RELATIVITE RESTREINTE

I BREF HISTORIQUE

1°) Vers la fin du 19 ème siècle les physiciens pensaient avoir trouvé toutes les réponses à l'ensemble des phénomènes physiques grâce à la mécanique (pas encore « classique ») et aux équations de Maxwell (équations relatives aux champs électrique E et magnétique B).

2°) Cependant deux problèmes demeuraient (ils allaient être suivis par bien d'autres !) :

♦ les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par changement de référentiel galiléen

♦ la vitesse de la lumière est la même dans deux référentiels en translation de vitesse ϖ l'un par rapport à l'autre (expérience de Michelson et Morley)

3°) les équations de Maxwell vous sont inconnues , mais le premier problème est immédiatement mis en évidence :

Soit un référentiel galiléen R_1 où règnent un champ électrique E et un champ magnétique B ; une particule chargée y est soumise à la force de Lorenz :

$$\Phi = q(E + \varpi \Lambda B)$$

où ϖ est la vitesse de la particule chargée dans R_1.

Soit R_2 le référentiel en translation rectiligne uniforme de vitesse υ par rapport à R_1 : la particule y a la vitesse $\varpi϶ = \varpi \quad \upsilon$, elle y est soumise, si les champs électromagnétiques sont les mêmes dans R_1 et R_2 à la force

$$\Phi϶ = q(E + \varpi϶\Lambda B) = \Phi \quad q\, \upsilon\Lambda B$$

ce qui est contraire au principe de Galilée et Newton : les lois de la mécanique, et en particulier les forces, sont les mêmes dans deux référentiels Galiléens.

L'autre alternative est que les champs électromagnétiques ne sont pas les mêmes dans R_1 et R_2 ce qui encore est troublant : les référentiels galiléens équivalents en mécanique Newtonienne ne le sont plus vis à vis de l'électromagnétisme.

4°) la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens : cela est en contradiction avec la loi « évidente » de transformation des vitesses : $\varpi(P/\ R_1) = \varpi(P/\ R_2) + \varpi(\ R_2/\ R_1)$

5°) Lorenz Minkowski Poincaré ont abordé le problème en mathématiciens et ont trouvé des formules de transformation des coordonnées et des champs qui satisfont aux résultats expérimentaux (« transformation de Lorenz ») mais n'ont pas donné d'argument physique pour les justifier.

6°) Einstein réexamine la loi de transformation des vitesses entre 2 référentiels en translation l'un par rapport à l'autre :

on rappelle qu'un référentiel R_2 en translation par rapport à un référentiel R_1 est tq à tout instant les axes de R_2 soient parallèles aux axes de R_1 ,le mouvement de O_2 par rapport à R_1 étant quelconque

soit un point P, repéré ds R_1 par x_1,y_1,z_1 : $\overrightarrow{O_1P} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$

et ds R_2 par x_2,y_2,z_2 $\overrightarrow{O_2P} = x_2 \vec{i}_2 + y_2 \vec{j}_2 + z_2 \vec{k}_2$

la vitesse dans R_1 est obtenue en dérivant par rapport au temps dans R_1 soit t_1 et en considérant $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ comme fixes :

$$\vec{v}(P)/R_1 = \frac{dx_1}{dt_1}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt_1}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt_1}\vec{k}_1 = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt_1}\right]_{R_1}$$

la vitesse dans R_2 est obtenue en dérivant par rapport au temps dans R_2 soit t_2 et en considérant $\vec{i}_2$, $\vec{j}_2$, $\vec{k}_2$ comme fixes :

$$\vec{v}(P)/R_2 = \frac{dx_2}{dt_2}\vec{i}_2 + \frac{dy_2}{dt_2}\vec{j}_2 + \frac{dz_2}{dt_2}\vec{k}_2 = \left[\frac{d\overrightarrow{O_2P}}{dt_2}\right]_{R_2} = \frac{dx_2}{dt_2}\vec{i}_1 + \frac{dy_2}{dt_2}\vec{j}_1 + \frac{dz_2}{dt_2}\vec{k}_1$$

puisque $\forall\, t_1 \forall\, t_2\ \vec{i}_1 = \vec{i}_2$ ....

d'autre part $\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2P} \Rightarrow \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt_1}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt_1}\right]_{R_1} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_2P}}{dt_1}\right]_{R_1} \Leftrightarrow$

$\vec{v}(P)/R_1 = \vec{v}(O_2)/R_1 + \frac{dx_2}{dt_1}\vec{i}_1 + \frac{dy_2}{dt_1}\vec{j}_1 + \frac{dz_2}{dt_1}\vec{k}_1$ ce qui n'apporte rien d'intéressant sauf si on postule qu'on peut choisir le même temps $t = t_1 = t_2$ dans R_1 et dans R_2 , on a alors la loi « évidente' » d'addition des vitesses

$$\vec{v}(P)/R_1 = \vec{v}(O_2)/R_1 + \vec{v}(P)/R_2$$

La mécanique Newtonienne contient donc un postulat implicite : on peut choisir la même échelle de temps dans deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre.
Ceci est désormais un postulat explicite de la mécanique classique.

