Le comptage pour le PM situé en bas est plus élevé que celui pour le PM situé en haut : l'origine céleste des muons a été mise en évidence.

4. Introduction expérimentale à la mesure

a. Erreur

i. Introduction générale

On peut définir l'erreur* de mesure notée ER sur une grandeur* physique X comme « la différence entre une valeur mesurée ou calculée x et la valeur vraie X_{vrai}[38] » soit $ER = x - X_{vrai}$. Dans la très grande majorité des cas, on ne connaît pas la valeur vraie ; sinon, il n'y aurait aucune raison d'en effectuer une mesure[39]. La valeur vraie est une construction théorique que l'on peut connaître de manière approximative soit grâce aux mesures antérieures soit grâce à des prédictions théoriques. En effet, un résultat de mesure[40] n'est jamais une valeur : il est donné sous la forme d'un intervalle de valeurs « probables » du mesurande*[41]. C'est pour cela qu'à un résultat de mesure, on associe une incertitude[42] de mesure qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande.
On peut globalement distinguer deux types d'erreurs : les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires.

(A) Les erreurs systématiques

Les erreurs systématiques notées ERs sont des erreurs constantes (ou à variations lentes). Pour un mesurande donné, elles introduisent systématiquement le même décalage. On a alors $ERs = (\hat{X} - X_{vrai})$ avec $\hat{X}$ le meilleur estimateur de la valeur de la mesurande. Leur origine provient généralement d'un dispositif inadapté ou mal utilisé. Un examen attentif de la chaîne de mesure permet de les réduire. Cependant, il est souvent difficile de les détecter. Pour les mettre en évidence, il faut effectuer deux séries de mesurage*[43] du même mesurande avec deux dispositifs différents faisant si possible appel à des méthodes différentes.
La réduction des erreurs systématiques passe souvent par le réétalonnage du capteur ou par le choix d'un capteur ou d'une méthode de mesure plus adaptée. Si l'erreur systématique* est connue, on peut s'en affranchir en post-traitement. Lors de la suite de cet exposé, nous ne traiterons pas des erreurs systématiques, on les considérera comme traitées par ailleurs.

---

[38] La valeur vraie (X_{vrai}) du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait.
[39] Le mot « mesure » a, dans la langue française courante, plusieurs significations. Aussi n'est-il pas employé seul dans le présent Vocabulaire. C'est également la raison pour laquelle le mot « mesurage » a été introduit pour qualifier l'action de mesurer. Le mot « mesure » intervient cependant à de nombreuses reprises pour former des termes de ce Vocabulaire, suivant en cela l'usage courant et sans ambiguïté. On peut citer, par exemple : instrument de mesure, appareil de mesure, unité de mesure, méthode de mesure. Cela ne signifie pas que l'utilisation du mot « mesurage » au lieu de « mesure » pour ces termes ne soit pas admissible si l'on y trouve quelque avantage.
[40] Le résultat de mesure est l'ensemble des valeurs attribuées à un mesurande.
[41] Grandeur que l'on veut mesurer.
[42] Dans le langage courant, le terme incertitude est lié au doute. Dans le langage scientifique, l'incertitude de mesure définit un intervalle de valeurs « probables » d'une grandeur et cet intervalle est associé à un niveau de confiance (voir partie erreur statistique). Il est fait de même pour les erreurs systématiques que l'on suppose gaussienne et donc on leur associe aussi un niveau de confiance.
[43] Ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.

(B) Les erreurs aléatoires

Les erreurs aléatoires sont les fluctuations des observations qui conduisent à des résultats différents d'une expérience à une autre. On ne peut pas connaître la valeur ni même le signe (supérieure ou inférieure à la valeur vraie) de l'erreur aléatoire notée ER_a même si son origine est connue. Ainsi, lors de chaque mesure, l'erreur aléatoire peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné qui dépend de notre chaîne de mesure. On a alors : $ERa = x_i - \hat{X}$ avec x_i une mesure particulière de l'ensemble N des mesures effectuées et $\hat{X}$ le meilleur estimateur de la valeur de la mesurande. Comme on le verra un peu plus tard, la plupart du temps, le meilleur estimateur du mesurande est la valeur moyenne x des N mesures, soit : $ERa = x_i - \bar{x}$.
Ces erreurs aléatoires sont essentiellement dues :

- aux caractéristiques intrinsèques de la chaîne de mesure ;
- aux signaux parasites d'origine électrique ou thermique.

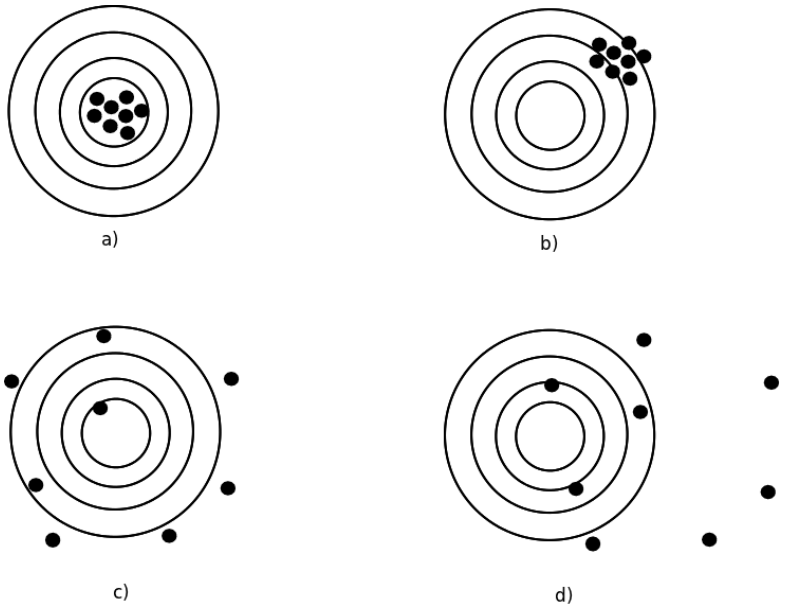
Ces perturbations sur la mesure proviennent de l'électronique associée au capteur et à la chaîne de mesure. Mais aussi des grandeurs d'influence[44] que l'on ne mesure pas de façon précise ; ainsi, leurs variations rapides ne sont pas complètement prises en compte dans les caractéristiques ou leur compensation est partiellement incorrecte.
Il est souvent assez difficile d'évaluer les valeurs des erreurs aléatoires[45] ou même leur ordre de grandeur : on fait appel alors à une approche statistique (ce que l'on fera par la suite dans cet exposé).

(C) Notion justesse* et de fidélité*

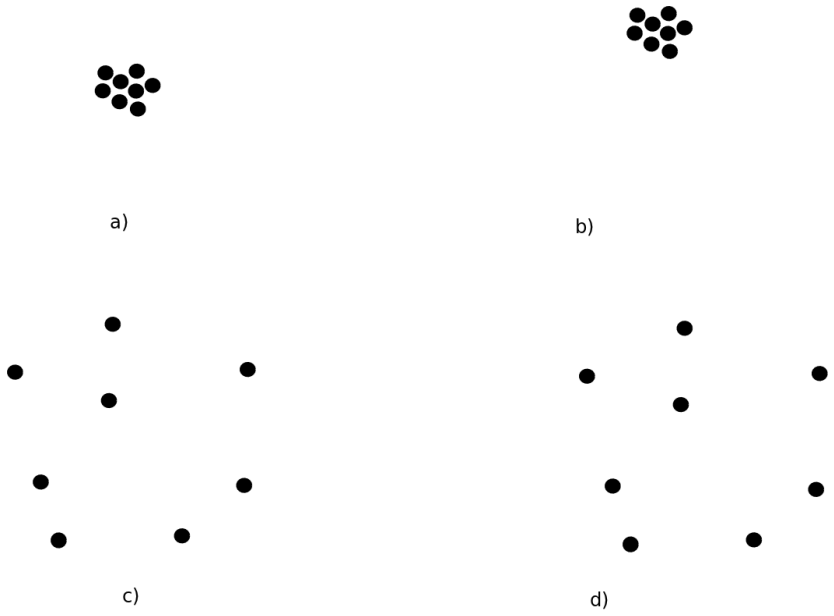
La justesse donne le degré de concordance entre le résultat obtenu et la valeur vraie alors que la fidélité indique le degré de concordance entre les résultats d'une série de mesures d'une même quantité. La justesse exprime alors le fait qu'une mesure est ou non correcte et la fidélité si elle est reproductible.
La fidélité s'évalue simplement en répétant les mesures, elle est donc associée aux erreurs aléatoires. La fidélité d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des indications très voisines lors de l'application répétée du même mesurande dans les mêmes conditions. Un instrument est d'autant plus fidèle que l'erreur aléatoire qui lui est associée faible.

Analogie avec une cible

[44] Une grandeur d'influence est une grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur la valeur mesurée
[45] La réduction des erreurs aléatoires passe par l'amélioration des composantes de la chaîne de mesure et par la protection de cette chaîne (suspension antivibratoire, blindage électromagnétique, stabilisation des grandeurs d'influence). Toutes ces opérations de réduction des erreurs de mesure ont un coût (matériel, temps passé, monétaire…)



Sur le schéma précédent, on considère que la valeur vraie se situe au centre de la cible.
(a) Comme l'ensemble des tirs (mesures) sont proches les unes des autres, on peut dire que la composante aléatoire de l'erreur est faible. De plus, la distribution des tirs est centrée sur le centre de la cible, la composante systématique de l'erreur est très faible.
(b) L'erreur aléatoire est toujours faible mais l'erreur systématique est beaucoup plus importante – les tirs sont systématiquement « décentrés » vers la droite.
(c) Dans ce cas, l'erreur aléatoire est large, mais l'erreur systématique est faible – les tirs sont très étalés mais pas systématiquement « décentrés ».
(d) Ici, à la fois l'erreur aléatoire et l'erreur systématique sont importantes.
Le problème est que l'on ne connaît pas la valeur vraie donc on ne sait pas où se trouve le centre de la cible. La situation lorsque l'on fait une mesure est plutôt la suivante :



On voit alors qu'il est assez simple[46] de prendre en compte l'erreur aléatoire (il suffit d'estimer la dispersion des points) mais que l'erreur systématique est beaucoup plus délicate à

[46] À condition de faire plusieurs mesures dans des conditions de reproductibilité

évaluer (comment savoir si c'est la situation a) ou b) qui correspond à la « bonne » mesure ou le cas c) ou d)) : sans référence ou sans mesure effectué avec une autre technique, il est impossible de déterminer cette erreur systématique.

Remarque : dans les expériences, l'accumulation de prise de données ne change pas la nature de l'erreur aléatoire mais permet un traitement qui rend souvent l'erreur aléatoire négligeable devant les erreurs systématiques. Dans le cas du cosmodétecteur, il peut être intéressant d'évaluer le temps de comptage au-delà duquel ces erreurs deviennent faibles et donc de s'intéresser aux possibles erreurs systématiques.

(D) Retour sur l'erreur de mesure $ER = x - X_{vrai}$

Si on reprend les définitions et les notations précédentes, on obtient

$$ER = x - X_{vrai} = (x - \hat{X}) + (\hat{X} - X_{vrai}) = ERa + ERs$$

Lors d'une mesure, la valeur de l'erreur *ER* est toujours inconnue. Dans tous les cas, il faudra rechercher un encadrement des valeurs « probables » de l'erreur *ER*. Cet encadrement sera appelé intervalle de confiance de la valeur de l'erreur *ER* et il devra être associé à un niveau de confiance.

On peut schématiser cela avec le diagramme suivant :

