Interférences à deux ondes.

Soient deux ondes progressives monochromatiques. On pose s(M,t) la grandeur qui se propage ($\vec{E}$ ou $\vec{B}$ pour une onde électromagnétique (ou optique), p la surpression pour une onde sonore, y la déformation sur une surface liquide,…)

$$s_1(M,t) = s_{10}.\cos(\omega_1.t-\phi_1(M)) \text{ et } s_2(M,t) = s_{20}.\cos(\omega_2.t-\phi_2(M))$$

L'onde en M résultante est la somme des deux ondes, et on obtient

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t) = s_{10}.\cos(\omega_1.t-\phi_1(M)) + s_{20}.\cos(\omega_2.t-\phi_2(M))$$

La puissance observée est proportionnelle à la moyenne temporelle quadratique de la grandeur qui se propage (ondes électromagnétique E^2, ondes sonores p^2, ondes mécaniques sur une surface liquide y^2…)

Ici on posera l'intensité I de l'onde comme la moyenne temporelle de $s(M,t)$, ce qui se comprend bien pour des phénomènes très rapides comme la lumière sa longueur d'onde est l'ordre de 0,6 µm, sa fréquence de l'ordre de 5.10^{14} Hz, sa période 2.10^{-15} s. L'œil a typiquement un temps de réponse de l'ordre de t_0 = 1/25 s, il va donc percevoir la moyenne temporelle de la puissance reçue

$$I = \frac{1}{t_0}.\int_t^{t+t_0} s^2(M,t).dt = < s^2(M,t) > = < (s_{10}.\cos(\omega_1.t-\phi_1(M)) + s_{20}.\cos(\omega_2.t-\phi_2(M)))^2 >$$

$$= < s_{10}^2.\cos^2(\omega_1.t-\phi_1(M)) + s_{20}^2.\cos^2(\omega_2.t-\phi_2(M)) + 2.\, s_{10}.\, s_{20}.\cos(\omega_1.t-\phi_1(M)).\cos(\omega_2.t-\phi_2(M)) >$$

$$= ½.\, s_{10}^2 + ½.\, s_{20}^2 + 2.\, s_{10}.\, s_{20}.< \cos(\omega_1.t-\phi_1(M)).\cos(\omega_2.t-\phi_2(M))>$$

où $2.\, s_{10}.\, s_{20}.< \cos(\omega_1.t-\phi_1(M)).\cos(\omega_2.t-\phi_2(M))>$ est le terme d'interférences, de plus :

$$< \cos(\omega_1.t-\phi_1(M)).\cos(\omega_2.t-\phi_2(M))>$$

$$= ½.< \cos\{(\omega_1+\omega_2).t - (\phi_1(M)+\phi_2(M))\} + \cos\{(\omega_1-\omega_2).t - (\phi_1(M)-\phi_2(M))\}>$$

Si ce terme est non nul, on dit que les deux ondes sont <u>*cohérentes*</u>.

Si $\omega_1 \neq \omega_2$ le terme d'interférences est nul et l'intensité résultante $I = ½.\, s_{10}^2 + ½.\, s_{20}^2 = I_1 + I_2$ sera la somme des intensités des deux sources : c'est le cas le plus fréquent (pour éclairer deux fois plus une zone donnée, on met deux lampes...)

Une condition nécessaire pour avoir ce terme non nul est *l'égalité des pulsations*.

Cas des ondes sonores.

On alimente deux générateurs d'ondes ultrasonores avec un même générateur basses fréquences de façon à obtenir simplement $\omega_1 = \omega_2$.

Dans ce cas-là le terme d'interférences devient :

$$< \cos(\omega_1.t-\phi_1(M)).\cos(\omega_2.t-\phi_2(M))> = ½.< \cos\{\ (\phi_2(M)-\phi_1(M))\}>$$

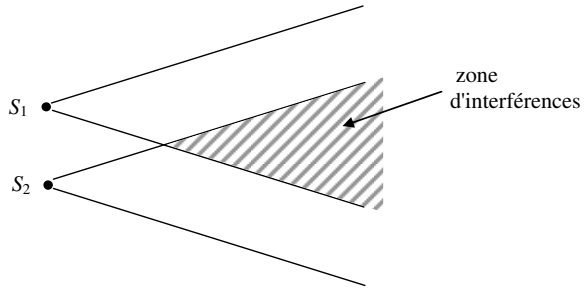
$$\text{avec } \phi_2(M)-\phi_1(M) = k.S_2M - k.S_1M + (\phi_{20} - \phi_{10}) = \frac{2\pi}{\lambda}\left[S_2M - S_1M\right] + (\phi_{20} - \phi_{10}).$$