II LES BASES DE LA RELATIVITE RESTREINTE

POSTULAT DE LA RELATIVITE RESTREINTE :
Les lois de la physique doivent s'exprimer de la même manière dans tous les référentiels galiléens.

En conséquence la vitesse de la lumière dans le vide doit être la même dans tous les référentiels galiléens ce qui assure également que les équations de Maxwell sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

D'après ce qui précède, un référentiel est caractérisé non seulement par sa base fixe de coordonnées d'espace, (O, $\iota\ \varphi\ \kappa$) mais aussi par sa base de temps, ou chronologie, t, munie elle aussi d'une origine, c'est pourquoi on parle d'espace-temps : un événement est repéré dans un référentiel par ses trois coordonnées d'espace, x,y,z, et sa coordonnée de temps, t.
Un événement peut être la collision de deux particules, la création d'une particule, l'annihilation d'une particule, nous trouvions normal qu'un tel événement ne soit pas repéré par les mêmes coordonnées d'espace dans deux référentiels différents, il faudra prendre l'habitude qu'il ne soit pas repéré par la même coordonnée de temps.

III LES QUADRIVECTEURS

1°) il existe en relativité des objets appelés quadrivecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{V}$ ayant comme leur nom l'indique 4 coordonnées dont la propriété est l'invariance de la norme par changement de référentiel (ainsi que l'invariance de produit scalaire, nous ne l'utiliserons pas).

2°) premier exemple : un événement est repéré dans R par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} =$ $\overleftrightarrow{R}$ **quadrivecteur instant, position**
($i^2 = -1$, c = vitesse de la lumière),
considérons deux événements : création d'une particule, annihilation de cette particule, on va appeler référentiel propre de cette particule le référentiel qui se déplace avec la particule, le temps dans le référentiel propre est le temps propre t_0 dans le référentiel propre la particule est immobile, donc l'intervalle d'espace temps entre les deux événements est $\overleftrightarrow{R}_2 - \overleftrightarrow{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ic\Delta t_0 \end{pmatrix}$ Δt_0 étant la durée de vie de la particule dans le référentiel propre R_0
Dans le référentiel R' de l'observateur la particule s'est déplacée entre sa création et son annihilation $\overleftrightarrow{R}_2' - \overleftrightarrow{R}_1' = \begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \\ ic\Delta t' \end{pmatrix}$ la norme d'un quadrivecteur est la même dans tous les référentiels => $\| \overleftrightarrow{R}_2 - \overleftrightarrow{R}_1 \|^2 = \| \overleftrightarrow{R}_2' - \overleftrightarrow{R}_1' \|^2$ <=>
$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2\Delta t'^2 = -c^2\Delta t_0^2$ <=> $c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t_0^2 + l^2$ (l longueur parcourue par la particule dans le référentiel de l'observateur entre sa création et son annihilation) si la particule dans R' a la vitesse v (qui est donc la vitesse de R' par rapport à R_0) $l^2 = v^2\Delta t'^2$ et $\boxed{\mathbf{\Delta t' = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t_0}}$ avec $\boldsymbol{\gamma} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\dfrac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{c^2}}}}$

la durée de vie de la particule dans R est plus grande que dans R_0 , c'est le phénomène de dilatation des durées
Ceci a été vérifié expérimentalement sur les demi vies radioactives τ ($N = N_0 e^{-t/\tau}$) des muons en particulier

IV DYNAMIQUE RELATIVISTE

1°) **relation fondamentale de la dynamique** en relativité restreinte dans un référentiel galiléen R : $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}}$ où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement relativiste de la particule $\vec{p}=\gamma m\vec{v}=\dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\vec{v}$ étant la vitesse de la particule dans R, t le temps dans R, $\vec{F}$ la somme des forces s'exerçant sur la particule dans R et m sa masse

remarque pour v/c <<< 1 on retrouve la mécanique classique

2°) **théorème de la puissance cinétique** dans R : $\boxed{\frac{dEc}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}}$

$$\Leftrightarrow \frac{dEc}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v})\,\vec{v}=\gamma m\frac{d\vec{v}}{dt}\,\vec{v}+mv^2\frac{d\gamma}{dt}=\frac{1}{2}\gamma m\frac{d\vec{v}^2}{dt}\,m+mv^2\frac{d\gamma}{dt}$$