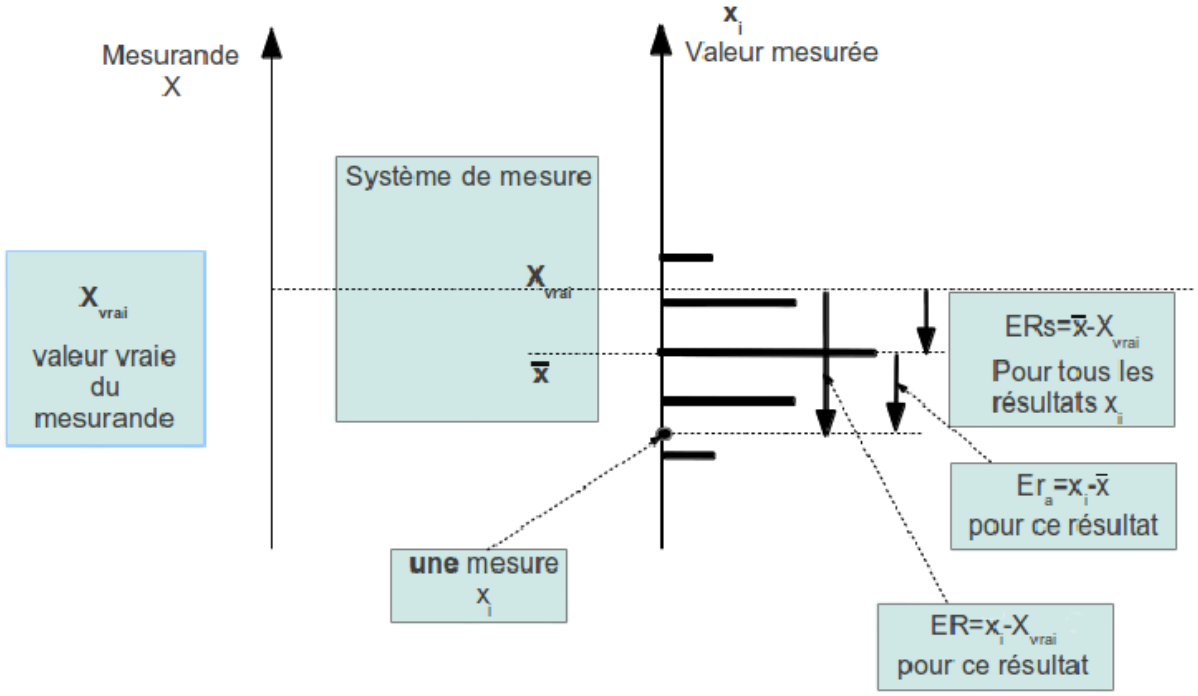


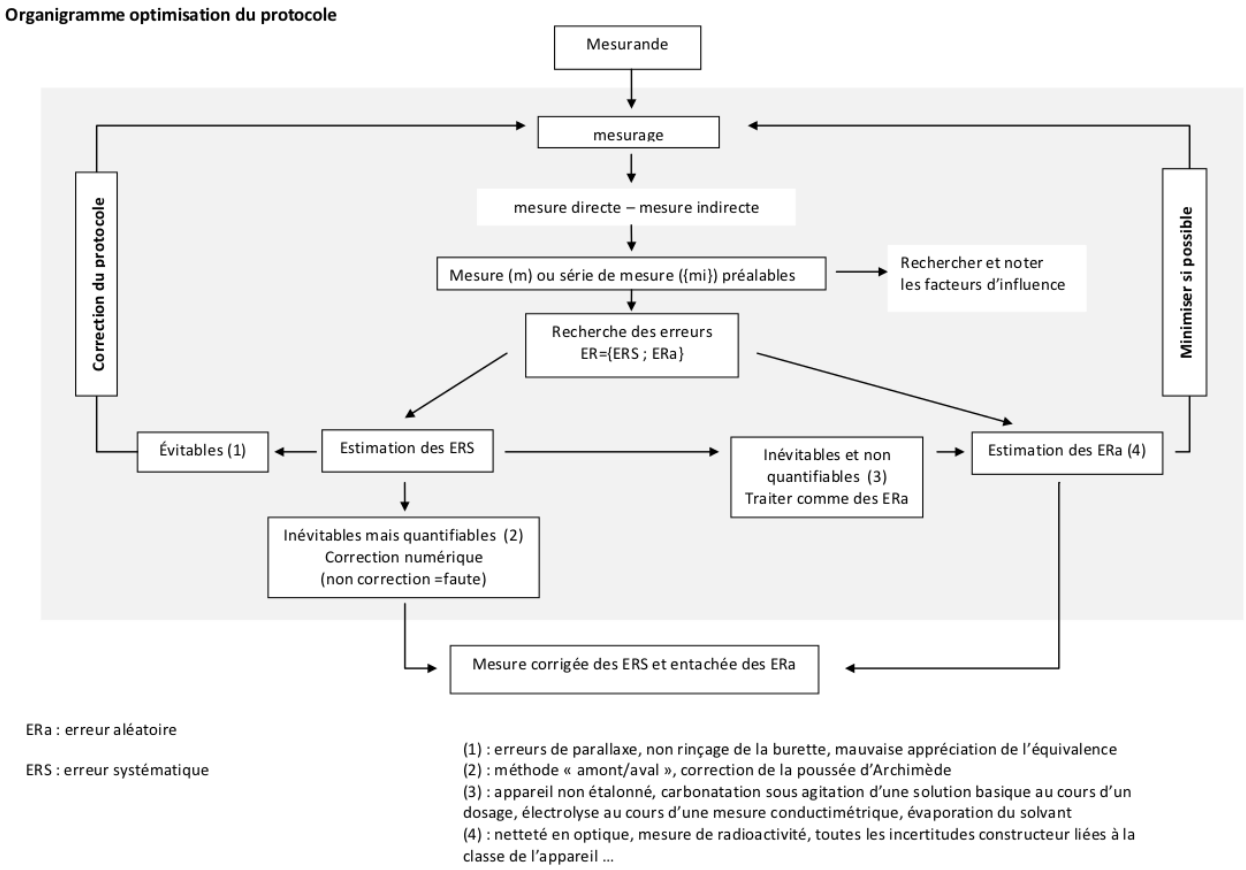
Schéma représentant l'erreur systématique *ERs* et l'erreur aléatoire *ERa*
D'après A. Bernard et J.-L. Vidal, Lycée des Catalins,Montélimar

On peut alors faire les remarques suivantes :
– le système de mesure contient tout ce qui est nécessaire pour obtenir une mesure x_i de la valeur du mesurande *X* (un nombre et une unité);
– on présente le mesurande X_{vrai} à l'entrée du processus de mesure et on réalise *N* mesures

x_i dans les conditions de répétabilité[47];
– si le mesurage était parfait, toutes les mesures auraient la même valeur $x_i = X_{vrai}$;
– un mesurage n'est jamais parfait et il y a toujours une erreur de mesure
$ER = (x_i - X_{vrai})$ dont on ne peut connaître que l'intervalle d'incertitude ;
– tous les résultats sont dispersés autour de la valeur moyenne $\bar{x}$[48] des N mesures :
chaque valeur mesurée xi est affectée par une erreur aléatoire $ERa = (x_i - \bar{x})$;
– souvent, tous les résultats sont « décalés » de la même quantité $Rs = (\bar{x} - X_{vrai})$, erreur systématique de mesurage ;
– dans tous les cas, l'erreur de mesure est $ER = ERs + ERa$.

(E) Optimisation du protocole

Un des travaux essentiel de l'expérimentateur est l'optimisation du protocole expérimental dans le but de diminuer autant que faire se peut les erreurs aléatoires et les erreurs systématiques. On peut résumer le travail de celui-ci à l'aide de l'organigramme de la figure suivante.



Organigramme d'optimisation du protocole. D'après le GRIESP.

[47] Le même opérateur, ou le même programme, effectue N mesures, avec le même instrument, exactement dans les mêmes conditions.
[48] On considère dans ce cas que la valeur moyenne est le meilleur estimateur.

ii. Expérience réalisée avec le cosmodétecteur

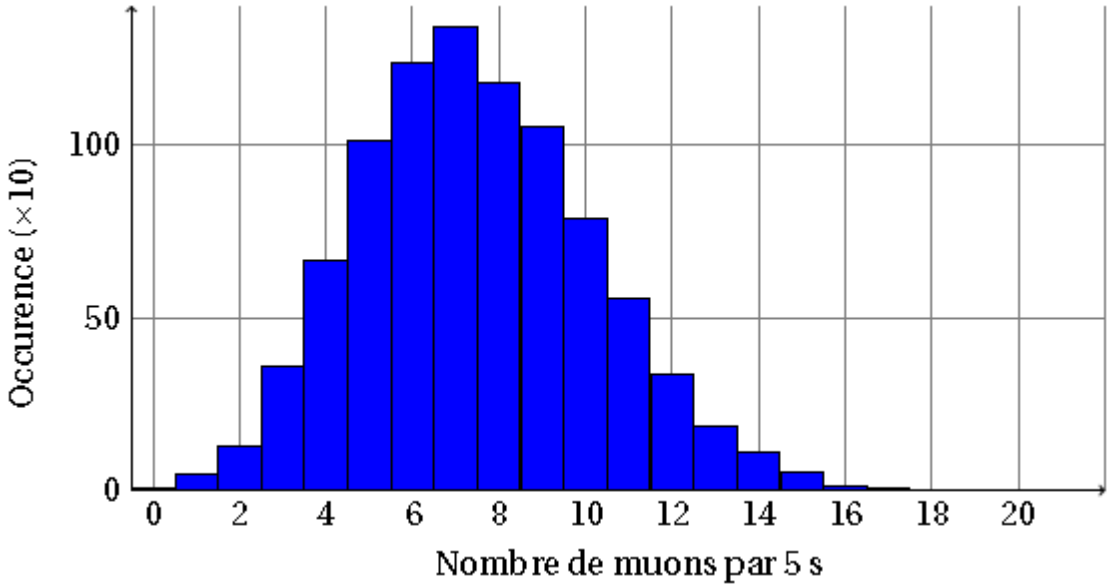
(A) Présentation de l'expérience

Une expérience de comptage des muons a été effectuée toute une nuit pendant 13 h. L'objectif était de déterminer le nombre de muons détectés par le cosmodétecteur par seconde. L'appareil était réglé par défaut et comptait les muons par intervalle de temps de 5 s. Cela revenait donc à faire l'expérience de comptage 9 060 fois.

(B) Présentation des résultats

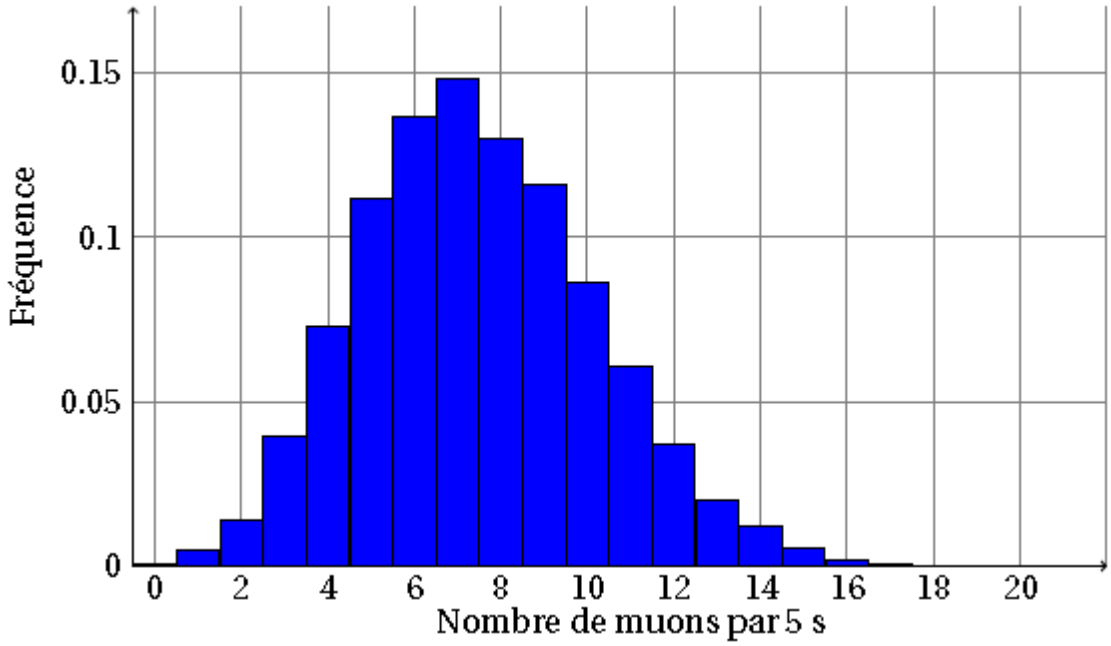
Première représentation

Si l'on appelle x_i le résultat d'une mesure c'est-à-dire le «nombre de muons par intervalle de 5 s », k_i le nombre de fois où la mesure x_i a été obtenue et N le nombre total d'expériences réalisées, on obtient l'histogramme suivant représentant k_i en fonction de x_i :



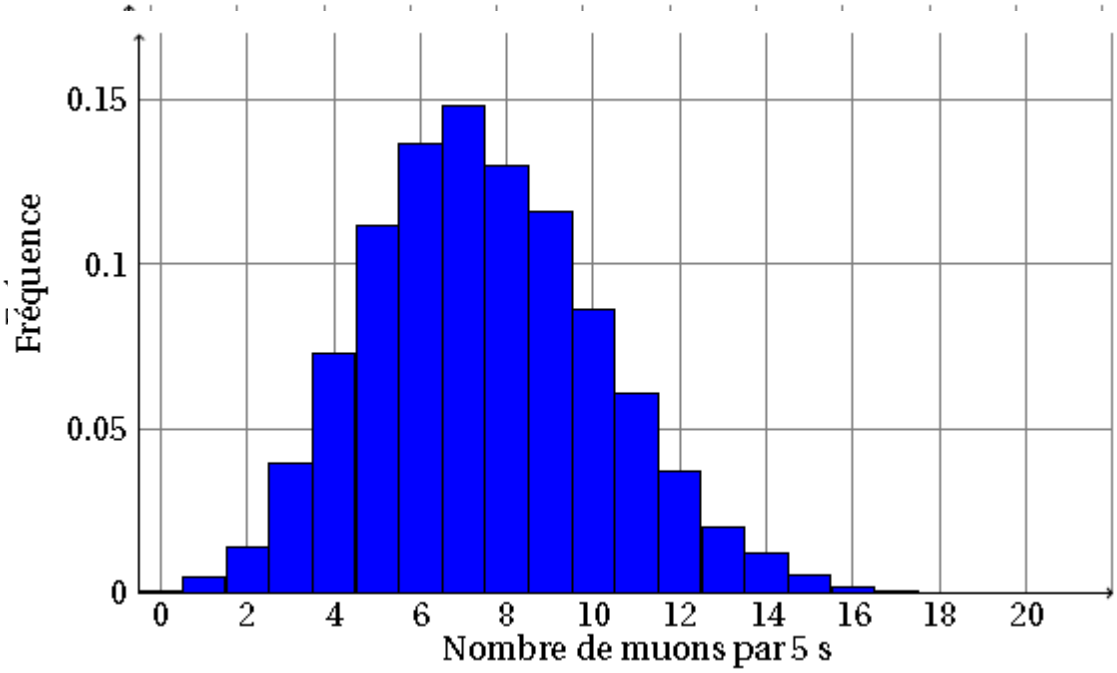
Histogramme représentant le nombre de comptage k_i en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 5 s.

En statistique, on travaille plutôt avec les fréquences $f(i) = k_i/N$. Si on représente alors les fréquences $f(i)$ en fonction de x_i, on obtient :



Histogramme représentant la fréquence f_i des comptages en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 5s

On montrera plus tard que cet histogramme des fréquences peut être ajusté par une courbe disymétrique de Poisson. On a alors :

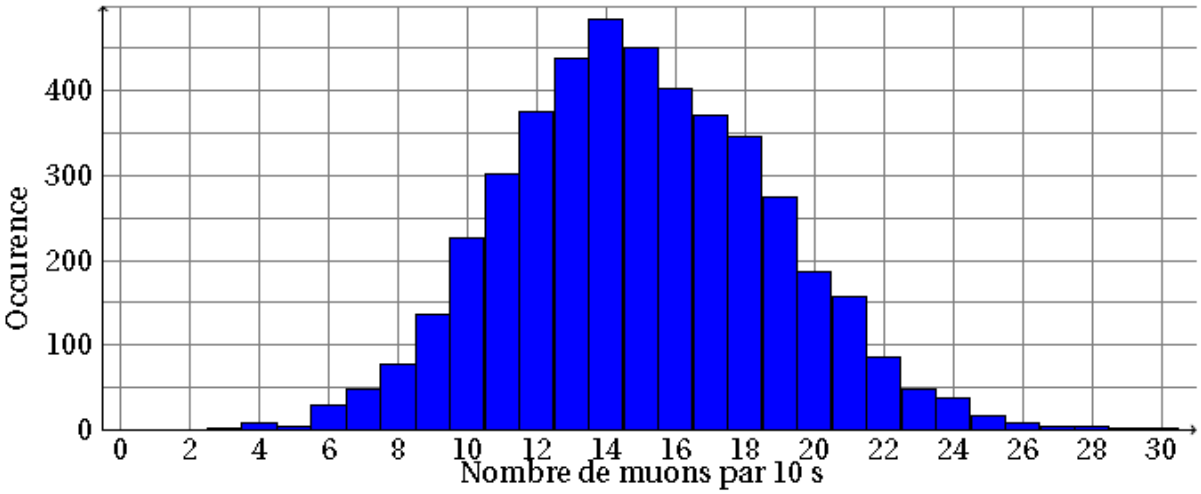


Histogramme représentant la fréquence f_i des comptages en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 5s et courbe de Poisson ajustée.

Les résultats sont dispersés de façon disymétrique : les résultats qui suivent une courbe de Poisson sont plus complexe à traiter en ce qui concerne les incertitudes.

