I = 4 I_0.

Pour obtenir une interférence destructive, on doit avoir $\delta = \lambda/2$,

on obtient $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{2L} = \dfrac{1}{8}$, soit 7,2°

b) L'avion fait une erreur de trajectoire : il se dirige vers l'une des 2 antennes et non vers le milieu de la piste, avec θ=0. L'intensité du signal reçu commence à diminuer. A quelle distance de l'antenne la plus proche se trouve-t-il quand l'intensité est minimale ?

Interférences destructives à la distance d de la source S_1 si $\delta = r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2}$ avec $r_2 - r_1 = \sqrt{d^2 + L^2} - d$.

La distance d minimale vérifie :

$d = \frac{L^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{8} = \frac{63}{32} L = 197$ m

c) L'avion, revenu sur le droit chemin, s'approche avec un angle $\theta = 30°$, et une vitesse v. Il produit un signal de référence à 12 MHz, qui est en permanence comparé au signal reçu des antennes. Un battement est observé, lors de la somme des 2 signaux. Quelle est la fréquence de battement Δf? Pour $\Delta f = 10$ Hz, quelle est la valeur de v ?

Pour cet angle, on obtient des interférences constructives. Le problème revient à un détecteur se dirigeant à la vitesse v vers une source fixe émettant des ondes se propageant à la vitesse c et au calcul de l'effet Doppler (on néglige les effets relativistes, une approche plus rigoureuse donnant le même résultat de manière approchée) : $f = f_0 (1 + \mathrm{v}/c)$ où f est la fréquence perçue par l'avion.

Fréquence des battements $\Delta f = f - f_0 = f_0 \frac{\mathrm{v}}{c}$,

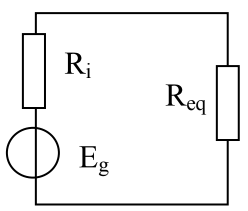
donc $\mathrm{v} = c \frac{\Delta f}{f_0} = \lambda \, \Delta f = 250$ m.s^{-1} = 900 km.h^{-1}

PB 3 : On dispose de 4 résistances de 10 Ω, 20 Ω, 30 Ω et 40 Ω, chacune ne pouvant dissiper plus de 2 W. Proposer le schéma d'un radiateur électrique dissipant une puissance maximale, en utilisant ces 4 résistances, et une source de tension de fem 20 V et de résistance interne 20 Ω. Le cahier des charges imposé devra être validé.

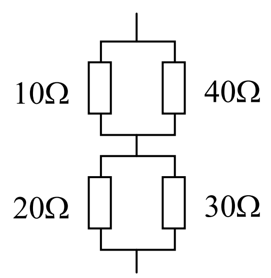
La puissance dissipée dans la résistance équivalente du radiateur : $P_d = R_{eq} \cdot \left(\frac{E_g}{R_i + R_{eq}} \right)^2$

est maximale si $R_{eq} = R_i = 20\Omega$,

ce qui est possible avec :



avec R_{eq} =



Dans l'association des résistances, celle qui dissipe le plus est celle de 20Ω, on montre qu'elle dissipe 1,8W < 2 W (toute autre solution n'utilisant pas la totalité des résistances pour obtenir R_{eq} ne permet pas de vérifier cette condition).

PB 4 : La datation au carbone des organismes utilise la mesure actuelle du ratio de 2 isotopes du carbone, ^{12}C et ^{14}C, dans les molécules de CO_2 présentes dans l'échantillon étudié. Lorsque l'organisme meurt, il n'absorbe plus de ^{14}C de l'atmosphère, ainsi le ratio ^{14}C / ^{12}C diminue, du fait de la désintégration β de ^{14}C (demi vie = T = 5730 ans). Dans les organismes vivants, ce taux est d'environ $1.3\ 10^{-12}$.

On rappelle la loi de désintégration : $N(t)=N_0\exp(-\lambda t)$ où N (resp. N_0) est le nombre de noyaux présents à l'instant t (resp. instant initial). L'activité est le nombre de désintégrations par seconde d'un noyau donné, et s'exprime par $\left|\frac{dN}{dt}\right|$.

Un morceau de charbon de bois, de masse 25.0 g, est trouvé dans les ruines d'une ancienne cité. On mesure l'activité du ^{14}C dans cet échantillon : 250 désintégrations/min. Estimer l'âge de la civilisation qui a construit cette cité.

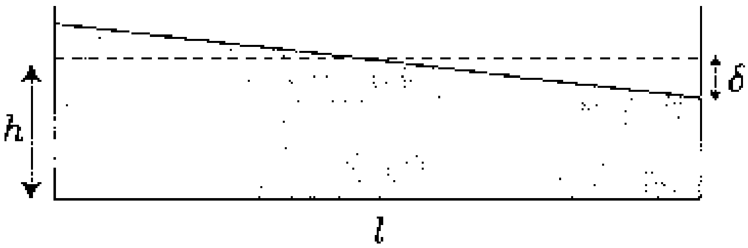
L'activité est $A(t)=-\frac{dN(t)}{dt}=\lambda N(t)$ avec $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$

Dans m=25,0g de charbon de bois, à la date t, on a le ratio : $\frac{N_{C^{14}}(t)}{N_{C^{12}}}=\frac{A_{C^{14}}(t)/\lambda}{N_A.m/M}=\frac{N_{C^{14}}(0)}{N_{C^{12}}}e^{-\lambda t}$

Soit $t=\frac{T}{\ln 2}\ln\left(r_{\text{vivant}}\frac{N_A m\ln 2}{MTA_{C^{14}}(t)}\right)$=3,36.10^{3}ans

PB 5 : Une seiche est une oscillation libre de l'eau, « d'avant en arrière », observables dans les ports, les lacs, ou tout bassin fermé de taille moyenne (ne pas confondre avec les vagues ordinaires).

1. Quelles sont les causes possibles de la seiche, et ensuite, celles de son atténuation ?



2. Elaborer un modèle simple de ce phénomène, en étudiant par exemple les oscillations dans un bassin rectangulaire, et estimer sa période en fonction des paramètres caractéristiques du bassin et des constantes physiques adéquates (une solution exacte n'est pas demandée). Comparer avec les données de la seiche du lac Léman : long de 60 km, profond de 150m, période 76 min, amplitude 2m.

1. La seiche peut être due à l'action du vent, des marées, l'atténuation est causée par la dissipation due aux frottements des différentes couches d'eaux
2. on peut modéliser la seiche comme un mode propre d'une onde stationnaire dont la longueur d'onde est donc reliée à la longueur l du lac par $l=n\frac{\lambda}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$ et la période $T=\frac{\lambda}{v}$ est reliée à la vitesse v de l'onde, estimée par analyse dimensionnelle à partir de la constante de gravité et de la profondeur du bassin : $v=\sqrt{gh}$, soit $T=\frac{2l}{n\sqrt{gh}}$.
3. Pour n=1, on trouve T~50min, ordre de grandeur correct par rapport aux observations.