avec $$\frac{d\gamma}{dt}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(-\frac{dv^2}{c^2dt}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{c^2-v^2}\frac{dv^2}{dt}$$

d'où $\frac{1}{2}\gamma m\frac{d\vec{v}^2}{dt}=m\,(c^2-v^2)\,\frac{d\gamma}{dt}$ et $\mathbf{\frac{dEc}{dt}=mc^2\frac{d\gamma}{dt}}$ soit $Ec=\gamma mc^2+\text{cste}$

et comme Ec = 0 quand v = 0, $\boxed{Ec=(\gamma-1)mc^2}$

3°) on définira **l'énergie d'une particule** par $\boxed{E=\gamma mc^2=Ec+mc^2}$

et $\mathbf{E_0=mc^2}$ **= énergie au repos de la particule** = énergie de la particule dans un référentiel où elle est au repos ; on remarquera que $\frac{dEc}{dt}=\frac{dE}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

$E=\gamma mc^2$ est la formule d'Einstein sur l'équivalence de la masse et de l'énergie

4°) en physique des particules les **masses** sont souvent exprimées **en MeV/c²**

5°) relation qui peut se révéler intéressante : $\vec{p}=\frac{E}{c^2}\vec{v}$ module de p souvent exprimé en MeV/c

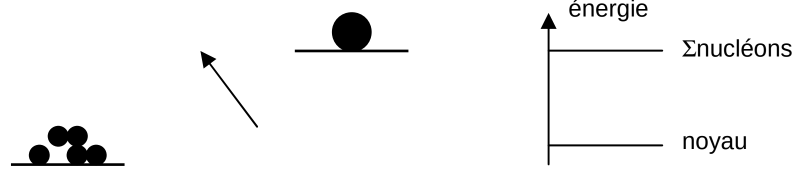
6°) On voit qu'en relativité on ne comptabilise pas l'énergie potentielle des forces extérieures $\vec{F}$ dans E ¸ Dans un champ de force extèrieur d'énergie potentielle Ep_{ext}, l'énergie totale de la particule est $E_t=Ec+Ep_{ext}+mc^2=\gamma mc^2+Ep_{ext}$

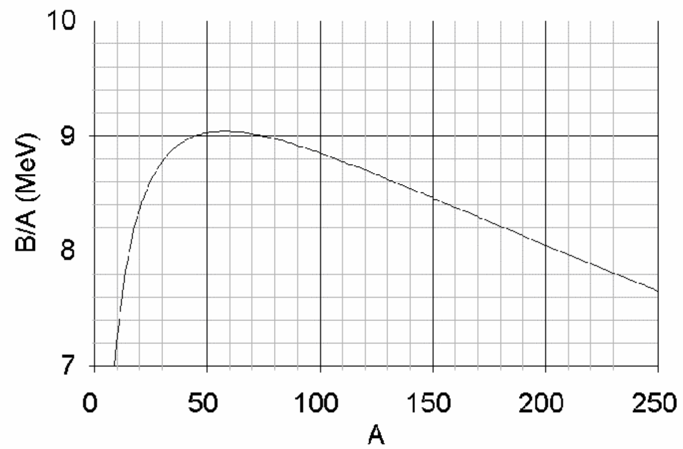
7°)par contre l'énergie potentielle des forces inté rieures d'interactions entre sous particules constituant la particule est comptabilisée dans E, c'est elle qui explique le défaut de masse des noyaux stables

la masse du noyau est inférieure à la somme des masses des nucléons qui le constituent $M=\Sigma m-\Delta m$ Δm = **défaut de masse du noyau**

dans un référentiel où ils sont immobiles on a donc $E(\text{noyau})=\Sigma E(\text{nucléons})-\Delta mc^2$

Δmc^2 représente l'énergie à fournir pour séparer le noyau en ses nucléons indépendants, c'est aussi l'énergie potentielle d'interaction forte entre nucléons (attractive donc négative, état noyau plus stable que l'état Σnucléons)





$\Delta mc^2/A$ = énergie de liaison par nucléon

La courbe met en évidence le dégagement d'énergie beaucoup plus grand par fusion que par fission

V LE QUADRIVECTEUR QUANTITE DE MOUVEMENT ENERGIE

1°) on démontre que $\begin{pmatrix} \vec{p} = \gamma m \vec{v} \\ i\gamma mc = i\frac{E}{c} \end{pmatrix}$ constitue un quadrivecteur $\overleftrightarrow{p}$ appelé **quadrivecteur quantité de mouvement énergie**