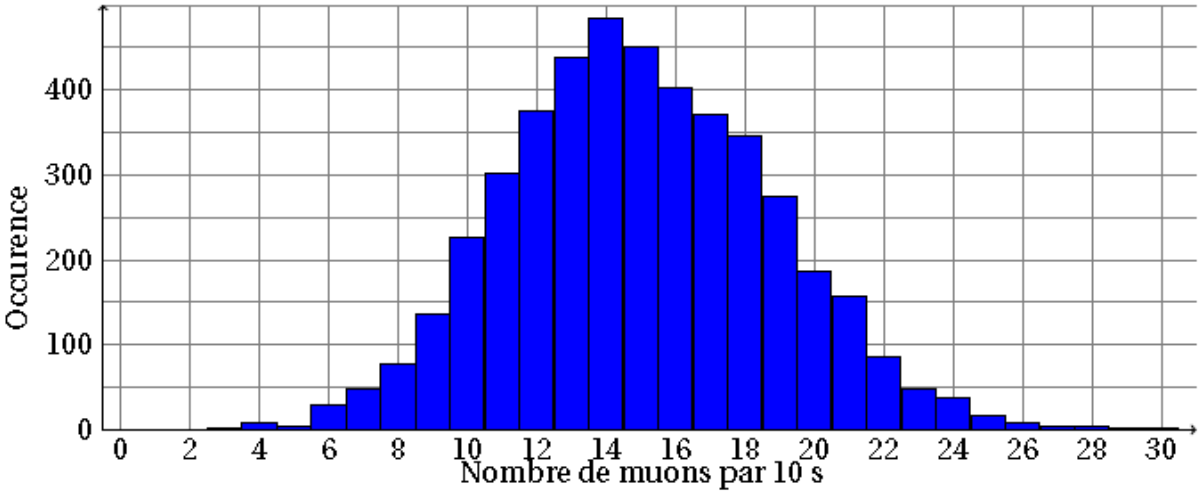
Seconde représentation

Sans toucher aux données et à l'information contenue dans ces données, en changeant juste le mode de représentation pour que le traitement soit plus aisé, on va regrouper les expériences de comptage par deux. Ainsi, au lieu d'avoir 9060 expériences de 5 s, cela reviendra à avoir 4 530 expériences de 10 s. En effectuant ce regroupement, on a alors x_i' qui représente le résultat d'une mesure (d'un comptage) mais pendant un intervalle de 10 s, N' est le nombre d'expériences (ici 9060/2) et k_i' le nombre de fois où la mesure x_i a été obtenue, on obtient l'histogramme suivant:



Histogramme représentant le nombre de comptages k_i' en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 10 s.

Si on note $f'(i) = k_i'/N'$ la fréquence du résultat x_i'. Si on représente cette fréquence $f'(i)$ en fonction de k_i', on montrera plus tard que cet histogramme des fréquences peut être ajusté par une courbe symétrique de Gauss. On a alors :



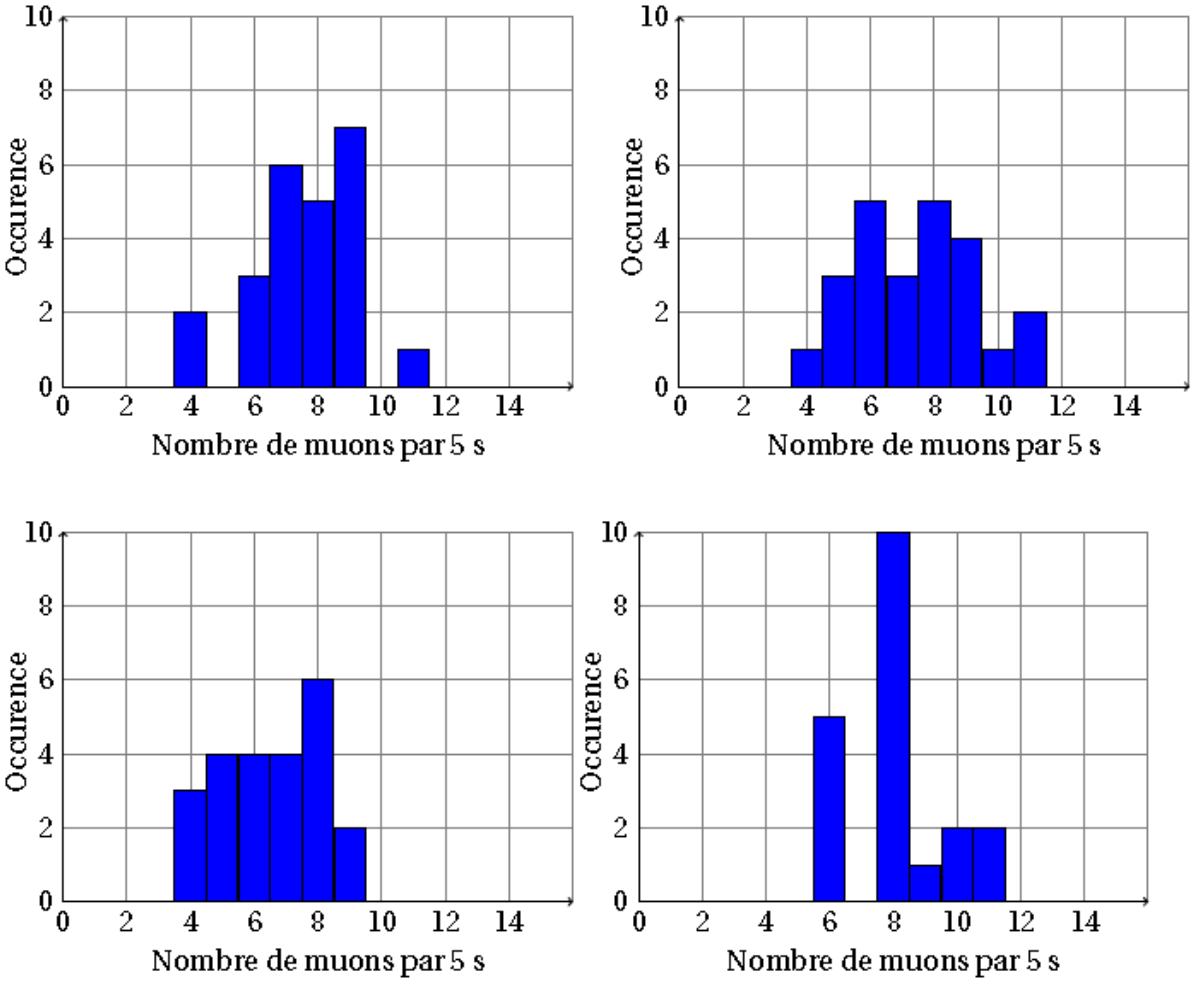
Histogramme représentant le nombre de comptages k_i' en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 10 s ajusté par une courbe de Gauss.

On constate que les valeurs sont dispersées symétriquement autour d'une valeur médiane.

Troisième représentation

On peut aussi se dire que notre objectif étant de déterminer le nombre de muons détectés par seconde, il peut être judicieux de comptabiliser tous les muons détectés pendant le temps total d'expérience. On a alors le résultat suivant, 67 821 muons ont été détectés pendant ces 13 h. Il semble simple alors pour trouver le résultat recherché de diviser le nombre total de muons par le nombre de secondes de l'expérience. Cependant, on ne tient pas compte des fluctuations de la mesure ; ainsi, si le lendemain cette expérience était de nouveau réalisée dans les mêmes conditions (même temps total d'expérience), il est à parier que le résultat sera différent, il pourra être de 67 001 ou 68 123 ou une autre valeur encore. Il faut donc évaluer ces fluctuations de comptage.

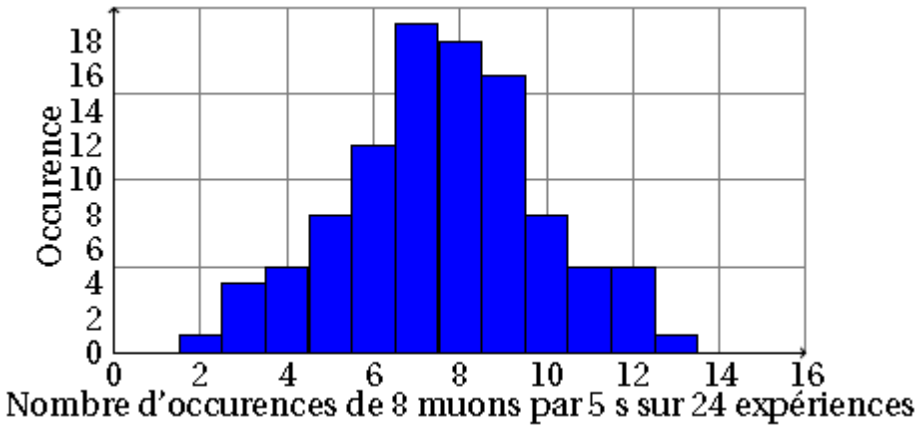
Pour bien comprendre la situation, effectuons un mesurage constitué de 24 comptages de 5 s chacun, ce qui nous donne une expérience dont le temps total est de 2 min.
Les résultats sont les suivants :



Quatre échantillons de 24 expériences : comptage du nombre de muons détectés par intervalle de 5 s

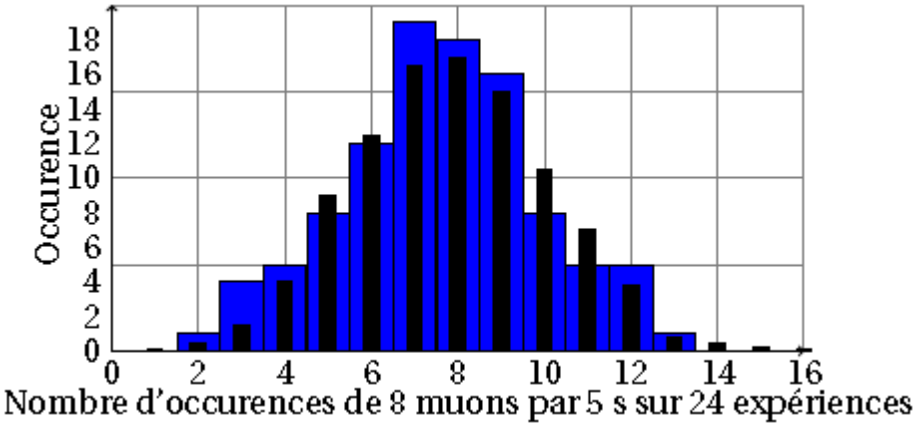
On constate que les valeurs obtenues pour chaque comptage sont différentes à chaque expérience (une expérience dure 5 s). Ainsi, par exemple, la valeur « 8 muons par 5 secondes » vaut 5 dans la première expérience, 5 dans la seconde, 6 dans la troisième et 10 dans la quatrième

En effectuant d'autres échantillons de ce mesurage (24 expériences de 5 s), on obtient les occurrences suivantes pour la valeur 8 muons par 5 s. On représente sur un graphe ces valeurs (l'échantillon a été réalisé 100 fois). En abscisse, on a le nombre de fois où l'on a obtenu « 8 muons par 5 s » dans un échantillon et en ordonnée le nombre de fois où ce résultat apparait sur les 100 échantillons.



Histogramme décrivant les fluctuations statistiques pour la valeur « 8 muons par 5 s »

On va montrer que, dans ce cas, les données peuvent être approximées par une distribution binomiale.



Histogramme décrivant les fluctuations statistiques pour la valeur « 8 muons par 5 s » et ajustement avec une distribution binomiale

Premier bilan

On a vu que, dans le premier cas, on pouvait ajuster nos mesures à une courbe de Poisson; dans le second, il est possible d'ajuster avec une courbe de gauss et dans le troisième cas, on a vu que la fonction binomiale modélisait les fluctuations de comptage. De plus, dans nos trois manières de représenter les résultats, il est nécessaire d'évaluer la dispersion des mesures. Ainsi, ces trois fonctions (celle de Poisson, de Gauss et la binomiale) que l'on appelle des fonctions de distributions vont nous permettre d'avoir des modèles pour analyser nos résultats de mesure (moyenne, étalement de la mesure, plage de confiance…).
La seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de ces fonctions de distribution qui constituent des modèles pour pouvoir étudier nos résultats expérimentaux.

iii. Les fonctions de distribution

(A) Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire une variable X susceptible de prendre différentes valeurs, auxquelles il est possible d'affecter une probabilité. Soit V l'ensemble des valeurs possibles de X : si V est fini ou dénombrable, on dit que la variable est discrète. Dans le cas contraire, la variable est dite continue.

Exemples :

- dans le lancer de dé, la variable aléatoire $X = \{1,2,3, 4, 5,6\}$ est discrète et ne peut prendre que 6 valeurs ;
- la vitesse d'une voiture est une variable continue ;
- la plupart des observables physiques (température, pression, longueur…) sont des variables continues ;
- les variables discrètes apparaissent généralement dans les expériences où il y a dénombrement (exemple : cosmodétecteur, CRAB…).

(B) Loi de probabilité

Soit $p(x)$, la probabilité qu'une variable aléatoire discrète X prenne la valeur x. L'ensemble des couples $(x,p(x))$ est appelé loi de probabilité de la variable aléatoire. Elle peut être représentée par un histogramme.
Lorsque la variable est continue, la probabilité que X prenne la valeur x est généralement infiniment petite. Ainsi, si on tire au hasard des nombres réels répartis uniformément entre 0 et 5, la probabilité qu'un tel nombre soit exactement égal à 1,2367744 est très faible, quoique non nulle.
Il devient dès lors plus intéressant de calculer la probabilité que X prenne une valeur dans un petit intervalle :

$$Prob(a < X \leq b) = Prob(X \leq b) - Prob(X < a)$$

La quantité

$$\frac{Prob(X \leq b) - Prob(X < a)}{b - a}$$

définit la densité de probabilité dans l'intervalle]a,b]. Par passage à la limite, on définit :

$$p(a) = \lim_{b \to a} \frac{Prob(X \leq b) - Prob(X < a)}{b - a}$$

La quantité $\int_c^d p(x)dx$ équivaut à la probabilité que la variable X prenne une valeur située entre c et d.

Exemple : dans le lancer d'un dé non truqué, la loi de probabilité discrète se résume à :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Autre exemple, la probabilité de tirer un nombre aléatoire issu d'un échantillon uniforme sur l'intervalle [0,1[vaut :

$$p(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in [0,1[\\ x, & sinon \end{cases}$$

Pour une variable discrète, la probabilité de tirer une valeur parmi toutes les valeurs possibles vaut obligatoirement 1 car on est sûr du résultat. Cela signifie que l'on a toujours :

$$\sum_{x \in X} p(x) = \sum_{i} p(x_i) = 1$$

De la même façon, pour une variable continue, la probabilité de tirer une valeur parmi l'ensemble des valeurs possibles est toujours égale à 1. On a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

Ces résultats sont valables quelle que soit la loi de probabilité[49]. On appelle ces probabilités $p(x)$ des fonctions de distribution ou de probabilité.

(C) Propriétés des fonctions de probabilité

Pour caractériser une fonction de distribution, on a besoin d'au moins deux paramètres :

- son espérance l'équivalent en probabilité de la moyenne d'une série statistique en statistiques que l'on notera μ.
- son étalement c'est-à-dire un paramètre caractérisant la largeur de cette courbe. Celui-ci est décrit par sa variance σ^2 ou carré de l'écart-type σ.

