

---

# Relativité restreinte

Comment expliquer qu'un muon ayant un temps de vie\* de  $2,2 \mu\text{s}$  et se formant à environ 10 km d'altitude puisse être détecté à la surface terrestre par le cosmodétecteur ? En effet, si on fait un simple calcul, en considérant que ce muon se déplace à la vitesse de la lumière, il ne devrait parcourir que 660 m ! Comment expliquer cette différence ? Doit-on considérer que le muon se déplace à une vitesse supérieure à celle de la lumière ?

Les réponses à ces questions nécessitent une nouvelle manière d'appréhender la notion d'espace et de temps et une nouvelle manière de décrire les mouvements des corps ; un nouveau cadre théorique est donc nécessaire : celui-ci a été élaboré par Einstein en 1905, et prendra le nom de relativité restreinte.

## i. Les insuffisances de la mécanique classique non relativiste

Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, J. C. MAXWELL (1831-1879) établit les équations régissant le comportement du champ électrique  $E$  et du champ magnétique  $B$  ainsi que le lien entre ces deux champs. H. R. HERTZ (1857-1894), en 1887, démontre que la lumière n'est rien d'autre qu'une onde électromagnétique et est donc régie par les équations de MAXWELL. Au XIXe siècle, toutes les ondes connues (ondes sonores, ondes sismiques etc.) avaient besoin d'un milieu matériel pour se propager, la question qui se posait alors était de savoir dans quel milieu se propageait la lumière.

L'hypothèse de l'existence d'un milieu appelé « éther » – du nom du cinquième élément de la théorie défendue par ARISTOTE – dans lequel la lumière se propagerait, fit un large consensus dans la communauté scientifique de l'époque : il ne restait plus qu'à mettre en évidence ce milieu.

### *Expérience de MICHELSON et MORLEY*

Dans la vie courante, si une personne A se déplace à une vitesse  $v$  par rapport au référentiel terrestre, et une personne B à une vitesse  $v'$  par rapport à A, B aura alors une vitesse  $v + v'$  par rapport à la Terre. C'est à partir de ce principe bien établi depuis GALILEE qu'A. A. MICHELSON (1852-1931) et E. W. MORLEY (1838-1923) vont mettre au point une expérience d'interférométrie<sup>1</sup> pour mettre en évidence le mouvement relatif de la Terre par rapport à l'éther. Ils devaient observer un très léger déplacement des franges d'interférence lorsqu'ils tournaient les bras de l'interféromètre. Leurs résultats, malgré de notables progrès dans la précision des mesures au cours des différentes tentatives, ne permit pas de mettre en évidence ce mouvement : l'hypothèse de l'éther sembla alors discutable et les résultats de MICHELSON et MORLEY sont inexplicables dans le cadre théorique de l'époque.

Les physiciens F. FITZGERALD (1851-1901), H. A. LORENTZ (1853-1928) et H. POINCARÉ tentèrent d'expliquer les résultats de MICHELSON et MORLEY à l'aide de prothèses conceptuelles et d'artifices mathématiques : il fallait sauver l'éther – la lumière se propage nécessairement dans un milieu – et suivant les cadres de la cinématique galiléenne!

Un autre problème existait puisque la propagation de la lumière n'était pas compatible avec la cinématique galiléenne : les équations de MAXWELL n'étaient pas invariantes par changement de référentiel galiléen. En effet, une force de type mécanique est invariante et a donc la même forme lorsqu'on l'exprime dans un référentiel galiléen A ou dans un référentiel galiléen B en mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v$  par rapport à A : la force de gravitation sera la même et aura la même valeur dans le référentiel A ou le référentiel B puisque l'expression de la force de gravitation ne dépend pas de la vitesse de déplacement de

---

<sup>1</sup> Voir par exemple : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Expérience\\_de\\_Michelson-Morley](http://fr.wikipedia.org/wiki/Expérience_de_Michelson-Morley)

la particule considérée. Mais, si l'on considère la force de LORENTZ – que l'on déduit des équations de MAXWELL – qui s'applique à une particule baignant dans un champ électromagnétique, cette force sera différente si on l'exprime dans le référentiel A ou dans le référentiel B. On a dans le référentiel A pour une particule P de charge  $q$  et de vitesse  $\mathbf{v}'$  plongée dans un champ électrique  $\mathbf{E}$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}$  :  $\mathbf{F}_{\text{part}}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}'\times\mathbf{B})$  et dans le référentiel B :  $\mathbf{F}'_{\text{part}}=q(\mathbf{E}+(\mathbf{v}'+\mathbf{v})\times\mathbf{B})$ . Ainsi :  $\mathbf{F}_{\text{part}} \neq \mathbf{F}'_{\text{part}}$ .