2°) **dans le référentiel propre** $\overleftrightarrow{p}_0 = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ imc = i\frac{E_0}{c} \end{pmatrix}$, par conservation de la norme d'un quadrivecteur par changement de référentiel $(\overleftrightarrow{p})^2 = (\overleftrightarrow{p}_0)^2$ <=>

$\underline{p^2 = (\gamma^2-1)m^2c^2}$ ou la relation équivalente $\underline{E^2 = p^2c^2 + E_0^2}$

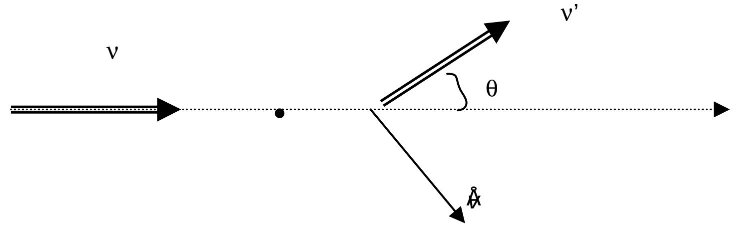
3°) dans le vide, le quadrivecteur $\overleftrightarrow{p}$ du photon est $\begin{pmatrix} \vec{p} = \frac{h\nu}{c^2}\vec{c} \\ i\frac{E}{c} = i\frac{h\nu}{c} \end{pmatrix}$ donc sa norme = 0 dans tous les référentiels dans le vide
(rq dans le milieu d'indice optique n la vitesse du photon est c/n, il peut donc y avoir des particules plus rapides que la lumière : effet Cerenkov)

VI LES SYSTEMES ISOLES

1°) si un système de particules est isolé le quadri vecteur $\Sigma \overleftrightarrow{p}$ se conserve (attention, il se conserve dans un référentiel donné, par exemple le référentiel du laboratoire, mais pas dans un changement de référentiel)

<=> $\Sigma \vec{p}$ se conserve et ΣE se conserve

2°) exemple sans création ni annihilation de partic ules : EX1 : effet Compton
(1924) le photon de fréquence ν arrive sur le photon immobile dans le référentiel du laboratoire, il est dévié de l'angle θ et sa fréquence devient $\nu' < \nu$; calculer $\lambda'-\lambda$



en fonction de θ et de $\Lambda_e = \frac{h}{mc}$ = longueur d'onde Compton de l'électron = λ du photon de même énergie que l'électron au repos (m = masse de l'électron)

3°) création ou annihilation de particules
il y a un référentiel particulièrement important : c'est le **référentiel du centre de masse** du système, càd celui **dans lequel $\Sigma \vec{p} = \vec{0}$**

d'après la conservation de la norme de $\overleftrightarrow{p}$: $(\Sigma \vec{p})^2 - (\Sigma E/c)^2 = -(\Sigma E^*/c)^2$
c'est dans le référentiel du centre de masse que l'énergie du système est la plus basse
EX 2: un proton heurte un proton au repos dans le référentiel du laboratoire, le choc entraîne une réaction particulaire avec création d'un proton et d'un antiproton (même énergie propre $E_0 = mc^2 = 938$ MeV) ; montrer que la réaction ne peut avoir lieu que si l'énergie cinétique du proton incident est supérieure à une valeur minimum qu'on calculera (**énergie de seuil) :** $p^+ + p^+ \rightarrow 3\,p^+ + p^-$
(Rq : on ne peut pas faire n'importe quoi, il faut satisfaire à la conservation de la charge)

4°) anneaux de stockage : dans les anneaux de stockage on provoque la collision de protons d'énergie cinétique Ec* se heurtant de front
quelle devrait être leur énergie cinétique Ec* minimum pour obtenir la réaction ci dessus ?

VII PARTICULE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE

1°) une particule chargée q dans un champ électrique $\vec{E}$ est soumise à la force $\vec{F} = q\vec{E}$

si $\vec{E}$ est uniforme et statique la situation est la même que dans un champ de pesanteur, où sous l'action de n'importe quelle force constante, donc trajectoire parabolique dans le cadre de la mécanique classique

Nous nous restreindrons dans cette étude à **$\vec{E}$ uniforme et statique, on n'oubliera donc pas que tous les résultats sont généralisables à n'importe quelle force constante**

2°) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}$ => $\vec{p} = q\vec{E}t + \vec{p}_0$ si $\vec{E}$ est un vecteur uniforme et constant **la trajectoire est donc plane dans le plan défini par $\vec{E}$ et $\vec{p}_0$**