On définit μ tel que :

- $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x.p(x)dx$ dans le cas continu
- $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.P(x_i)$ dans le cas discret

Exemple : dans le lancer d'un dé non truqué, l'espérance vaut :

$$\mu = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

ce résultat est exact et ne dépend pas du nombre de lancers.

et σ^2 par :

- $\sigma^2 = \overline{(x-\mu)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2.p(x)dx$ dans le cas continu
- $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2.P(x_i)$ dans le cas discret

Pour chaque valeur de x, on considère l'écart à l'espérance μ et on calcule la valeur moyenne du carré de cet écart[50].

Ces définitions sont complètement générales et sont valables pour toutes les distributions. Il existe un certain nombre de fonctions de distribution type (distribution de gauss ou normale, distribution de Poisson, distribution binomiale…). Nous allons étudier deux distributions particulièrement utiles pour l'analyse des résultats du cosmodétecteur.

Exemple : dans le lancer de d'un dé non truqué, l'écart-type vaut :

$$\sigma^2 = (1-\frac{7}{2})^2.\frac{1}{6} + (2-\frac{7}{2})^2.\frac{1}{6} + (3-\frac{7}{2})^2.\frac{1}{6} + (4-\frac{7}{2})^2.\frac{1}{6} + (5-\frac{7}{2})^2.\frac{1}{6} + (6-\frac{7}{2})^2.\frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

ce résultat est lui aussi exact et ne dépend pas du nombre de lancers.

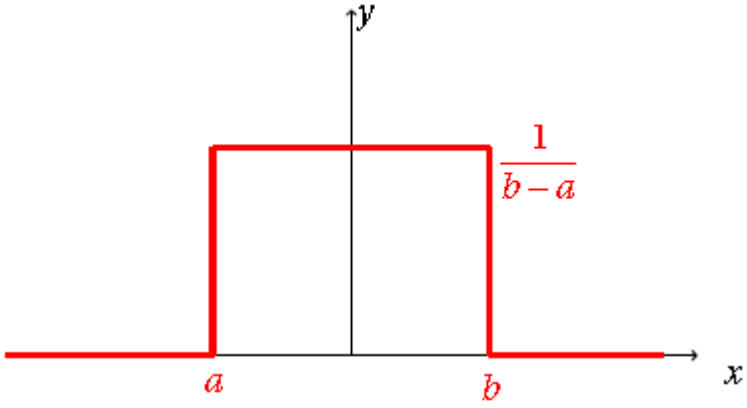
[49] Pour une variable discrète, chaque probabilité satisfait forcément $p(x) \leq 1$, puisque la somme des probabilités est égale à 1. La probabilité $p(x)$ est alors un nombre sans unité.
En revanche, pour une variable continue, il est tout à fait possible d'avoir $p(x) > 1$, , puisque c'est l'intégrale qui est bornée. En outre $p(x)$ peut s'exprimer en unités physiques. Par exemple, si x est une longueur mesurée en [m], alors $p(x)$ s'exprimera en $[m]^{-1}$.

[50] On n'utilise pas la valeur moyenne de l'écart car celle-ci est nulle.

(D) Fonction de distribution uniforme

La loi uniforme décrit une variable aléatoire X dont les valeurs sont équiprobables sur un intervalle $[a,b[$:

$$Prob(a < x \leq b) = cte$$



Distribution uniforme

On a $\int_a^b p(x)dx = 1$, cela donne :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & si\ x \in [a,b[\\ 0, & sinon \end{cases}$$

On montre dans ce cas que :

$$\mu = \frac{(a+b)}{2}$$
$$\sigma = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$$

(E) Fonction de distribution binomiale

Pile ou face (ou la loi de Bernoulli)

La loi de Bernoulli est l'expression la plus simple d'une loi de probabilité. Elle s'exprime par une variable aléatoire X qui n'a que deux états : elle prend soit la valeur 1 (pile), avec une probabilité p, soit la valeur 0 (ou face), avec une probabilité q.

$$Prob(X = 1) = p, Prob(X = 0) = q\ et\ p + q = 1$$

L'espérance vaut dans ce cas

$$\mu = 1.p + 0.q = p$$

et la variance

$$\sigma^2 = (1-p)^2.p + (0-p)^2.q = p(1-p) = pq$$

Exemple : dans le jeu de pile ou face, avec une pièce non truquée, on a $p = q = 1/2$

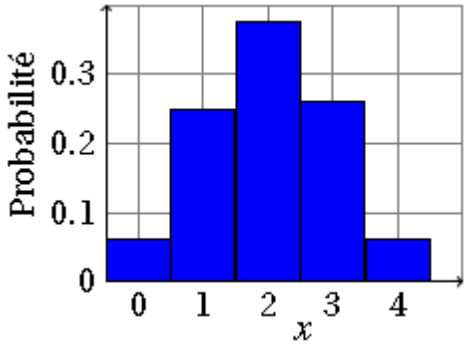
Introduction à la loi binomiale

On lance quatre pièces de monnaie (n=4) et que l'on compte le nombre de « face » obtenu, x. Quelle est la probabilité d'obtenir les différentes valeurs possibles de x=0,1,2,3,4 ?

La probabilité d'obtenir face avec une pièce est p= $\frac{1}{2}$ (loi de Bernoulli).
La probabilité $P(x;n)$ d'observer *x* pièces tombant sur « face » et *n-x* sur « pile » est le produit du nombre de différentes combinaisons possibles $C(n,x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x}$ par la probabilité que chacune de ces combinaisons arrive c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
On peut séparer ces probabilités pour chaque combinaison en deux parties : une partie est la probabilité $p^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ que *x* pièces tombent sur face et l'autre partie est la probabilité $q^{n-x} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$ que les autres *n-x* pièces tombent sur « pile ». Le produit de ces deux parties $p^x q^{n-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est la probabilité de la combinaison telle que *x* pièces tombent sur face et *n-x* pièces tombent sur « pile ». Ainsi, dans notre exemple, on a :

$$P(x;4) = \frac{4!}{x!\,(4-x)!} p^x q^{4-x} = \frac{4!}{x!\,(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \; avec\; x = 0,1,2,3,4$$

Si on trace cette fonction $P(x;4)$, on obtient :



Distribution binomiale pour n=4 et p=1/2

En règle générale, la probabilité *p* de succès pour chaque épreuve n'est pas égale à la probabilité *q=1-p* d'échec. Par exemple, lorsque l'on lance un dé, la probabilité qu'une valeur particulière soit tirée est $p = \frac{1}{6}$, alors que la probabilité de tirer l'une des 5 autres valeurs est $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ dans ce cas, $p^x q^{n-x} = (\frac{1}{6})^x . (\frac{5}{6})^{n-x}$

Loi binomiale

Une loi binomiale de paramètres *n* et *p* est une loi de probabilité qui correspond à l'expérience suivante :

On renouvelle n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On compte alors le nombre de succès x obtenus à l'issue des n épreuves et on appelle X la variable aléatoire correspondant à ce nombre de succès.

On a ainsi :

$$P_B\,(x\,;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

La loi binomiale intervient fréquemment dans les phénomènes physiques où il n'existe que deux états possibles, chacun étant assorti d'une probabilité. On utilise ainsi la loi binomiale pour les fluctuations de comptages ou les marches aléatoires décrivant le mouvement brownien.

Moyenne et écart-type

En utilisant la définition de μ du paragraphe 1.3.1., on a :

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = np$$

et pour σ, on a :

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} (x-\mu)^2 \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = np(1-p)$$

(F) Fonction de distribution poissonnienne

La distribution de Poisson est une approximation de la distribution binomiale dans le cas où la moyenne du nombre de succès est largement plus petite que le nombre totale de tirages, c'est à dire lorsque $\mu \ll n$ car $p \ll 1$. On rencontre ainsi cette distribution dans des situations où des évènements rares et indépendants se produisent aléatoirement dans le temps avec une probabilité par unité de temps connue. Si les évènements sont indépendants les uns des autres, le nombre x d'évènements qui se produisent pendant une durée fixe est une grandeur aléatoire dont la distribution de probabilité est la loi de Poisson :

$$P_\mu(x) = \frac{\mu^x}{x!} \exp(-\mu)$$

μ correspond alors au nombre moyen d'évènements observés.
On rencontre par exemple la distribution de Poisson lorsque l'on compte peu de muons par 5s où lorsque l'on diminue le temps de 5s (temps d'expérience). La loi de Poisson décrit bien des phénomènes de comptage : détection de photons par un photomultiplicateur, comptage de particules émises lors de désintégrations radioactives, comptage d'ions dans un spectromètre de masse, comptage d'individus en microbiologie...

Moyenne et écart-type

La distribution de Poisson n'est pas symétrique autour de sa moyenne. Une de ses particularité est qu'elle ne dépend que d'un seul paramètre.

En utilisant la définition de μ du paragraphe 1.3.1., on a :

$$\mu = np$$

et pour σ, on a :

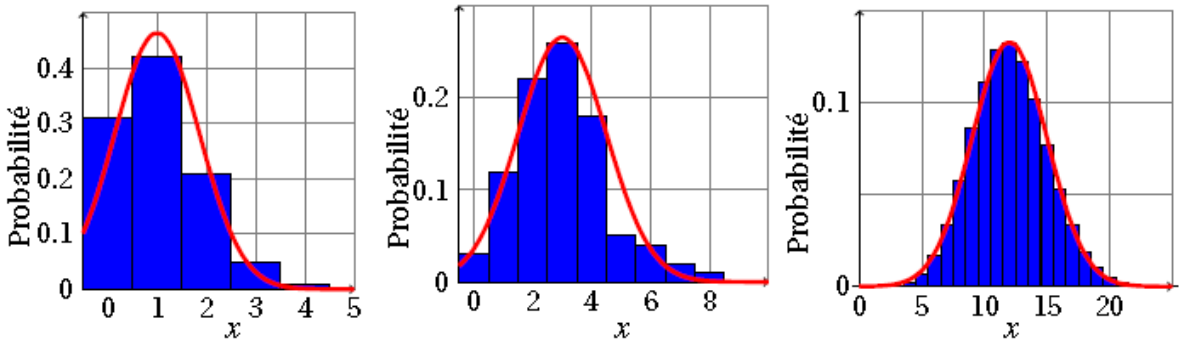
$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} (x-\mu)^2 \frac{\mu^x}{x!} \exp(-\mu) = \mu$$

Exemple : une décharge luminescente émet en moyenne $N = 3 \times 10^{10}$photons par seconde. Sur ceux-ci, seule une très faible fraction $p = 5 \times 10^{-9}$pénètre dans un photomultiplicateur. Le nombre moyen de photons détectés en une seconde vaut donc $\mu = N.p = 150$. Ce nombre fluctue au cours du temps avec un écart-type qui vaut $\sigma = \sqrt{\mu} = 12{,}2$

(G) Fonction de distribution gaussienne ou normale

Description de la distribution gaussienne

La distribution gaussienne est une approximation de la loi binomiale dans le cas limite particulier où le nombre d'observations possibles n devient infini et que la probabilité de succès p pour chacune est grande dans ce cas, $np \gg 1$. On approche alors cette loi binomiale par la loi normale ayant même espérance $\mu = np$ et même variance $\sigma^2 = np(1-p)$. On peut le constater sur ce graphe.



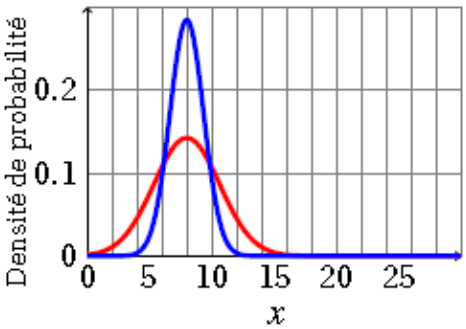
(a) binomiale : $n = 3$, $p = 1/4$, gaussienne : $\mu = 3/4$, $\sigma_x = 3/4$ (b) binomiale : $n = 12$, $p = 1/4$, gaussienne : $\mu = 3$, $\sigma_x = 3/2$ (c) binomiale : $n = 48$, $p = 1/4$, gaussienne : $\mu = 12$, $\sigma_x = 3$

Distributions binomiales pour différentes valeurs de p et n et distributions gaussiennes pour différentes espérances μ et écart-type σ

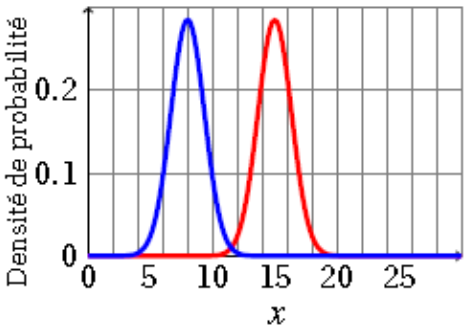
Dans le cas d'une gaussienne, la densité de probabilité $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

C'est une fonction continue qui décrit la probabilité d'obtenir la valeur aléatoire x. Elle est caractérisée par deux paramètres μ et σ, correspondant respectivement à l'espérance et à l'écart-type.



Influence de σ sur la distribution de Gauss



Influence de μ sur la distribution de Gauss

On constate dans l'expérience de comptage du nombre de muons que lorsque l'on augmente le temps de comptages donc le nombre de fois où l'on fait l'expérience, on tend vers une fonction limite qui est une fonction gaussienne[51].

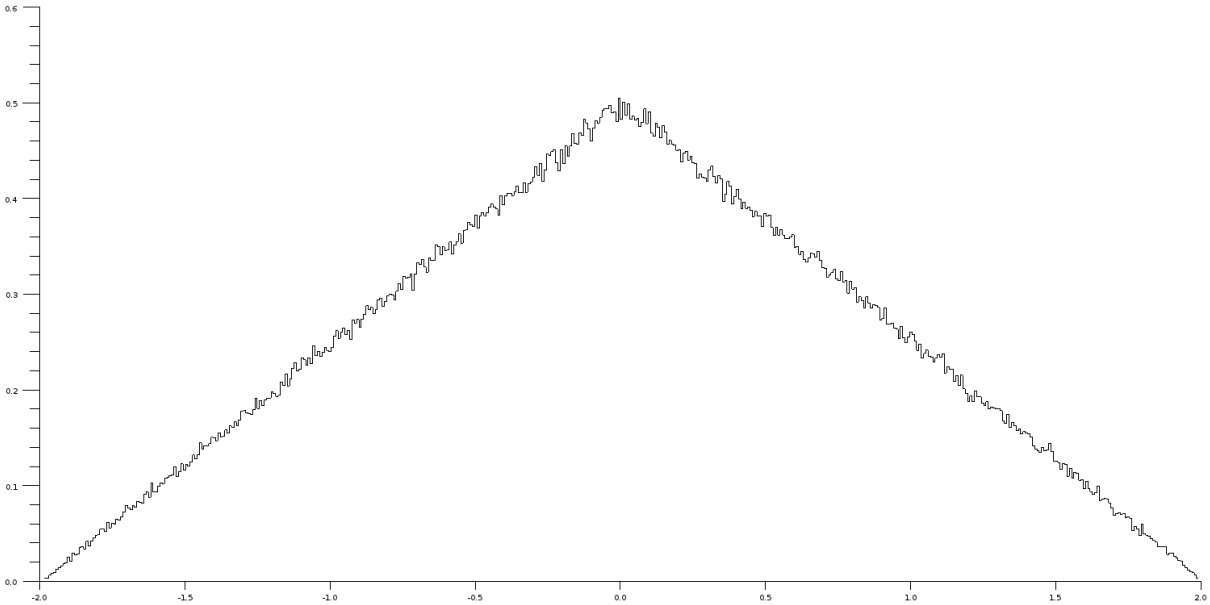
[51] Le théorème central limite (parfois appelé théorème de la limite centrale) établit la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne.