## ii. 1905 : la solution proposée par EINSTEIN ou la naissance de la relativité restreinte

En 1905, un jeune inconnu A. EINSTEIN, employé par le bureau des brevets de Genève, va bouleverser les concepts antérieurs d'espace et de temps. Il part alors de l'interrogation suivante : que se passe-t-il si je me déplace à la vitesse de la lumière? Un autre problème dérange profondément EINSTEIN : la non invariance des équations de MAXWELL par changement de référentiel galiléen en cinématique galiléenne. Celui-ci va répondre à ces deux difficultés par l'article fondateur de la théorie de la relativité restreinte publiée en 1905 dans la revue *Annalen der Physik*. Dans cet article, EINSTEIN montre que pour assurer l'invariance des équations de MAXWELL par changement de référentiel galiléen (et par là-même de la force de LORENTZ), il fallait considérer que la lumière se propage dans le vide – exit l'éther – et que la vitesse de la lumière dans le vide reste égale à  $c$  et est indépassable quelque soit le référentiel galiléen considéré : la loi d'additivité des vitesses n'existe pas pour la lumière dans le vide ! Ainsi si l'on prend nos deux référentiels considérés au paragraphe précédent, la vitesse de la lumière sera égale à  $c$  dans ces deux référentiels. Maintenant, si on a une particule P donnée de vitesse  $v$  dans le référentiel A, pour obtenir la vitesse  $v'$  de cette particule dans le référentiel B, il ne faut plus utiliser la transformation de GALILEE mais la transformation de LORENTZ<sup>2</sup>.

## iii. Quelques conséquences de la relativité restreinte

Les notions d'espace et de temps sont maintenant totalement imbriquées (comme le montre la transformation de LORENTZ), le temps et les variables d'espace sont interdépendantes : on parle d'espace-temps. La notion de causalité est elle aussi, totalement bouleversée.

<sup>2</sup> Considérons deux référentiels galiléen A et B se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse  $v$  selon l'axe des  $x$ .

Soit  $x, y, z, t$  les coordonnées d'espace-temps d'une particule dans A, si l'on veut exprimer les coordonnées  $x', y', z', t'$  de cette même particule dans le référentiel B, alors on a d'après la transformation de Galilée :

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t\end{aligned}$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, la transformation est différente (même si elle est une transformation limite dans le cas des vitesses faibles de la transformation galiléenne), on a alors d'après la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)\end{aligned}\quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ et } \beta = \frac{v}{c}$$

Si l'on considère le diagramme ci-dessous, construit dans un référentiel donné à un temps donné ; on a, à l'intersection des axes, la particule étudiée. Ce qui est à l'intérieur du cône et au-dessus de l'intersection des deux axes est l'avenir de la particule et ce qui se trouve à l'intérieur du cône et au-dessous de l'intersection est le passé de la particule. Le reste de l'espace n'a aucun lien et ne peut avoir aucun lien avec l'avenir ou le passé de la particule étudiée, tout simplement parce que la particule ne peut pas avoir une vitesse supérieure à celle de la lumière ce qui borne l'avenir et le passé de celle-ci. Ainsi, les lignes formant le cône représentent les trajectoires limites possibles de la particule dans le cas où celle-ci se déplacerait à la vitesse de la lumière  $c$ .

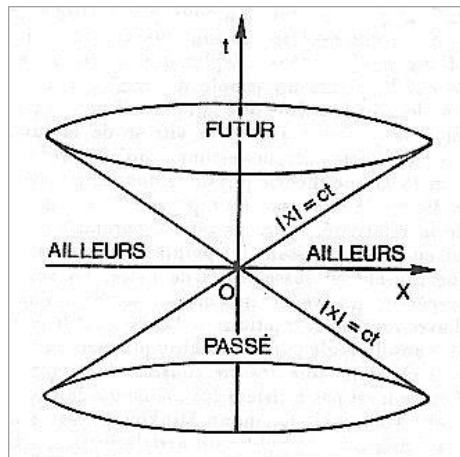
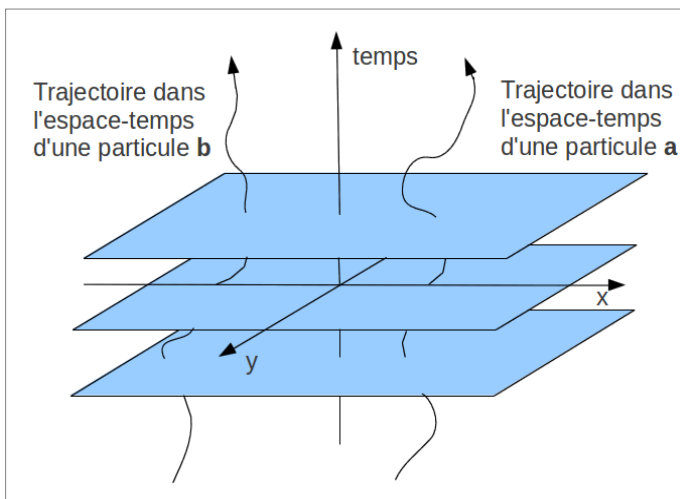
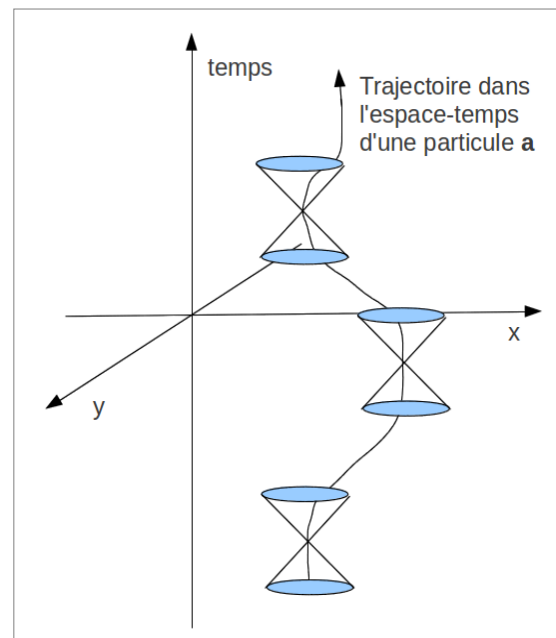