3°) particule initialement au repos: $\vec{p} = q\vec{E}t$ (mouvement rectiligne suivant la direction de $\vec{E}$ (coordonnée x) et $p^2 = (\gamma^2 - 1)m^2c^2 = (qEt)^2$ =>

$$\gamma^2 = \frac{(qEt)^2}{m^2c^2} + 1 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \iff v = \dot{x} = \frac{qEt/m}{\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{mc^2}{qE}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2} - 1\right) \iff \left(\frac{qEx}{mc^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{qEt}{mc}^2\right) = 1 \quad ①$$

temps mis pour parcourir une distance donnée dans le référentiel du laboratoire:

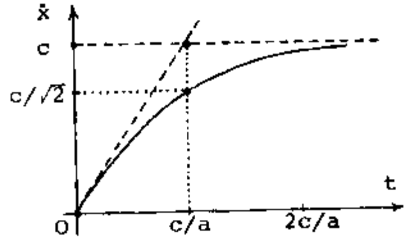
$$t = \frac{mc}{qE}\sqrt{\left(\frac{qEx}{mc^2} + 1\right)^2 - 1}$$

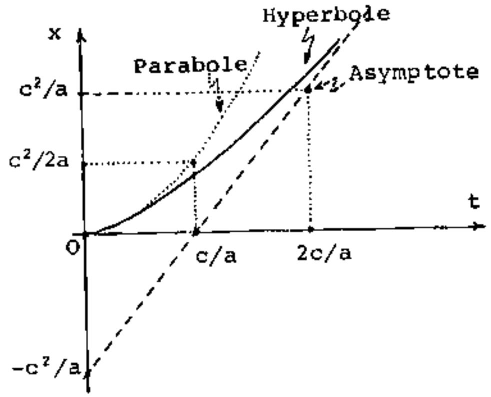
considérons les limites de ces expressions quand c –> ∞

$\dot{x} \to \dfrac{qEt}{m}$ $\quad x \to \dfrac{qEt^2}{2m}$ $\quad t \to \sqrt{\dfrac{2mx}{qE}}$ on retrouve bien les résultats classiques

① est l'équation d'une hyperbole, du type $\left(\dfrac{X}{A}\right)^2 - \left(\dfrac{t}{b}\right)^2 = 1$

calcul des asymptotes : on fait X et t –> ∞ $\dfrac{X}{A} = \pm\dfrac{t}{b}$ càd $\dfrac{qEx}{mc^2} + 1 = \pm\dfrac{qEt}{mc}$





Avec a =qE/m

VIII PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE

1°) champ magnétique $\vec{B}$ $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ => $\dfrac{dEc}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0$ => un champ magnétique quel qu'il soit (statique ou non, uniforme on non) ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule (en méca relativiste comme en méca classique)

v = cste => γ = cste et $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \gamma m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

la situation est identique à celle de la mécanique classique à condition de remplacer m par γm

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-q\vec{B}}{\gamma m} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad \text{en posant} \quad \vec{\omega} = \frac{-q\vec{B}}{\gamma m}$$

cette équation est caractéristique d'un vecteur $\vec{v}$ tournant autour du vecteur $\vec{\omega}$ à la vitesse angulaire ω

2°) - **champ magnétique statique et uniforme et $\vec{v}_0$ est $\perp$ $\vec{B}$**

$$\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -\omega\dot y & = & \ddot x \\ \omega\dot x & = & \ddot y \\ 0 & = & \ddot z \end{array} \qquad ① \qquad \left(\underline{\vec{k} \text{ est défini par } \vec{B}}\right)$$

La troisième équation de ① donne $\dot z$ **= cste = 0**

Le mouvement reste dans le plan $\perp$ $\vec{B}$

On pose $u = x + iy$ $(i^2 = -1)$ d' après le système d' équations précèdent

$$\ddot u = -i\omega\dot y + i\omega\dot x = i\omega\dot u$$

qui s' intègre une première fois en $\dot u = \dot u_0 . e^{i\omega t}$ car ω constant

$|\dot u_0| = v_0$, l'argument étant l'angle de l'axe choisi pour Ox avec $\vec{v}_0$

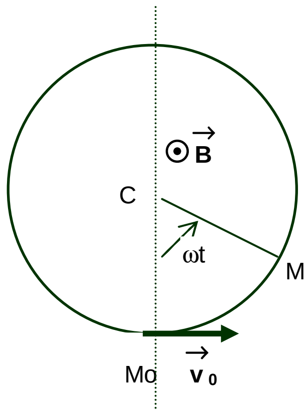
$\dot u$ s'intégre ensuite en $u - u_0 = \dfrac{1}{i\omega}\dot u_0 .(e^{i\omega t} - 1)$ ②

$$u - u_0 = \frac{i}{\omega}\dot u_0 + \frac{1}{\omega}\dot u_0\, e^{(i\omega t - \pi/2)}$$