Théorème de la limite centrale

Un très grand nombre de phénomènes aléatoires présentent des distributions qui sont ou suivent de très près une loi normale. Cela s'explique par le théorème central limite.

Cela revient à dire que, si une grandeur physique subit l'influence d'un nombre important de facteurs indépendants, et si l'influence de chaque facteur pris indépendamment est petit par rapport à la valeur de la grandeur étudiée, alors la distribution de cette grandeur tend vers une loi normale.

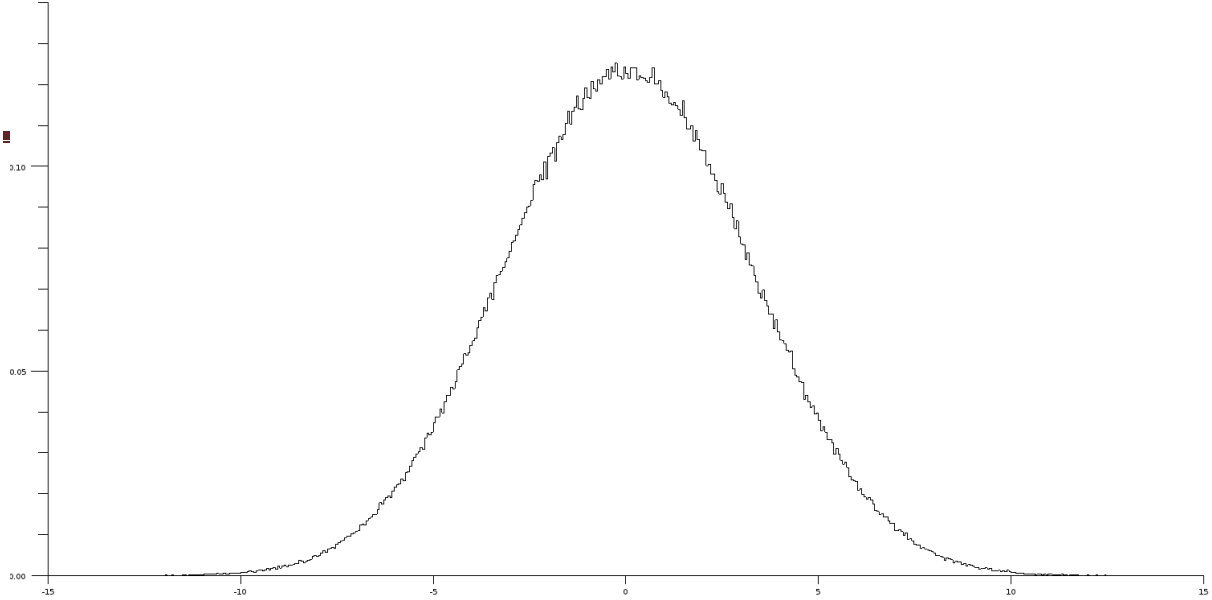
On réalise deux simulations avec Scilab[52]. La première simulation, on considère un cas où l'on a deux erreurs aléatoire chacune étant modélisé par une fonction de distribution rectangulaire de même intervalle. La composition de ces deux distribution rectangulaire nous donne une distribution triangulaire :



Composition de deux erreurs aléatoires de distribution rectangulaire (les unités sont arbitraires)

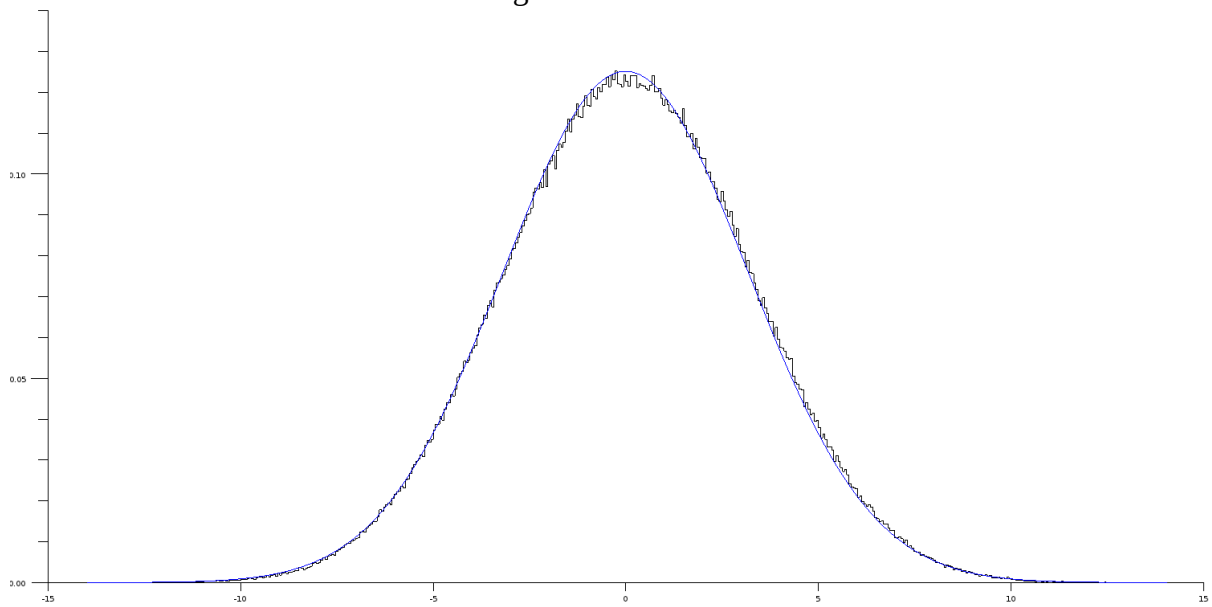
Maintenant, on simule vingt erreurs aléatoires que l'on considérera elles aussi comme de distribution rectangulaire mais n'étant pas défini nécessairement avec le même intervalle.

[52] On peut aussi utiliser le logiciel Gum_MC réalisé par J.-M. BIANSANLe logiciel Gum_MC est un logiciel libre sous licence GNU GPL que l'on peut télécharger sur le site de l'auteur à l'adresse http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html



Composition de vingt erreurs aléatoires de distribution rectangulaire (les unités sont arbitraires)

On obtient dans ce cas une distribution gaussienne.



Composition de vingt erreurs aléatoires de distribution rectangulaire (les unités sont arbitraires) ajustées par une gaussienne

Distribution gaussienne et niveau de confiance

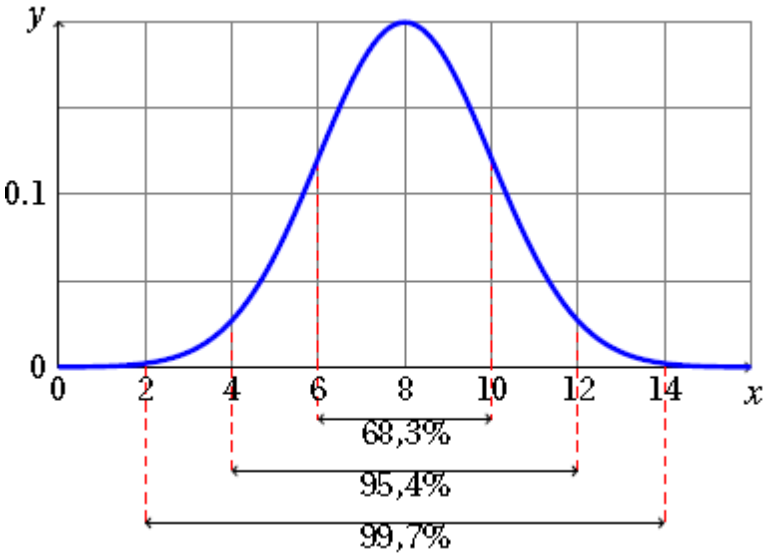
Le théorème central limite nous permet de dire qu'un grand nombre de résultats de mesures physiques peuvent être décrites par la distribution gaussienne. En effet, dans la très grandes majorité des cas, il y a un grand nombres d'erreurs aléatoires qui perturbent la mesure.
La distribution gaussienne est entièrement déterminée par les valeurs (μ, σ) et un grand nombre de grandeurs physiques peut être décrit par cette distribution (qui, par définition, est inconnue !). Les résultats expérimentaux peuvent alors être caractérisés par deux valeurs seulement. Par convention, on présente ces derniers sous la forme

$$x_{exp} = \mu \pm \Delta x$$

avec Δx l'incertitude. Ecrire le résultat sous cette forme ne nous garantie pas à 100% que notre résultat sera situé entre $\mu - \Delta x$ et $\mu + \Delta x$ mais indique seulement une probabilité que notre résultat se trouve entre ces bornes. On définit alors un niveau de confiance pour notre résultat.
Ainsi, la probabilité d'avoir un résultat compris :

- dans l'intervalle [μ-σ ; μ+σ] est tel que : $\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx = 0{,}683$ soit 68,3%
- dans l'intervalle [μ- 2σ; μ+2σ] est tel que : $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)dx = 0{,}954$ soit 95,4%
- dans l'intervalle [μ- 3σ; μ+3σ], est tel que : $\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)dx = 0{,}997$ soit 99,7%

Pour une distribution de Gauss, la probabilité de trouver *x* en dehors de l'intervalle [μ-σ ; μ+σ] est égale à 1/3, c'est-à-dire très importante ! Autrement dit, si l'on mesure une grandeur *x* plusieurs fois, environ 1/3 des résultats se trouve en dehors de $\mu \pm \sigma$ et seulement 2/3 dans l'intervalle. De ce point de vue, il n'y a rien de dramatique si le résultat sort de cet intervalle. Par contre, s'il se trouve aussi en dehors de l'intervalle [μ-3σ; μ+3σ], la situation devient beaucoup plus préoccupante. La probabilité d'un tel événement pour la distribution de Gauss est seulement de 0,3%.



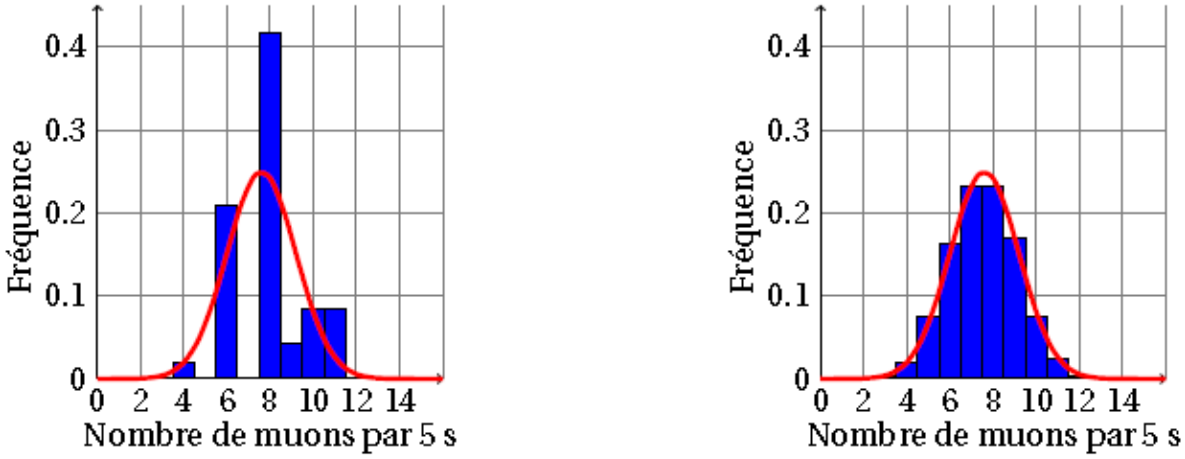
Distribution de Gauss et probabilité

(H) Échantillonnage et meilleure estimation

L'observation de la Nature ne peut nous donner que des valeurs en nombre limité. Toutes les méthodes de la statistique inférentielle reposent sur des échantillons. Le but est d'inférer à partir d'échantillons des caractéristiques de la population dans son ensemble, et de quantifier la certitude qu'on peut tenir de ces informations. On a *N* réalisations d'une variable aléatoire *x*.

Ainsi, on a vu précédemment que l'on pouvait écrire le résultat de notre mesure conventionnellement à l'aide des fonctions de distributions gaussienne. Seulement, la distribution gaussienne est un cas limite qui nécessite une infinité d'expériences ce qui est bien entendu impossible à réaliser. En général lors d'une expérience, il est difficile de connaître la distribution de la valeur physique mesurée *x* et ainsi de déterminer l'espérance mathématique de la distribution μ et son écart-type σ. La seule information dont nous disposons est un ensemble de résultats, c'est-à-dire le nombre fini de mesures $\{x_i\} = x_1, x_2, \dots, x_N$. A partir de ces mesures nous tentons de construire des valeurs qui tiendront lieu d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ. Il va donc être nécessaire d'utiliser les statistiques pour pouvoir estimer à la fois la valeur moyenne μ et l'écart-type σ. Pour cela, par analogie avec les définitions théoriques, nous introduirons la valeur moyenne et l'écart-type expérimentales. Les estimateurs sont donc des indicateurs qui résument à eux seuls certaines

caractéristiques de la loi. On constate aussi que, plus on a de mesures, plus on tend vers la distribution limite. On a représenté ci-dessous la probabilité de comptage réelle et la probabilité suivant une loi Gaussienne pour les comptages de 2 min et 333 min.



Evolution de l'ajustement de la gaussienne en fonction du nombre de comptages.

Population ou échantillon

Il existe une différence entre lesmodèles et les observations. Dans le premier cas, et pour autant que la loi de probabilité soit connue, on parlera de population. Les quantités qui seront déduites, telles que l'espérance, sont théoriques et en ce sens dépourvues d'erreur. Il est rare de pouvoir travailler sur une population sauf si on dispose d'un modèle mathématique exact du phénomène étudié (jeu de dé).
Lorsque la loi de probabilité n'est pas connue, alors il faut réaliser une expérience pour estimer les propriétés telles que la moyenne. On parlera alors d'échantillon. Les valeurs obtenues seront d'autant plus proches des valeurs théoriques que l'expérience a été bien menée. En vertu de la loi des grands nombres, les valeurs obtenues avec l'échantillon convergent vers celle de la population lorsque la taille de l'échantillon augmente. Tout le problème consiste à estimer au mieux ces valeurs.