Diagramme d'espace-temps à deux dimensions d'espace et une de temps. Crédit : CERN.

On peut alors comparer la description du mouvement dans une description galiléenne (A) et dans une conception relativiste (B).



(A)



(B)

Description d'une trajectoire d'une particule dans une description galiléenne (A) et dans une description relativiste (B). Crédit : J.-C. Pelhate.

Dans la description galiléenne (ou newtonienne), on peut représenter les plans d'espace superposés les uns sur les autres à des intervalles de temps égaux : cela signifie que quel que soit l'endroit où l'on se trouve, le temps est le même pour toutes les particules et l'ensemble de ces particules ne sont pas limitées dans leur avenir ou même leur passé. Dans la description relativiste, il en va tout autrement, à chaque instant et à chaque position de la particule, on a un cône qui définit le passé et l'avenir de la particule : ce qui est arrivé précédemment à la particule est nécessairement dans la partie inférieure du cône et ce qui va lui arriver nécessairement dans la partie supérieure du cône.

#### iv. Dilatation des durées

Une autre conséquence importante de la relativité restreinte est ce que l'on appelle la dilatation des durées. On considère l'expérience de pensée suivante : un train se déplace à une vitesse constante  $v$  sur des rails horizontaux et droits. À l'intérieur d'un wagon de ce train, sur le sol, est placé un générateur de flash lumineux et à la verticale de cet appareil, sur le plafond du wagon, est placé un miroir. Quel est le temps de parcours du flash lumineux pour faire l'aller-retour « sol-plafond » du wagon ?

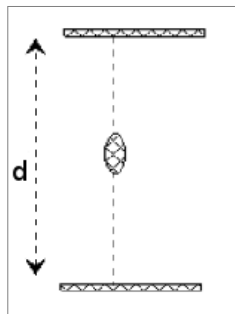


Schéma de la trajectoire du rayon lumineux dans le référentiel du wagon. Crédit : CERN.

D'après le postulat d'EINSTEIN, le flash lumineux aura la même vitesse  $c$  si l'on considère le référentiel lié au wagon ou le référentiel terrestre. Déterminons, tout d'abord, le temps de l'aller-retour dans le référentiel lié au wagon. Dans ce cas, si on appelle  $\tau$  le temps de parcours dans ce référentiel et  $d$  la hauteur du wagon, on a :  $\tau = \frac{2d}{c}$ .

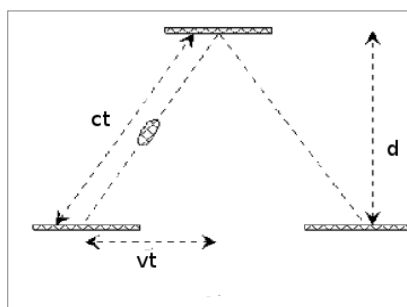


Schéma de la trajectoire du rayon lumineux dans le référentiel terrestre. Crédit : CERN.

Dans le référentiel terrestre, on appelle  $\Delta t$  le temps de l'aller-retour. Si on applique le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\left(\frac{v \cdot \Delta t}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{c \cdot \Delta t}{2}\right)^2$$

Soit  $\Delta t = \frac{2d}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \tau$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

---

On constate que  $\tau \neq \Delta t$  et que  $\Delta t = \gamma \tau$  : le temps que le flash met pour faire l'aller-retour est différent selon le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.