$$u - u_0 = \frac{i}{\omega}\dot u_0 + \frac{1}{\omega}\dot u_0\, e^{(i\omega t - \pi/2)}$$

$$\vec{M_0M} = \vec{M_0C} + \vec{CM}$$

$$\|\vec{M_0C}\| = \|\vec{CM}\| = \frac{v_0}{|\omega|}$$



M décrit un cercle de centre C , de rayon $\dfrac{v_0}{|\omega|} = \dfrac{\gamma m v_0}{|q|B}$ à la vitesse angulaire

$$\boxed{\omega = -\frac{qB}{\gamma m} \quad \text{pulsation cyclotron}}$$

une charge négative tourne dans le sens trigonométrique autour du champ magnétique
une charge positive tourne dans le sens horaire autour du champ magnétique

ces propriétés peuvent se retrouver par passage aux coordonnées cartésiennes à partir de ②
On ne restreint pas la généralité en prenant l' origine des coordonnées en M_0 et comme axe $\vec{i}$ la direction de $\vec{v}_0$ ce ci pour ne pas alourdir les calculs, mais tout autre choix donne les mêmes conclusions , ② donne alors

$$x = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t - \pi/2)$$

$$y - \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t - \pi/2) \qquad \text{car } \dot u_0 = v_0$$

dans lequel on reconnaît bien le cercle de centre $(0, \frac{v_0}{\omega})$ de rayon $\left|\frac{v_0}{\omega}\right|$

3°) applications :

① le tube cathodique , la déflexion magnétique

② le spectrométre de masse

③ le cyclotron , fréquence cyclotron

4°) - **champ magnétique statique et uniforme et $\vec{v}_0$ est** quelconque

le système ① est toujours valable, La troisième équation donne $\dot z$ **= cste =** $v_{0//}$

$\vec{v}$ se décompose en $\vec{v}_\perp$ perpendiculaire à $\vec{B}$ et $\vec{v}_{//0}$ parallèle à $\vec{B}$
Comme la norme de la vitesse reste constante **$v_\perp = v_{\perp 0}$ les composantes perpendiculaire et parallèle de la vitesse se conservent chacune en norme**

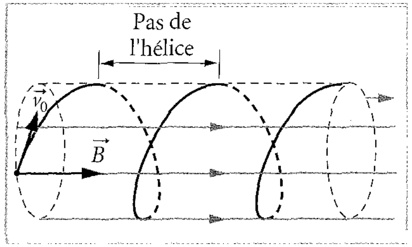
d' où $z = v_{0//}t + z_0$

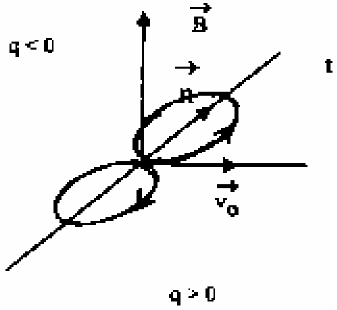
On pose $u = x + iy$ et on retrouve en $u - u_0 = \dfrac{1}{i\omega}\dot u_0 .(e^{i\omega t} - 1)$ ②

A la seule différence que $\dot u_0 = v_{0\perp}$ et non plus v_0

La projection du mouvement de M dans le plan (xy) est H qui décrit un cercle de centre C (0, $\frac{v_{0\perp}}{\omega}$) **passant par H_0, de rayon** $\left| \frac{\dot{u}_0}{\omega} \right| = \left| \frac{\gamma m v_{0\perp}}{qB} \right|$

en ajoutant le mouvement suivant z'z

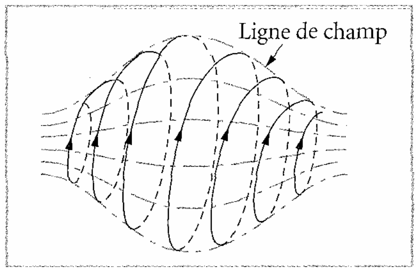




Le mouvement de P est une hélice de pas ($2\pi/\omega$) $v_{0//}$ constant dont la projection ds le plan (xy) est le cercle suscité . La particule s' enroule autour des lignes de champ dans le sens trigonométrique si q < 0 , dans le sens horaire si q > 0 . Ces lignes de champ étant inscrites sur un tube de champ de $\vec{B}$

5°) si le champ $\vec{B}$ n' est pas uniformet mais ne varie pas trop rapidement les résultats précédents restent valables la particule s' enroule autour des lignes de champ inscrites sur les tubes de champ de $\vec{B}$ en introduisant **le flux magnétique caractéristique du tube $\Phi = BS = \pi B.R^2$**