Propriétés d'un estimateur

Un bon estimateur doit satisfaire à la fois à trois conditions souvent contradictoires : il doit être cohérent, non biaisé et efficace. On appellera dans ce paragraphe, X_0^* estimateur de la variable aléatoire X_0 recherchée (par exemple la moyenne).

Cohérence d'un estimateur

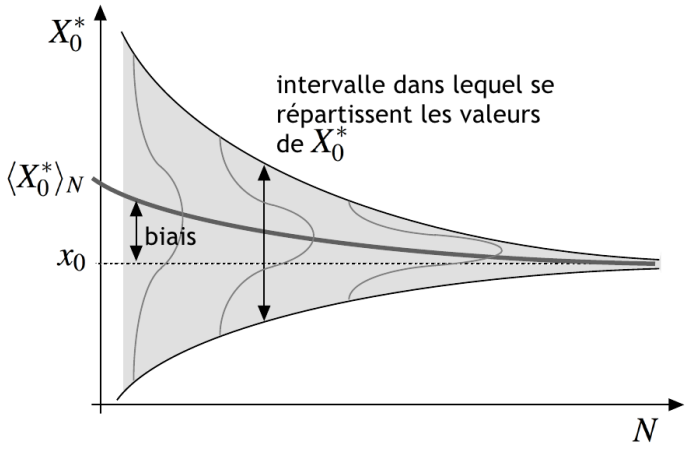
La loi des grands nombres nous dit que qu'en moyennant le résultat d'une expérience un grand nombre N de fois, l'estimateur (noté X_0^*) ainsi obtenu tend vers une variable non aléatoire x_0 qui est la valeur numérique recherchée. C'est la propriété de cohérence.

Biais d'un estimateur

Lorsque la taille N d'un échantillon tend vers l'infini, un estimateur cohérent tend vers la valeur exacte $x0$ recherchée. Mais dans le cas réel où l'échantillon est de taille finie, on aimerait que l'espérance de l'estimateur (que l'on note $\langle X_0^* \rangle$) s'écarte le moins possible de la valeur $x0$. Cet écart est appelé biais. Pour un estimateur biaisé, on a :

$$\langle X_0^* \rangle = x_0 + b_N$$

où b_N est le biais de l'échantillon. Pour un estimateur cohérent, $\lim_{N\to\infty} b_N = 0$. L'estimateur de la figure ci-dessous est biaisé.

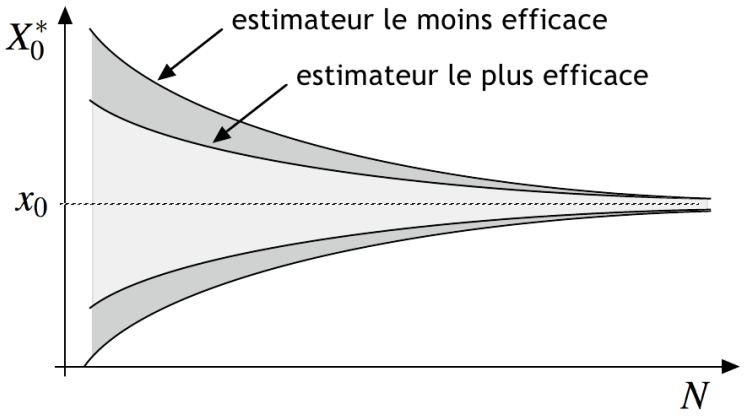


Exemple d'un estimateur cohérent et biaisé. D'après T. Dudok de Wit, Université d'Orléans

Efficacité d'un estimateur

Parmi différents estimateurs de la même quantité, on choisira celui dont l'écart-type est minimal : la convergence vers la valeur exacte n'en sera que plus rapide.

Exemple : pour estimer la moyenne d'un échantillon $\{x_i\}$, on effectue habituellement la moyenne arithmétique sur toutes les valeurs. On peut aussi effectuer la moyenne de la valeur minimum et de la valeur maximum. Cependant, l'écart-type de la moyenne arithmétique est bien plus petit que celle de la moyenne du minimum/maximum.



Deux estimateurs d'efficacité différente. D'après T. Dudok de Wit, Université d'Orléans.

Meilleure estimation d'une espérance mathématique

La meilleure estimation de l'espérance mathématique μ que l'on peut faire à l'aide d'un tableur (Excel, LibreOffice ou autre) est la moyenne expérimentale (ou arithmétique) que l'on notera $\bar{x}$ et qui s'effectue sur un nombre fini de mesures.

On considère que N événements indépendants[53] (notre nombre de comptages de 5 s) d'une variable aléatoire x (nombre de muons détectés en 5 s) sont mesurés. On a alors :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Cette valeur est appelée valeur moyenne estimée à partir d'un échantillon ou valeur moyenne expérimentale.

Exemple : on réalise des nombres N différents de lancer de dé, on obtient alors les moyennes

N	10	100	1000	10000	100000
$\bar{x}$	3,2	3,56	3,486	3,5366	3,5010

Ces valeurs convergent bien vers l'espérance mathématique $\mu = \frac{7}{2}$ lorsque N tend vers 'infini. De plus, on constate que notre estimateur est bien cohérent et non biaisé

Evolution de la valeur moyenne en fonction du nombre d'expériences

On a tracé la variation de la moyenne en fonction du nombre d'expériences réalisées avec le cosmodétecteur. On obtient les résultats suivants :

Variation de la moyenne sur 500 expériences

On constate que les variations de la moyenne sont très importantes lorsqu'il y a peu d'expériences mais que celle-ci converge vers une valeur limite et ne fluctue quasiment plus après 400 expériences. On a bien ici un estimateur cohérent et non biaisé.

Meilleure estimation de la variance (ou du carré de l'écart-type)

La variance expérimentale s^2 est définie, par analogie avec la valeur moyenne, de la façon suivante:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

L'écart-type caractérise, en quelque sorte, l'incertitude* moyenne pour les mesures $x_1, x_2, \dots, x_N$ prises séparément[54].

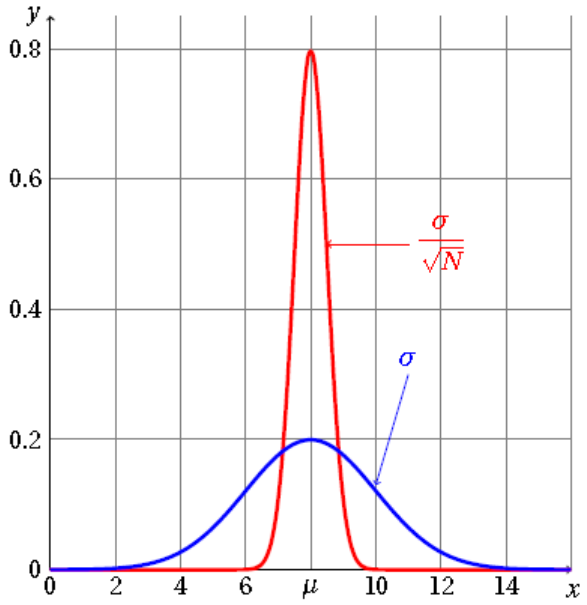
[53] Ce qui est notre cas ici car le nombre de muons incidents est aléatoire.
[54] Le facteur N−1, et non pas N, vient du fait que la formule ci-dessus utilise x, seule quantité accessible à l'expérience, et non pas X_{vrai}. Il est aisé de s'en souvenir : on conçoit bien qu'il n'est pas possible d'estimer l'écart-type d'une distribution à partir d'une seule mesure.

Ecart-type de la moyenne

L'écart-type ne décroît pas lorsque l'on augmente le nombre de mesures : malgré la présence du facteur N-1, il faut prendre en compte l'écart à la moyenne qu'une mesure supplémentaire ajoute. Notre meilleure estimation $\bar{x}$ de la moyenne est une combinaison de ces N mesures et on a toutes les raisons de penser que cette estimation de la moyenne est plus meilleure (c'est-à-dire plus proche de l'espérance μ) lorsque l'on a beaucoup de mesures que lorsque l'on en a qu'une seule. Il en est de même pour l'écart-type, on devrait accéder à une diminution de l'erreur lorsque l'on augmente le nombre de mesures.
En répétant de nombreuses fois l'expérience consistant à mesurer N valeurs de la grandeur X dont on prend ensuite la valeur moyenne, on obtient la distribution de probabilité de $\bar{x}$. Dans ce cas, $\bar{x}$ peut être aussi associée à une variable aléatoire, elle-même associée à une fonction de distribution gaussienne d'espérance mathématique μ et d'écart-type $\sigma_{\bar{x}}$ appelé écart-type de la moyenne. En effet, la moyenne est donné par $\bar{x}_N = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$: les grandeurs x_i étant des variables aléatoires, il en est de même de $\bar{x}_N$. Les variables aléatoires sont indépendantes et le théorème des variances conduit à $\sigma^2_{\bar{x}_N} = \frac{\sigma^2}{N}$. L'écart-type de la moyenne vaut alors:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$\sigma_{\bar{x}}$ représente l'incertitude sur la détermination de la valeur vraie X_{vrai} (forcément inconnue qui correspond ici à μ) partir de la moyenne de N mesures. Cette détermination est donc $\sqrt{N}$ fois plus précise que celle obtenue à partir d'une mesure unique. Dans la pratique, $\sqrt{N}$ croît lentement et améliorer la précision d'un facteur 10 oblige à effectuer 100 fois plus de mesures.



Ecart-type et écart-type de la moyenne.

Comme on peut le voir sur le graphique ci-dessus, lorsqu'on effectue une mesure unique, la valeur trouvée suit la distribution de probabilité représentée en pointillés. N mesures indépendantes se répartissent aléatoirement sur cette courbe. Lorsqu'on prend la valeur

moyenne de ces N mesures, les écarts à la valeur vraie se compensent statistiquement, avec d'autant plus d'efficacité que N est grand. Si on réalise plusieurs déterminations de la moyenne de N mesures, elles suivent la distribution en trait plein.

Or, on ne connaît jamais σ, on ne peut avoir que son meilleur estimateur s, on a alors la meilleure estimation de l'écart-type de la moyenne $\bar{s}$ donnée par :

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\overline{(x_i - \bar{x})^2} = \frac{s^2}{N}$$

(I) Résultat d'une mesure

Incertitude

L'incertitude Δx traduit les tentatives scientifiques pour estimer l'importance de l'erreur aléatoire commise. Si Δx est évalué statistiquement (ce que l'on fera dans la suite de l'exposé), on cherche dans ce cas à caractériser la distribution de probabilité des valeurs de *x*. En l'absence d'erreur systématique, l'estimation de la valeur moyenne est la meilleure estimation de la valeur vraie X_{vrai} tandis que l'incertitude Δx, directement reliée à l'estimation de l'écart-type de la distribution, définit un intervalle dans lequel la valeur vraie X_{vrai} se trouve avec un niveau de confiance connu. On choisit le plus souvent comme incertitude l'estimation de l'écart-type de la distribution. On parle alors d'incertitude-type*.

Présentation d'un résultat de mesure

Ainsi lorsque l'on se base sur *N* mesures $x_1, x_2, \dots, x_N$, on peut écrire notre réponse finale pour la détermination de la valeur de X_{vrai} :

$$x_{exp} = \bar{x} \pm \Delta x$$

où $x_{exp} = \bar{x}$ est la moyenne de $x_1, x_2, \dots, x_N$ et Δx correspond à l'écart-type de la moyenne[55],

$$\Delta x = \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

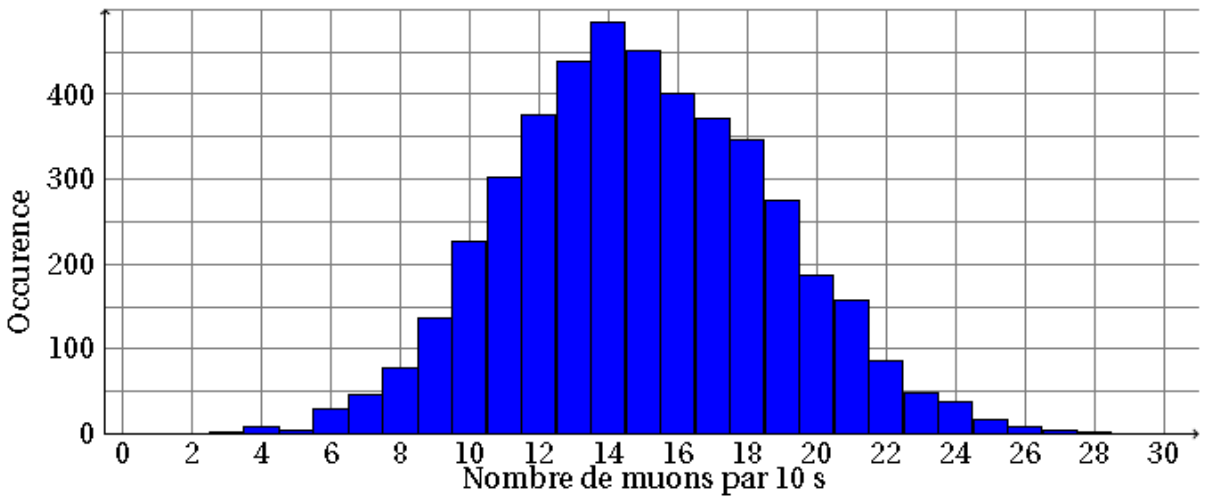
avec *t* le coefficient d'élargissement. Ainsi, dans le cas où la distribution des valeurs de nos mesures est gaussienne, pour *t*=1, on a un à un niveau de confiance de 63,8%, pour *t* = 2, on a un niveau de confiance de 95,4% et pour *t* = 3, on a un niveau intervalle de confiance de 99,7%[56].

(J) Retour sur la première expérience

Analyse à partir de la seconde courbe représentant les mesures de la partie ii

On s'intéresse à la moyenne et à l'écart-type selon cette représentation des résultats.

[55] Lorsque le nombre de mesures tend vers l'infini, l'écart-type de la moyenne tend vers zéro ce qui est tout à fait normal puisque dans ce cas, il n'y a plus aucun doute sur la valeur de la moyenne $\bar{x}$ qui correspond alors à *X*.
[56] L'intervalle de confiance associé à l'écart-type dépend de la distribution (gaussienne, poisssonnienne, binomiale,…) vers laquelle tendant les mesures expérimentales.



Histogramme représentant le nombre de comptage k_i en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 10 s.

Lorsque l'on fait les calculs, on obtient une moyenne de 14,971523 muons[57] pour 10 secondes. On a alors $\bar{x} = 1{,}4971523$ muons par seconde. L'estimation de l'écart-type pour 10 s est 3,827286, soit $s_x = 0{,}3827286$ muons par seconde pour l'estimation de l'écart-type pour 1 s. On en déduit alors que l'estimation de l'écart-type de la moyenne est $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N'}} = \frac{0{,}3827286}{\sqrt{4530}} = 0{,}00568645$ ... muons par seconde.
On peut alors écrire le résultat sous la forme suivante :

$$x_{exp} = 1{,}4971 \pm 0{,}0057\ muons\ par\ seconde\ (68{,}3\%)$$
$$x_{exp} = 1{,}497 \pm 0{,}011\ muons\ par\ seconde\ (95{,}4\%)$$
$$x_{exp} = 1{,}497 \pm 0{,}017\ muons\ par\ seconde\ (99{,}7\%)$$

On a donc bien un résultat expérimental avec un niveau de confiance donné.