Ici $\phi_{20} - \phi_{10} = 0$ (c'est le même générateur qui alimente les deux sources), et on obtient donc pour l'intensité résultante (en supposant que les deux sources sont identiques, soit $s_{10} = s_{20} = s_0$) :

$$I = ½.\ s_0^2 + ½.\ s_0^2 + s_0^2.\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left[S_2M - S_1M\right]\right) = 2.I_0 + 2.I_0.\ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left[S_2M - S_1M\right]\right)$$

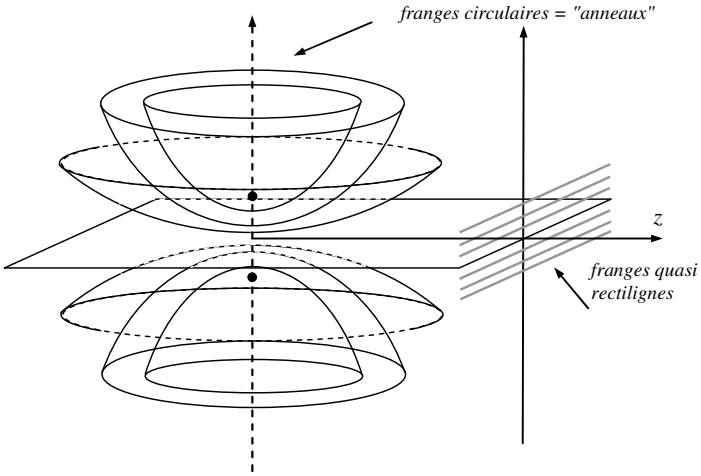
En posant $\delta = S_2M - S_1M$ la "différence de marche", on obtient la formule générale des interférences à deux ondes $I = 2.I_0.\left(1+\cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)\right)$

A noter que cette formule donne l'intensité résultante dans toute la zone de recouvrement des deux faisceaux sonores issus des deux sources ultrasonores :



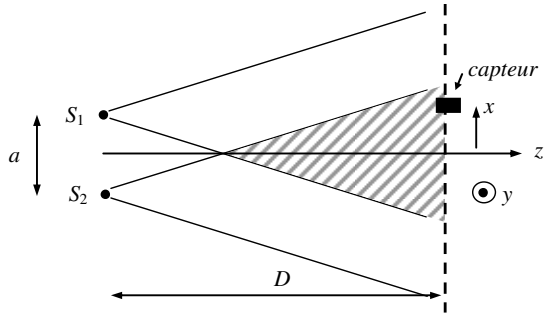
Les lieux d'intensité maximale sont les lieux où $\delta = n\lambda$ où n est un entier relatif.

On a donc sur ces lieux $S_2M - S_1M$ = *constante :* les surfaces d'intensité fixée sont donc des *hyperboloïdes de révolution d'axe* S_1S_2 :



A grande distance de S_1 S_2 dans la direction Oz, on doit avoir quasiment des plans parallèles au plan médiateur du segment S_1S_2.

Si on déplace un capteur dans un plan situé à une distance D du segment S_1S_2 on doit avoir au voisinage de l'axe :



En faisant un développement limité à l'ordre le plus bas, on obtient :

$$S_1M = \sqrt{D^2 + (x - \frac{a}{2})^2 + y^2} = D\sqrt{1 + \frac{(x - 1/2.a)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}} \approx D + \frac{(x - 1/2.a)^2}{2D} + \frac{y^2}{2D}$$

$$S_2M = \sqrt{D^2 + (x + \frac{a}{2})^2 + y^2} = D\sqrt{1 + \frac{(x + 1/2.a)^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}} \approx D + \frac{(x + 1/2.a)^2}{2D} + \frac{y^2}{2D}$$

Soit $\delta = S_2M - S_1M \approx \frac{(x + 1/2.a)^2 - (x - 1/2.a)^2}{2D} = \frac{x.a}{D}$

On obtient donc pour l'intensité $I = 2.I_0.\left[1 + \cos\left(2\pi \frac{x.a}{\lambda.D}\right)\right]$ donc une succession de maxima et de minima d'intensité sonore avec une *interfrange* (période spatiale) de $i = \frac{\lambda.D}{a}$.

Ici typiquement $f = 40$ kHz, $c = 340$ m.s^{-1}, soit $\lambda = 8{,}5$ mm.