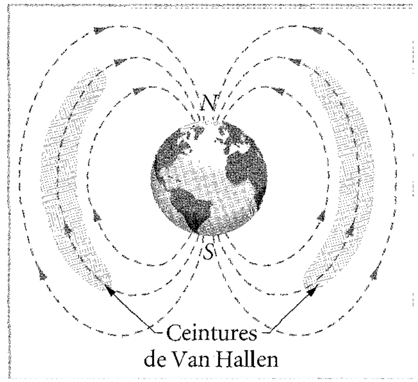
on voit que le rayon est d' autant plus faible que le champ est plus intense d' autre part on admet que pour des variations peu rapides de B on peut toujours écrire $v_\perp = \frac{(qBR)}{\gamma m}$, ce qui joint à $B.R^2$ = cste $\Rightarrow$ $v_\perp R$ = cste = $q\Phi/\pi\gamma m$ = C



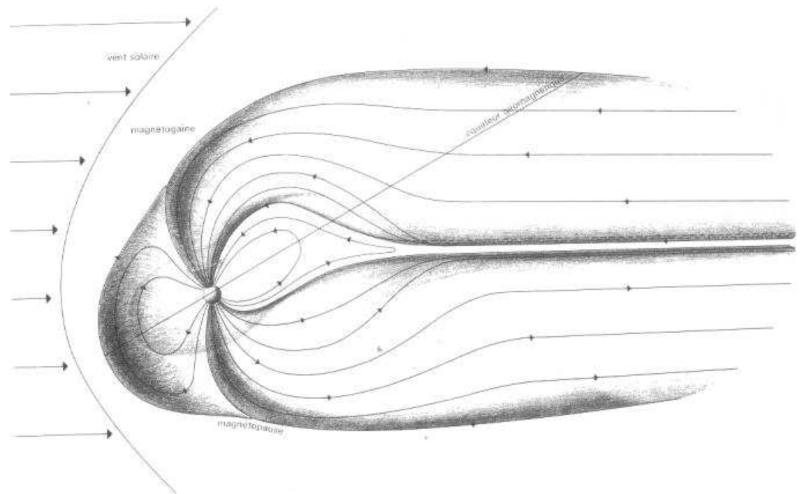
cette relation montre que $v_\perp$ augmente quand R diminue , et comme $v^2 = v_\perp^2 + v_{//}^2$ est une constante du mouvement , $v_{//}$ s' annule lorsque R = R_M tq $R_M v$ = C : on a un point de rebroussement dit **point miroir** ;si le tube de champ magnétique comporte deux points miroirs on fabrique ainsi des **bouteilles magnétiques** où on peut confiner les charges électriques .

A noter que les ceintures de van Allen , formées de tubes de autour de la terre constituent des bouteilles magnétiques pour les ions du vent solaire

ces ceintures protégent la Terre des rayons cosmiques sauf au pôles où ils peuvent pénétrer dans l'atmosphère en créant des aurores boréales ou australes et des orages magnétiques



Deformation par le vent solaire



IX TRANSFORMATION DE LORENZ

1°) la transformation de Lorenz permet de relier les coordonnées d'un quadrivecteur $\overset{\leftrightarrow}{A}$ dans le référentiel R à ses coordonnées dans le référentiel R′ en translation rectiligne uniforme par rapport à R (changement de référentiel galiléen)

et soit $u\,\vec{e}_x$ la vitesse de R′/R $\left(\overset{\leftrightarrow}{A'}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\left(\overset{\leftrightarrow}{A}\right)$ avec $\beta = u/c$

et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ on voit que les composantes suivant y et z sont inchangées, la matrice de passage peut se condenser en

$\left(\overset{\leftrightarrow}{A'}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & i\beta\gamma \\ -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\left(\overset{\leftrightarrow}{A}\right)$ en ne faisant intervenir que les composantes 1 et 4

on vérifiera que Det = 1, cette matrice peut être identifiée à une matrice rotation dans l'espace (x,ict)

inversement on passe de R′ à R en changeant u en – u càd β en – β

2°) contraction des longueurs

pour mesurer une longueur en mécanique classique ou non il faut repérer les positions des extrémités A et B sur une régle (événements 1 et 2) ; si on est dans un référentiel où l'objet est immobile les deux événements peuvent avoir lieu à des instants différents, sinon il est nécessaire qu'ils soient simultanés (mesure d'un serpent)

soit R_0 le référentiel où l'objet à mesurer est immobile, sa longueur est sa longueur propre l_0 et R le réferentiel où on mesure sa longueur l, la vitesse de R par rapport à R_0 est $\vec{\varpi} = u\,\vec{e}_x$ = vitesse de l'objet dans R