Analyse à partir de la troisième représentation des mesures de la partie ii

On a 67 821 muons détectés pendant 13 h (plus précisément $9060 \times 5\ s = 45\ 300\ s$). On peut donc en déduire que le nombre moyen de muons détectés par seconde est $\bar{x} = \frac{67\ 821}{45\ 300} = 1{,}4971523$ muons par seconde. On démontre que l'estimation de l'écart-type dans le cas d'un comptage est $\sqrt{k}$ dans notre cas, on a 260,424653 pour le comptage de 45 300 s soit, si l'on ramène ce résultat à 1 s, on obtient $s = 0{,}0057488$ muons par seconde.
On écrit alors le résultat sous la forme suivante :

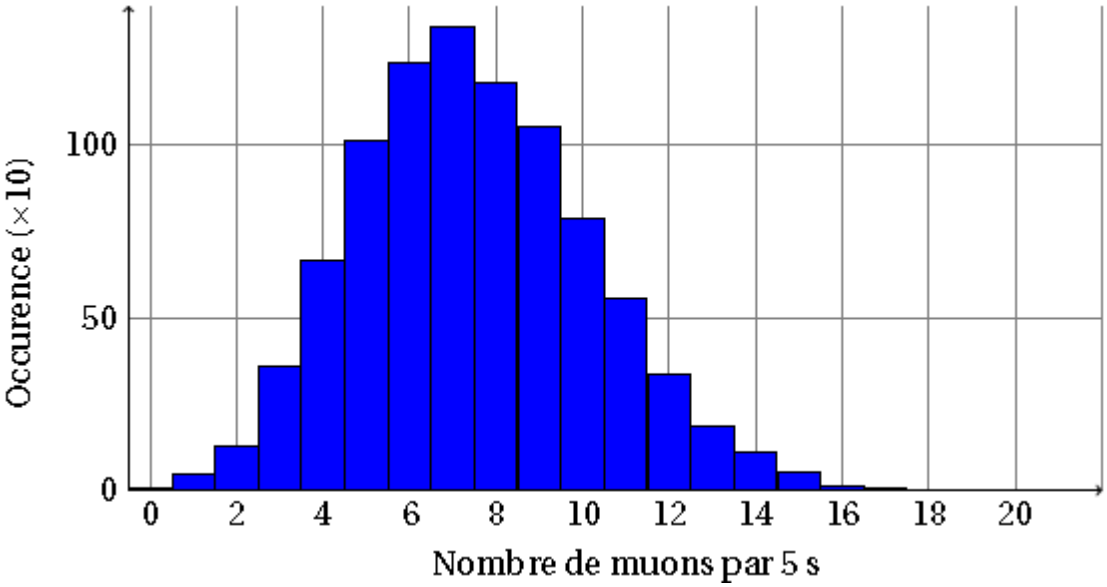
$$x_{exp} = 1{,}497 \pm 0{,}011\ muons\ par\ seconde$$

[57] A ce stade, on ne se préoccupe pas des chiffres significatifs, cela est trop tôt et pourrait altérer nos résultats .

mais il est difficile d'attribuer un niveau de confiance dans un cas non gaussien[58]. On prend alors par convention un coefficient d'élargissement *t* de 2.

Analyse à partir de la première courbe représentant les mesures de la partie ii

On s'intéresse à la moyenne et à l'écart-type selon cette représentation des résultats.



Histogramme représentant le nombre de comptage k_i en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 5 s

On obtient une moyenne de 7,48576159 muons par intervalle de 5 s. On en déduit $\bar{x} = 1{,}4971523$ muons par seconde. L'estimation de l'écart-type pour 5 s est 2,7241173 donc $s = 0{,}5448235$ muons par seconde. Or on s'intéresse à l'estimation de l'écart-type de la moyenne soit $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}5448235}{\sqrt{9060}} = 0{,}0057239$ muons par seconde.
On écrit alors le résultat sous la forme suivante :

$$x_{exp} = 1{,}497 \pm 0{,}011 \; muons\ par\ seconde$$

De la même manière que précédemment, il est difficile de calculer le niveau de confiance pour une poissonnienne[59] et cela dépasse le cadre de ce document introductif.

[58] Pour notre expérience, on est dans le cas où la distribution binomiale est quasiment une distribution gaussienne, il ne serait pas illogique d'écrire le résultat de la même façon que dans le paragraphe précédent.
[59] On remarquera tout de même que cet échantillon de valeur n'est pas très éloigné d'une gaussienne.

Bibliographie

J.R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, 2nd edition, University Science Books Sausalito, California, 1997;
K. Protassov, *Probabilités et incertitudes dans l'analyse des données expérimentales*, Presses Universitaires de Grenoble, 1999;
Philip R. Bevington & D. Keith Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill Education, 2003 ;
Johann Collot, *Erreur, probabilité statistique*, Polycopié du cours de physique expérimentale des hautes énergies du DEA de Physique Théorique Rhône−Alpin,
http://isnwww.in2p3.fr/atlas/cours/index.html, 2001 ;
F.-X. Bally & J.-M. Berroir, *Incertitudes expérimentales*, Polycopié de cours du centre de préparation interuniversitaire à l'agrégation de physique de Montrouge, http://poisson.ens.fr/Ressources/incertitudes.pdf, *2008.*

b. Traitement de données expérimentales

i. Tracé d'une courbe modélisant les données expérimentales : ajustement d'un modèle

On dispose de N couples de mesures (X_i,Y_i). On se propose d'ajuster un modèle f à q paramètres ajustables qui puissent expliquer la variable Y (variable expliquée) en fonction des valeurs de X (variable explicative).

$Y_i = f_P(X_i)$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{pmatrix}$ avec $p_1,\ldots,p_q$ l'ensemble des paramètres de notre modèle à ajuster.

On considère un modèle f fixé et on ne joue qu'avec la valeur des paramètres. Pour répondre aux questions sur la qualité de l'ajustement, la première démarche à entreprendre est de définir une fonction « coût » ou « critère d'ajustement » qui mesurera cette qualité. L'obtention des meilleurs paramètres revient donc à rechercher le minimum de ce critère en faisant varier les paramètres.

Deux méthodes classiques, utilisant des mesures différentes de la qualité de l'ajustement sont couramment utilisés : le critère du χ^2 et le critère des moindres carrés.

ii. Utilisation du critère du χ^2

(A) Application à la distribution angulaire du flux de muons

Définition du critère du χ^2

Le critère est construit à partir de la somme des carrés des écarts relatif au modèle ramenés au nombre de degré de liberté du système[60].

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f(X_i) - Y_i)^2}{\sigma_i(Y_i)^2}$$

avec n, le nombre de points expérimentaux ; q, le nombre de paramètre du modèle ; $f(X_i)$, la valeur donnée par le modèle pour X_i ; Y_i, la valeur expérimentale de rang i et $\sigma_i(Y_i)$ l'incertitude type estimé pour Y_i[61]. En toute rigueur, l'incertitude type $\sigma_i(Y_i)$ doit être issue d'une distribution gaussienne. Nous avons vu précédemment (estimation des fluctuations de comptage) que lorsque $k = np$ est assez grand, la distribution distribution binomiale des fluctuations de comptage tend vers une distribution gaussienne. On considérera dans la suite que cette condition est toujours vérifiée. On prendra alors $\sigma_i(Y_i) = \sqrt{Y_i}$. Dans notre cas, le critère du χ^2 est donc :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f(X_i) - Y_i)^2}{Y_i}$$

[60] Correspond au nombre de points expérimentaux moins le nombre de paramètre du modèle.
[61] On considère que l'erreur sur X_i est négligeable par rapport à celle de Y_i

χ^2 correspond à une statistique qui caractérise la dispersion des valeurs mesurées par rapport aux valeurs données par le modèle. Si les mesures sont en parfait accord avec les valeurs du modèle alors on a χ^2=0. Ce cas est totalement improbable.
Dans notre relation du χ^2, le numérateur représente une mesure de la dispersion des mesures par rapport au modèle mais le dénominateur donne une mesure de la dispersion attendue. On peut alors conclure que l'on a un bon accord entre nos mesures et le modèle prédit lorsque la moyenne des dispersions des mesures correspond à la moyenne des dispersions attendue. Ainis, on devrait obtenir une contribution telle que, pour chaque mesure, $(f(X_i) - Y_i)^2 = \sigma_i(Y_i)^2$ soit une contribution de 1 pour chaque mesure. Dans ce cas, χ^2=n. Cela est presque correct. En fait, la vraie valeur attendue de χ^2 est : $\chi^2 = \nu = n - q$ où ν est le nombre de degré de libertés et q le nombre de paramètre de notre modèle. On utilise alors de χ^2_r appelé χ^2 réduit défini par :

$$\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{1}{n-q}\sum_{i=1}^{n}\frac{(f(X_i) - Y_i)^2}{Y_i}$$

Notre modèle sera en bonne adéquation lorsque χ^2_r est proche de 1.

(B) Application à la distribution angulaire du flux de muons.

Explicitation du modèle

Pour la distribution angulaire du muon, le modèle utilisé est le suivant :

$$N(\theta) = a.\cos^2(\theta_i) + b$$

avec $N(\theta)$ le nombre de muons reçu par l'appareil pour un angle θ ; θ, l'angle sous lequel est incliné la roue (voir expérience distribution angulaire du flux de muons) et a et b deux paramètres à déterminer.

On a donc ici deux paramètres à déterminer, ce sont a et b donc $q = 2$. On va donc minimiser χ^2 suivant :

$$\chi_r^2 = \frac{1}{n-q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(a.\cos^2(\theta_i) + b - N_{exp}(\theta_i)\right)^2}{N_{exp}(\theta_i)}$$

avec $N_{exp}(\theta_i)$, le nombre de muons mesurés pour un angle θ_i.

Utilisation d'un tableur pour minimiser χ_r^2

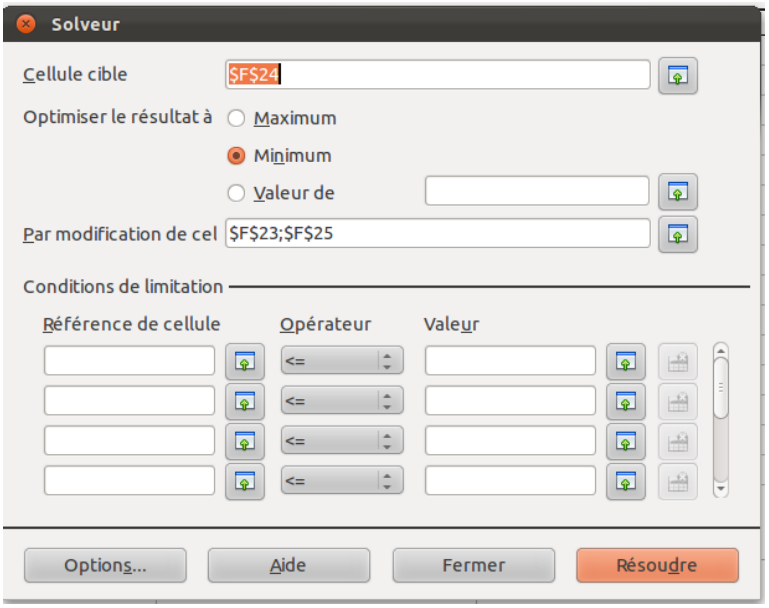
On va utiliser un tableur pour minimiser χ_r^2 mais il est tout à fait possible d'utiliser un logiciel de calcul numérique (Scilab, Matlab ou Octave, par exemple) pour réaliser ce travail. On utilisera l'outil solveur disponible sur LibreOffice Calc et sur Microsoft Excel. Cet outil, par ajustements successifs des paramètres, va nous permet de minimiser la fonction χ_r^2.

Voici comment se présente un fichier LibreOffice Calc avant optimisation par le solveur :

	A	B	C	D	E	F
1	Angle (rad)	Angle (°)	comptage N	racine N	modèle	différence
2	-1,57	-90	50	7,1	40,000	0,125000000
3	-1,40	-80	48	6,9	52,061	0,021473903
4	-1,22	-70	79	8,9	86,790	0,048014218
5	-1,05	-60	156	12,5	139,999	0,102574978
6	-0,87	-50	217	14,7	205,270	0,039632261
7	-0,70	-40	280	16,7	274,729	0,006201679
8	-0,52	-30	320	17,9	340,000	0,078121686
9	-0,35	-20	401	20,0	393,209	0,009461454
10	-0,17	-10	457	21,4	427,938	0,115505009
11	0,00	0	485	22,0	440,000	0,260953608
12	0,17	10	485	22,0	427,938	0,419590000
13	0,35	20	471	21,7	393,209	0,803010836
14	0,52	30	382	19,5	340,000	0,288618395
15	0,70	40	299	17,3	274,729	0,123135829
16	0,87	50	206	14,4	205,270	0,000161876
17	1,05	60	160	12,6	139,999	0,156263255
18	1,22	70	112	10,6	86,790	0,354645704
19	1,40	80	52	7,2	52,061	0,000004477
20	1,57	90	45	6,7	40,000	0,034722222
21						
22						
23					a=	400
24					chi=	2,9870913883
25					b=	40

Dans notre cas, on a n=19 valeurs expérimentales.
La colonne E correspond au modèle $N(\theta) = a.cos^2(\theta) + b$, on est alors obliger de fixer *a priori* une valeur pour a et b (case F23 et F25)[62]. Le solveur partira de ces deux valeurs et des paramètres pour minimiser χ_r^2 (case F24).
La colonne F correspond à $E_i = \frac{1}{17}\frac{(a.cos^2(\theta_i)+b-N_{exp}(\theta_i))^2}{N_{exp}(\theta_i)}$ c'est à dire la contribution d'un point expérimental au χ_r^2.