Si les deux sources sont distantes de 10 cm pour $D = 1$ m, on a $i = 8{,}5$ cm ce qui est mesurable car largement supérieur à la taille d'un capteur (de l'ordre de 1,5 cm).

<u>A remarquer :</u>

Si on écarte les sources (a augmente) alors l'interfrange i diminue (on resserre les franges).

Si on recule le capteur (D augmente), alors l'interfrange augmente (on écarte les franges)

Cas des ondes lumineuses

On se restreint aux ondes optiques dans le cadre de l'optique scalaire (les polarisations des deux ondes sont compatibles : les champs électriques sont quasi parallèles, on peut donc travailler en scalaire).

Pour savoir si le terme d'interférences est non nul, on s'intéresse au détail de ce que contient $\phi_2(M) - \phi_1(M)$: chaque phase d'onde en M contient de fait deux termes : un terme de retard dû à la propagation et un terme de phase initiale au niveau de l'émission de la source, soit $\phi_1(M) = \Sigma\, k_i.L_i + \phi_{10}$ où les k_i est la norme du vecteur d'onde dans le milieu i et L_i est la longueur géométrique parcourue dans le milieu i, ϕ_{10} est la phase initiale au niveau de la source.

Si la source S_1 et le point M appartiennent au même milieu (homogène d'indice n), on aura :

$k.L = \frac{\omega}{v}.S_1M = \frac{2\pi}{v.T}.S_1M = \frac{2\pi}{c.T}.n.S_1M = \frac{2\pi}{\lambda_0}.n.S_1M = \frac{2\pi}{\lambda_0}.(S_1M)$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide et (S_1M) est le "chemin optique" parcouru par l'onde, c'est-à-dire la distance qu'elle aurait parcourue dans le vide pendant la même durée.

Si le rayon lumineux issu de la source doit traverser plusieurs milieux homogènes, on somme ces "chemins optiques", soit $(S_1M) = \Sigma\, n_i.L_i$ où n_i est l'indice optique du milieu et L_i la longueur géométrique parcourue dans ce milieu.

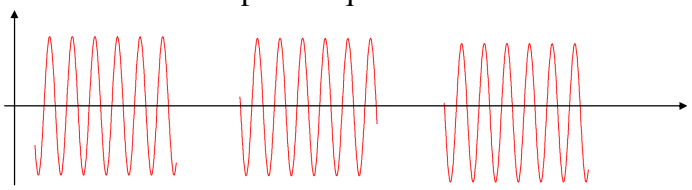
Si l'indice varie continûment le long du rayon lumineux, on aura $(S_1M) = \int_{S_1}^{M} n.ds$ où s est l'abscisse curviligne sur le rayon lumineux (c'est-à-dire la distance SM mesurée le long du rayon lumineux)

On obtient donc $\phi_2(M)-\phi_1(M) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left[(S_2M)-(S_1M)\right]+(\phi_{20}-\phi_{10})$

Pour faire la moyenne temporelle de cette différence, il faut se préoccuper du seul terme susceptible encore de dépendre du temps, la différence de phase initiale.

Une source émet de la lumière de façon discontinue (émission de photons). Pour un point source (par exemple un atome) qui émet de la lumière à symétrie sphérique, le nombre de photons émis par seconde est très important (de l'ordre de 10^{11}). D'un point de vue mésoscopique, on peut considérer que cette émission se fait selon une onde sphérique limitée dans le temps de durée τ (~ 10^{-11}s) caractéristique ("train d'onde" = sinusoïde tronquée de fréquence ν_0 associée à la longueur dans le vide λ_0)

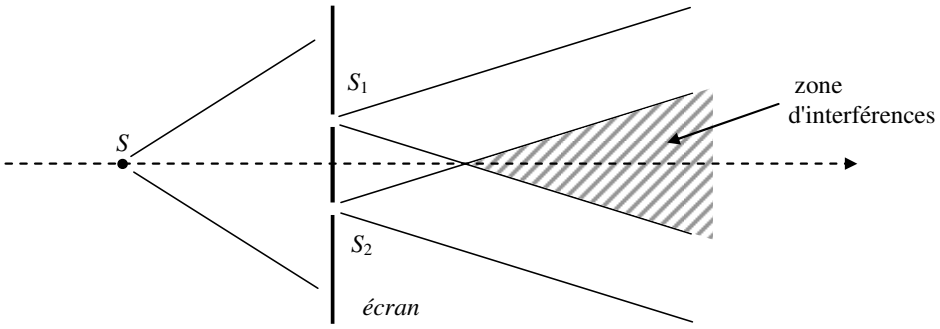
On obtient donc une courbe d'émission temporelle qui a cette allure :



où chaque train d'onde a une phase initiale aléatoire dans le temps.