Evenement repèrage de A dans R_0 $\begin{pmatrix} x_{A0} \\ y_{A0} \\ z_{A0} \\ ict_{A0} \end{pmatrix}$ dans R $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ ict_A \end{pmatrix}$

Evenement repèrage de B dans R_0 $\begin{pmatrix} x_{B0} \\ y_{B0} \\ z_{B0} \\ ict_{B0} \end{pmatrix}$ dans R $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ ict_B = ict_A \end{pmatrix}$

$\left(\overset{\leftrightarrow}{A_0B_0}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\left(\overset{\leftrightarrow}{AB}\right)$ avec β = u/c (vitesse de R_0/R) soit

$$\begin{pmatrix} x_{B0}-x_{A0} \\ y_{B0}-y_{A0} \\ z_{B0}-z_{A0} \\ ic(t_{B0}-t_{A0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_{B0}-x_{A0} = \gamma(x_B-x_A) \\ y_{B0}-y_{A0} = y_B-y_A \\ z_{B0}-z_{A0} = z_B-z_A \end{array}$$

les dimensions dans les directions perpendiculaires à ϖ sont inchangées

dans la direction parallèle à ϖ

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\Delta x_0}$$

il y a contraction de la longueur dans la direction du mouvement

3°) **calcul de la vitesse dans R′** en fonction de la vitesse dans R en prenant le quadrivecteur position-instant on trouve :

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$ict' = \gamma(-i\beta x + ict) \iff t' = \gamma(t - ux/c^2)$$

en différenciant les expressions ci dessus on obtient :

$$dx' = \gamma(dx - udt)$$

$$dy' = dy \qquad dz' = dz$$

$$dt' = \gamma(dt - udx/c^2)$$

d'où
$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - udt}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

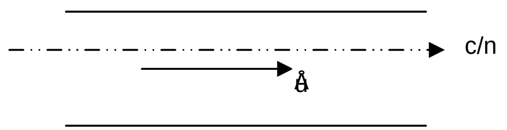
les autres composantes se calculent de même on remarque que $\frac{dy'}{dt'} \neq \frac{dy}{dt}$

on remarque tout de suite que les composantes de la vitesse ne se calculent pas par la transformation de Lorenz, å n'est pas « le début » d'un quadrivecteur, le quadrivecteur , c'est $\overset{\leftrightarrow}{p}$

on prendra garde de ne pas confondre u , vitesse de R′/R et v o**u** $\frac{dx}{dt}$ **vitesse de la particule**

4°) vitesse de la lumière dans un fluide en mouvement

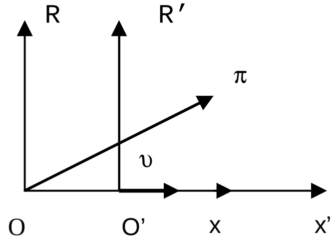
la vitesse de la lumière **dans le vide** est la même dans tous les référentiels **mais** dans le milieu d'indice n cette vitesse est c/n **pour un observateur (dans un réferentiel) immobile par rapport au fluide**



Donc , si le fluide a la vitesse u (algébrique) par rapport à R de l'observateur et si la lumière se propage dans la même direction que å (faisons simple) la vitesse est

c/n dans R′ et $= \dfrac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{nc}}$ dans R

5°) effet Doppler relativiste : une source immobile dans R émet des photons de fréquence ν , à quelle fréquence seront ils reçus dans R′ sachant que R′ est en translation de vitesse å/ R



å (quantité de mvt du photon émis) et å définissent le plan Oxz, å fait l'angle θ avec Ox = O'x'

utilisons le quadrivecteur du photon et la transformation de Lorenz

$$\begin{pmatrix} \frac{h\nu'}{c}\cos\theta' \\ 0 \\ \frac{h\nu'}{c}\sin\theta' \\ i\frac{h\nu'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c}\cos\theta \\ 0 \\ \frac{h\nu}{c}\sin\theta \\ i\frac{h\nu}{c} \end{pmatrix}$$

ν' étant la fréquence reçue dans R′ et θ' l'angle dans R′ entre la direction de la lumière reçue et O'x'

la dernière coordonnée donne tout de suite **$\nu' = \nu\gamma(1 - \frac{u}{c}\cos\theta)$**

les autres coordonnées permettent en cas de besoin de calculer θ'

effet Doppler longitudinal : θ = 0 $\nu' = \nu\gamma(1 - \frac{u}{c}) = \nu\sqrt{\dfrac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}}$ on retrouve le résultat connu ν' < ν si l'observateur s'éloigne de la source, ν' > ν si l'observateur se rapproche de la source (u<0)

effet Doppler transversal : θ = π/2 $\nu' = \nu\gamma = \nu\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

ces résultats théoriques ont été confirmés par des résultats expérimentaux