Cette relation est aussi valable lorsque l'on étudie une particule se déplaçant à une vitesse  $v$  dans un référentiel galiléen A. Dans ce cas,  $\tau$  est appelé le temps propre de la particule, c'est-à-dire le temps qui s'écoule dans le référentiel où la particule est au repos (appelé référentiel propre) et  $\Delta t$  est le temps qui s'écoule dans le référentiel A. Ainsi, si on a une particule qui se déplace à une vitesse  $v$  proche de  $c$ , on a  $\gamma \gg 1$  et  $\Delta t \gg \tau$  et si notre particule a une vitesse  $v$  proche de zéro,  $\gamma \approx 1$  donc  $\Delta t \approx \tau$  (dans ce cas, on peut considérer la transformation de GALILEE comme valable, c'est ce que l'on fait tous les jours dans la vie courante).

## v. Retour sur le temps de vie du muon

### Etude du déplacement du muon dans le cadre non relativiste

Le muon a un temps de vie moyen d'environ  $2,2 \mu\text{s}$ . Si celui-ci se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière alors la distance qu'il est capable de parcourir durant ce temps de vie sera de :  $d = 2,2 \times 10^{-6} \times 3 \cdot 10^8 \text{ m}$ , soit une distance d'environ 660 m. Or les muons sont produits dans la haute atmosphère (15-20 km d'altitude), donc d'après le calcul précédent, peu d'entre eux devraient atteindre le sol.

En effet, supposons que les muons sont produits à une altitude d'environ 15 km au-dessus du sol. Si on considère qu'ils se déplacent à la vitesse de la lumière alors le temps nécessaire pour parcourir les 15 km serait de :

$$t = x/c$$
$$t = (15 \times 10^3) / (3 \times 10^8)$$

i.e.  $t = 5 \times 10^{-5} \text{ s}$ .

Or le temps de vie moyen du muon est  $\tau = 2,2 \times 10^{-6} \text{ s}$ , on peut calculer le taux de muons créés à 15 km d'altitude et arrivant au niveau du sol :

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{5 \cdot 10^{-5}}{2,2 \cdot 10^{-6}}}$$
$$\frac{N}{N_0} = 1,3 \cdot 10^{-10}$$

On en déduit que presque aucun muon n'est attendu au niveau du sol. Expérimentalement, on mesure cependant que l'intensité de muons au sol est de 1 par  $\text{cm}^2$  par minute. Le seul moyen d'expliquer cette intensité de muons au sol est d'étudier le déplacement du muon dans le cadre relativiste.

### Etude du déplacement du muon dans le cadre relativiste

Les physiciens des particules travaillent le plus souvent avec l'énergie d'une particule plutôt qu'avec la vitesse d'une particule. D'après la théorie de la relativité restreinte, il existe une relation liant l'énergie  $E$  à la masse  $m$  pour une particule au repos (ou dans son référentiel propre, ce qui revient au même). On a dans ce cas,  $E = mc^2$ , une équivalence masse-énergie (d'ailleurs les scientifiques n'utilisent jamais le kg pour parler de la masse d'une particule mais d'eV et ses multiples keV, MeV, GeV voire TeV).

Dans le cas d'un référentiel où la particule étudiée a une vitesse  $v$ , l'énergie de la particule est  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  avec  $p$  la quantité de mouvement relativiste de la particule

---

donnée par la relation  $p = \gamma mv$ . On démontre que cette équation peut-être écrite de la façon suivante :  $E = \gamma mc^2$  soit  $\gamma = E/mc^2$ .

Ainsi, si on considère des muons à 20 GeV, nous pouvons déterminer  $\gamma$ . L'énergie d'un muon au repos est de 106 MeV :

$$\begin{aligned}\gamma &= 20\text{GeV}/106\text{MeV} \\ \gamma &= (20 \cdot 10^9)/(106 \cdot 10^6) \\ \gamma &= 189\end{aligned}$$

Le temps de vie moyen mesuré dans le référentiel lié au sol devient alors  $189 \times 2,2 \times 10^{-6}$ s. On peut alors calculer maintenant le taux de muons atteignant le sol :

$$\begin{aligned}\frac{N}{N_0} &= e^{-\frac{5 \cdot 10^{-5}}{189 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}}} \\ \frac{N}{N_0} &= 0,89\end{aligned}$$

On en déduit qu'une partie significative des muons créés dans la haute atmosphère atteindront le niveau du sol. Cette prédiction est en accord avec les mesures expérimentales<sup>3</sup>.

### **Bibliographie**

- M. Boratav & R. Kerner, *Relativité*, Ellipses, 1991  
J. H. Smith, *Introduction à la relativité*, InterEditions, Paris, 1979  
Arnold Wolfendale, *Cosmic Rays*, Newnes, 1963

---

3 Voir l'expérience effectuée sur le Mont Wilson en 1962.