La moyenne temporelle pour deux ondes de même fréquence ne sera donc non nulle que si $(\phi_{20}-\phi_{10})$ ne dépend plus du temps, *il faut donc faire interférer deux ondes provenant du même train d'onde* (émis par une source primaire unique).

Le moyen utilisé est de séparer en deux l'onde primaire émise par une *source unique S* pour leur faire suivre deux trajets différents, par exemple avec les trous de Young : on intercale entre la source primaire *S* et l'écran d'observation un plan percé de deux trous :



L'onde primaire sphérique rencontre l'écran, et les deux trous S_1 et S_2 diffractent la lumière dans un cône d'autant plus ouvert que les trous sont petits : on récupère donc le même type d'interférence que dans le cas des deux sources sonores avec les même formes de surface d'intensité fixée et une interfrange ayant la même expression.

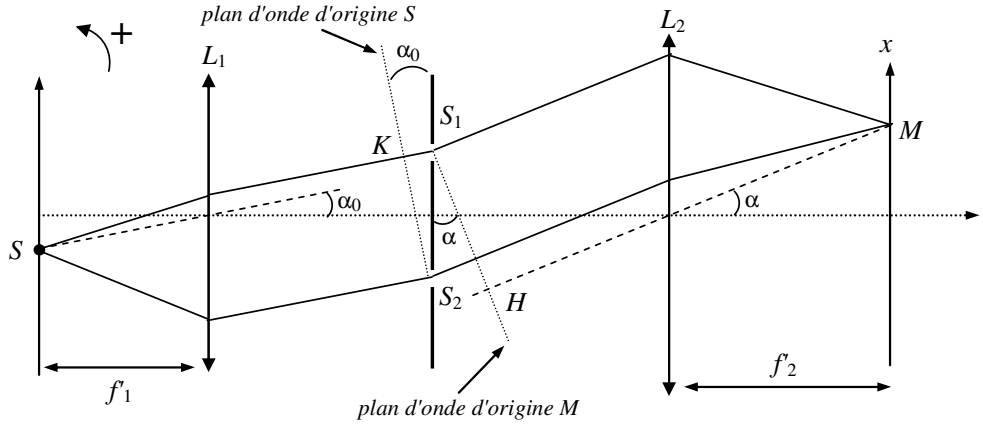
Typiquement pour la lumière $\lambda_0 = 0{,}6$ µm, $D = 1$ m, $a = 1$ mm
l'interfrange vaudra dans ce cas $i = 0{,}6$ mm, et sera donc tout à fait observable.

Remarque 1 : On peut transformer les trous de Young et fentes de Young en leur donnant une dimension notable dans la direction parallèle aux franges (ici ⊥ feuille)

Remarque 2 : On peut avec d'autres interférentiels (par exemple l'interféromètre de MICHELSON), observer dans l'axe des sources secondaires S_1 S_2. Comme les surfaces d'intensité constante sont des hyperboloïdes de révolution d'axe S_1S_2, les "franges" d'interférences seront des anneaux.

Cas de l'observation à l'infini.

On travaille avec un dispositif des fentes de Young en éclairage parallèle, avec observation à l'infini :



La source S est placée au foyer objet de la lentille L_1 (les rayons sont parallèles entre eux après passage dans la lentille), et l'écran d'observation est placé dans le plan focal image de la lentille L_2 (observation des interférences à l'infini).
Dans ce cas, on ne peut pas calculer la différence de chemin optique par simple développement limité, il faut utiliser le *théorème de MALUS* : *Après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, les surfaces d'onde d'une onde issue d'une source ponctuelle sont perpendiculaires aux rayons lumineux.*

Par définition, une surface d'onde est l'ensemble des points de même phase pour l'onde considérée, c'est donc une surface d'*iso chemin optique (SM)* = Cste.
Dans le cas ci-dessus, $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$
On décompose $(SM)_2 = (SS_2) + (S_2H) + (HM)$ et $(SM)_1 = (SK) + (KS_1) + (S_1M)$
Avec le théorème de MALUS : on obtient $(SK) = (SS_2)$ car K et S_2 appartiennent à la même surface d'onde d'origine S (plan $\perp$ rayons) et $(HM) = (S_1M)$ car H et S_1 appartiennent au même plan d'onde d'origine M (avec le principe du retour inverse de la lumière : on place une source ponctuelle en M…).
Donc : $\delta = (S_2H) - (KS_1) = n.S_2H - n.KS_1 = n.a.\sin\alpha - n.a.\sin\alpha_0$ en posant $a = S_1S_2$.

Les lentilles n'ont un stigmatisme approché que dans le cas des *conditions de Gauss* : les rayons lumineux doivent donc être *paraxiaux* : proches de l'axe et peu inclinés par rapport à celui-ci. Les angles α et α_0 sont petits (devant 1), et on pourra assimiler tangente, sinus et angle (développement limité d'ordre 1), on en tire donc $\sin\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{x}{f'_2} \approx \alpha$ soit $\delta \approx n.\left(\dfrac{a.x_M}{f'_2} - a.\sin\alpha_0\right)$.

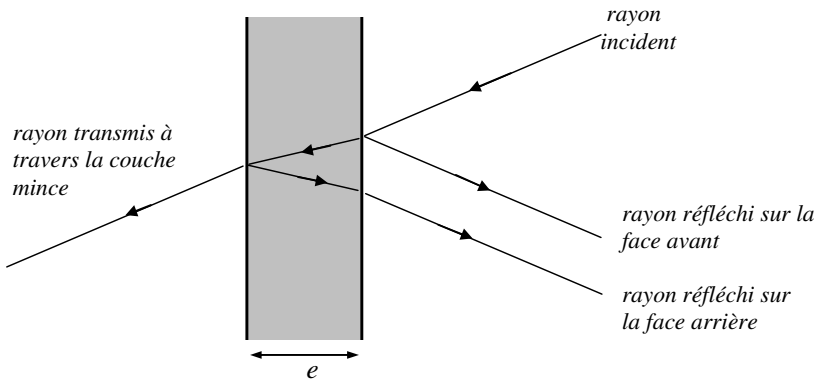
Soit sur l'écran $I = 2.I_0.\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi.n}{\lambda}.\left[\dfrac{a.x_M}{f'_2} - a\sin\alpha_0\right]\right)\right)$

Cas des interférences en couche mince (optique).

Un autre moyen d'observer des interférences est, comme dans le cas de l'interféromètre de MICHELSON, de séparer un rayon lumineux incident en deux rayons lumineux, par exemple en utilisant un dioptre (surface séparant deux milieux d'indices différents). Le rayon incident sera divisé en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

Dans le cas d'une couche mince, par exemple une bulle de savon, on aura deux dioptres séparés par une épaisseur très fine d'eau savonneuse, et on pourra alors observer les interférences produites par les rayons réfléchis, l'un sur le dioptre "avant", l'autre sur le dioptre "arrière" :

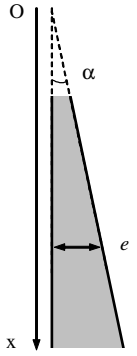
Si on appelle R le coefficient de réflexion en puissance et T celui en transmission, l'intensité du premier rayon réfléchi est $R.I_0$, et celle du second $R.T^2.I_0$. Comme dans le cas de la bulle de savon, le coefficient de transmission est proche de 1, et celui de réflexion petit devant 1, on peut considérer que les deux intensités sont égales.



Les deux rayons émergents vont donc interférer, et leur différence de marche $\delta \approx 2ne$ pour des incidences faibles.

On aura donc une intensité perçue par l'observateur $I = 2.I_0\left(1+\cos\left(2\pi\frac{2ne}{\lambda_0}\right)\right)$

On a donc des longueurs d'onde telles que $2ne = p.\lambda_0$ et on aura un maximum de lumière et des longueurs d'onde pour lesquelles $2ne = (p' + ½).\lambda_0$ pour lesquelles l'intensité sera nulle. On va donc éliminer de la couleur blanche des longueurs d'onde par interférence.



Si l'épaisseur varie sur la couche mince, par exemple selon une loi linéaire en x :

Comme ici : $e = \alpha.x$ où x est la distance à l'épaisseur nulle, on aura une intensité fonction de x, soit pour une lumière monochromatique :

$$I = 2.I_0\left(1+\cos\left(2\pi\frac{2n\alpha}{\lambda_0}.x\right)\right)$$

On perçoit donc des franges parallèles au "coin" dont l'interfrange vaut $i = \lambda_0/(2n\alpha)$.

Pour un éclairage en lumière blanche, l'observateur perçoit des franges colorées fonction de l'épaisseur de la couche mince (teintes de NEWTON), puis un brouillage si l'épaisseur est trop grande (blanc "sale").

Les franges perçues sont donc d'"*égale épaisseur*".