On utilise ensuite la fonction solveur[63]. La fenêtre suivante apparaît :



La cellule cible correspond à la cellule que vous désirez optimiser. On a alors le choix de minimiser cette cellule, de la maximiser ou alors de faire tendre la cellule vers une valeur

62 On essaie de donner une valeur pas trop éloigné pour minimiser le temps de calcul.
63 Pour LibreOffice Calc, on va dans outils puis solveur.

particulière. Dans notre cas, il s'agit de minimiser χ_r^2 qui correspond dans notre exemple à la cellule F24.
Ensuite, il faut renseigner le tableur sur les cellules qu'il peut modifier pour pouvoir obtenir l'optimisation attendue qui correspond à la case *Par modification de cel*. Dans notre cas, le tableur devra modifier deux valeurs, *a* et *b* qui se trouvent respectivement dans les case F23 et F25.
Il reste plus ensuite qu'à demander au logiciel d'effectuer le calcul en appuyant sur le bouton résoudre. Après quelques instants, le calcul est effectué et de nouvelles valeurs (désormais optimisées) sont données dans les case F23 et F25.
Voici la feuille de calcul après optimisation :

	A	B	C	D	E	F
1	Angle (rad)	Angle (°)	comptage N	racine N	modèle	différence
2	-1,57	-90	50	7,1	42,287	0,074372093
3	-1,40	-80	48	6,9	55,271	0,068834914
4	-1,22	-70	79	8,9	92,659	0,147596783
5	-1,05	-60	156	12,5	149,941	0,014709218
6	-0,87	-50	217	14,7	220,208	0,002963592
7	-0,70	-40	280	16,7	294,984	0,050118825
8	-0,52	-30	320	17,9	365,252	0,399942043
9	-0,35	-20	401	20,0	422,534	0,072273831
10	-0,17	-10	457	21,4	459,922	0,001167931
11	0,00	0	485	22,0	472,907	0,018844903
12	0,17	10	485	22,0	459,922	0,081042579
13	0,35	20	471	21,7	422,534	0,311698876
14	0,52	30	382	19,5	365,252	0,045895026
15	0,70	40	299	17,3	294,984	0,003370614
16	0,87	50	206	14,4	220,208	0,061243889
17	1,05	60	160	12,6	149,941	0,039526565
18	1,22	70	112	10,6	92,659	0,208751508
19	1,40	80	52	7,2	55,271	0,012858701
20	1,57	90	45	6,7	42,287	0,010226304
21						
22						
23					a=	430,620647415
24					chi=	1,6254381970
25					b=	42,2865264112

En observant la valeur χ_r^2, on constate dans notre cas qu'elle est assez proche de 1 cela veut dire qu'il y a de grandes chances que notre modèle « tienne la route ». Dans le cas où χ_r^2 est assez élevé (ou très proche de 0), il sera peut-être judicieux de réfléchir soit à la qualité des mesures soit à la pertinence du modèle.

On peut alors écrire que :

$$N(\theta)=430{,}6\,.\cos^2(\theta)+42{,}28$$

(C) Application au temps de vie du muon

Explicitation du modèle

Pour le temps de vie du muon, nous avons affaire à une décroissance exponentielle plus une constante due au bruit, le modèle utilisé est le suivant :

$$N(t)=A.exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)+B$$

avec *N(t)* le nombre de muons restant au temps *t* ; τ, le temps de vie du muon et *A* et *B* deux paramètres à déterminer.

On a donc ici trois paramètres à déterminer, ce sont *A, B et τ* donc q=3. On va donc minimiser χ^2 suivant :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(A.exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B - N_{exp}(t)\right)^2}{N_{exp}(t)}$$

avec N_{exp}(t), le nombre de muons au temps *t*.

Dans le tableur, on créé une colonne donnant N(t)[64] (le nombre de muon au temps t) et une colonne dt (pas temporel) comme indiqué ci-dessous :

E	F	G	H
		A=	155,7542574
		B=	10,11376396
		tau=	2131,836093
		khi2=	188,663379
dt	N	modèle	différence
0	0	165,8680213	
400	324	139,2215758	105,38
800	110	117,1338054	0,46
1200	123	98,82481181	4,75
1600	88	83,64812166	0,22
2000	64	71,06786037	0,78
2400	58	60,63983075	0,12
2800	54	51,99582892	0,07
3200	41	44,83064332	0,36
3600	35	38,891278	0,43
4000	32	33,96801958	0,12
4400	29	29,88703243	0,03
4800	23	26,50422075	0,53
5200	22	23,70014065	0,13
5600	28	21,3757827	1,57
6000	20	19,44907602	0,02
6400	17	17,8519904	0,04

Enfin, on utilise la fonction solveur de notre tableur en faisant varier les paramètres A, B et *τ*. On trouve alors dans notre cas *τ=2,1* µs (la valeur du PDG est *τ=2,2* µs)[65].

Remarques :

- Pour minimiser χ^2, il faut faire attention de pas prendre en compte le nombre N(t) pour t<100 ns car ces signaux sont très bruités[66] (ici, par sécurité[67], nous avons occulté tous les désintégrations de muons dont le temps de désintégration est inférieur à 400 ns).
- Le choix du pas temporel (ici 400 ns) est un des critères les plus sensibles. Son choix doit être fait avec précaution : si le pas est trop petit, la fluctuation du comptage est trop importante ; s'il est trop important, le nombre de points de mesures devient trop restreint.
- Si l'on ramène notre χ^2 au χ^2_r sachant que l'on a 129 mesures et 3 paramètres donc :

[64] N(t) a été obtenu grâce à la fonction fréquence de Excel ou LibreOffice.
[65] Nous ne ferons pas d'estimation de l'erreur sur cette mesure car celle-ci est assez complexe à estimer. Pour plus d'information voir l'ouvrage de P.R. Bevington
[66] Ce bruit peut être dû à des échos du signal primaire dans le PM
[67] On pourra vérifier l'influence de ce choix.

$$\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{n-q} = \frac{189}{129-1-3} = 1{,}5$$

iii. Utilisation de la méthode des moindres carrées : application au temps de vie du muon

Lorsque l'on trace la courbe N(t)=f(t), le modèle utilisé est : $N^{modele}(t) = N_0.\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + B$ avec N_0, le nombre de muons à t=0 s et B correspondant au bruit de fond.
Pour utiliser la méthode des moindres carrées, nous devons linéariser cette équation. Pour cela, il faut estimer le bruit B (celui-ci correspond à la moyenne des comptages à des temps élevés car on estime que lorsque t est élevé, on n'a plus de muons mais uniquement du bruit de fond), on a donc une nouvelle valeur $N^{sans\ bruit}$.
Le modèle sans le bruit est donc $N^{modele\ sans\ bruit}(t) = A.\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$. Si on linéarise cette équation, on a :

$$N^{modele\ sans\ bruit} = \ln N_0 - \frac{t}{\tau}$$

De la même manière que pour le χ^2, il faut minimiser la somme suivante :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(f(X_i)-Y_i)^2}{\sigma_i(Y_i)^2}$$

Ici $f(X_i)$ correspond à $N^{modele\ sans\ bruit}$, Y_i correspond à $N_i^{sans\ bruit}$ et $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{N_i^{sans\ bruit}}}$.

Ainsi, cela revient à minimiser :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\ln N_0 - \frac{t_i}{\tau} - N_i^{sans\ bruit})^2}{{\sigma_i}^2}$$

où t_i est le temps correspondant au comptage $N_i^{sans\ bruit}$.
Nous devons alors ajuster deux paramètres, ln N_0 et τ. Pour cela, on doit minimiser cette expression et pour cela on dérive cette expression par rapport à chacun des paramètres que l'on doit ajuster. On a alors :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \ln N_0} = 0$$

et

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \frac{1}{\tau}} = 0$$

Après calcul, on obtient :

$$\ln N_0 = \frac{1}{\Delta}\left\{\sum_{i=1}^{N} \frac{lnN_i^{sans\ bruit}}{\sigma_i^2}.\sum_{i=1}^{N}\frac{t_i^2}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N}\frac{lnN_i^{sans\ bruit}.t_i}{\sigma_i^2}.\sum_{i=1}^{N}\frac{t_i}{\sigma_i^2}\right\}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\Delta}\left\{\sum_{i=1}^{N} \frac{lnN_i^{sans\ bruit}.t_i}{\sigma_i^2}.\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N}\frac{lnN_i^{sans\ bruit}}{\sigma_i^2}.\sum_{i=1}^{N}\frac{t_i}{\sigma_i^2}\right\}$$

avec

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N}\frac{t_i^2}{\sigma_i^2}.\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{t_i}{\sigma_i^2}\right)^2$$

L'incertitude $\Delta\tau$ est donnée par l'écart-type σ_τ telle que :

$$\Delta\tau = -\tau^2 . \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

En utilisant les mêmes données que pour le χ^2, on a la feuille Excel suivante :

	A	B	C	D	E
1				N_Bruit=	10,11
2				ln N0=	5,048
3				1/tau=	-0,00046
4				tau=	2197
5				Delta 1/tau=	0,00002454
6				Delta tau=	118
7	HT PM2:0V				
8	Seuil PM2: 40mV				
9					
10	VIE DU MUON 1 (ns)	dt	N	N-N_Bruit	ln(N-N_Bruit
11	488	0	0		
12	28688	400	324	313,9	5,75
13	6160	800	110	99,9	4,60
14	1072	1200	123	112,9	4,73
15	31320	1600	88	77,9	4,36
16	816	2000	64	53,9	3,99
17	1720	2400	58	47,9	3,87
18	12000	2800	54	43,9	3,78
19	26808	3200	41	30,9	3,43
20	61328	3600	35	24,9	3,21
21	1064	4000	32	21,9	3,09
22	41424	4400	29	18,9	2,94

On a donc un temps de vie τ=2,19±0,12 µs (à 68,3% en degré de confiance). Cette mesure est donc compatible par rapport à celle obtenue par la méthode du χ^2.

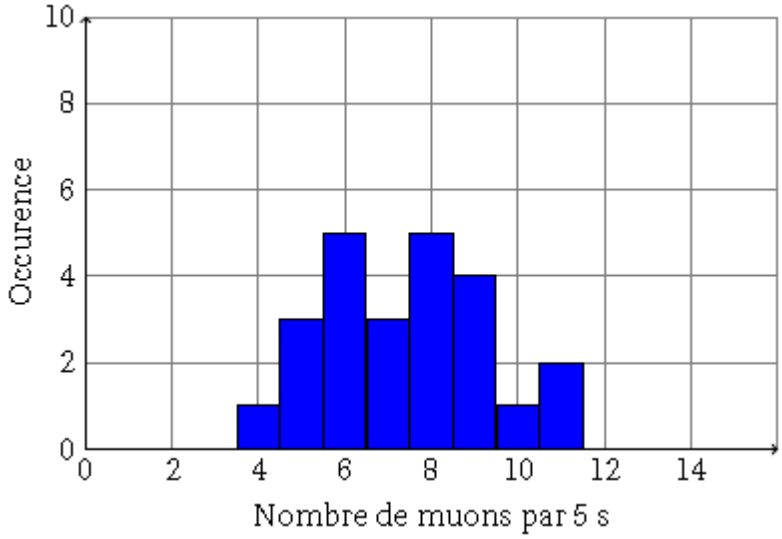
Remarques :

- Cette méthode présente l'avantage d'une estimation de l'erreur sur le temps de vie du muon.
- On prendra garde à l'évaluation du bruit de fond : une mauvaise évaluation de celui-ci peut entraîner de grands écarts sur l'estimation du temps de vie.
- D'un point de vue de l'évaluation du temps de vie, les deux méthodes sont équivalentes. Une valeur plus proche de la valeur théorique attendue de l'une des deux méthodes ne signifie pas que cette méthode est meilleure : une erreur systématique de nos mesures peut faire que la meilleure estimation de la valeur vraie par nos mesures est une valeur quelconque autour de la valeur théorique attendue.

ANNEXE

Meilleure estimation de comptage (fluctuation statistique de comptage d'une valeur x_i)

Fluctuations statistiques de comptage

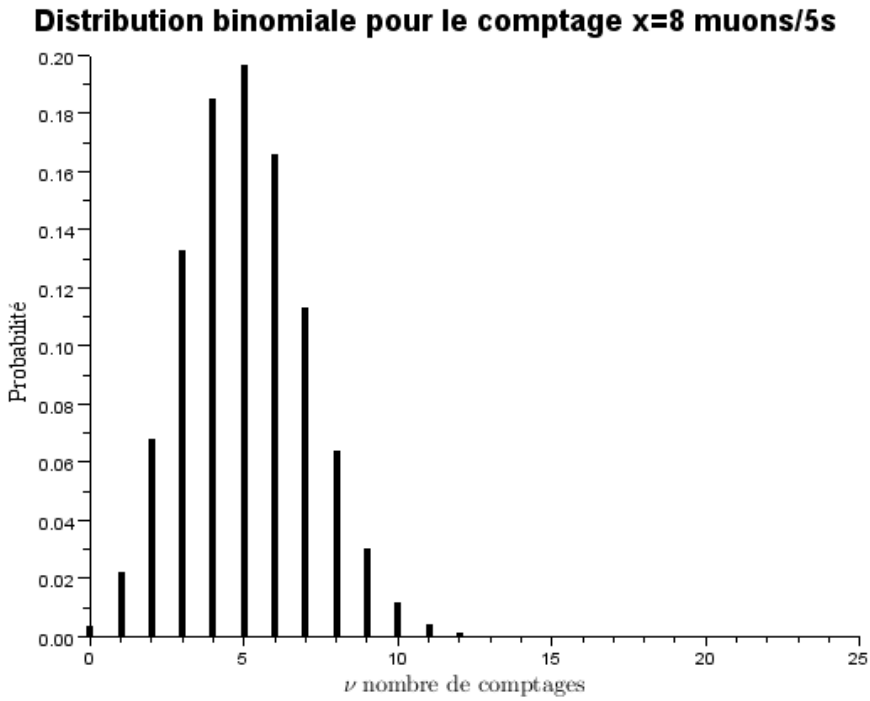


On considère un comptage de 2 minutes effectué, le nombre de fois k ou le cosmodétecteur a compté *x*=8 muons/5s est k=5. La fréquence de ce résultat est 0,21. On a effectué un nombre N=24.

On considère que les fluctuations statistiques pour la valeur *x*=8 suit la loi de distribution binomiale suivante donnant la probabilité d'obtenir un comptage *ν :*

$$P_B\,(\nu\,;24{,}0.21) = \binom{24}{0.21} 0.21^{\nu} 0.79^{24-\nu}$$

Si on trace cette distribution P_B en fonction de *ν,* on obtient *:*



Cette courbe représente les fluctuations statistiques pour le comptage x=8 muons/5s.

Meilleur estimation de la probabilité p et de l'écart-type

Soit *N*, le nombre total de comptages effectués et *k* le nombre de fois où la condition est satisfaite (par exemple le nombre de fois où l'on a obtenu *a* muon/5s). Le meilleur estimateur pour le paramètre *p* (probabilité de succès) de la distribution binomiale est:

$$\bar{e} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i = \frac{k}{N}$$

avec $e_i = 1$ si la condition est satisfaite et $e_i = 0$ sinon. Dans notre exemple, on a donc $\bar{e} = 0{,}21$, N=24 et k=5.

On a vu dans le paragraphe précédent que le meilleur estimateur pour la variance d'une valeur moyenne est $s^2(\bar{e}) = \frac{s^2}{N}$.

Ce qui donne, dans le cas d'une distribution binomiale : $s^2(\bar{e}) = \frac{p(1-p)}{N}$.

Si on remplace *p* par son estimateur, on a :

$$s^2(\bar{e}) = \frac{k}{N^2}(1 - \frac{k}{N}) \text{ ou encore } s^2(k) = k(1 - \frac{k}{N})$$

et $s(k) = \sqrt{k(1 - \frac{k}{N})}$ est appelé erreur statistique de comptage.

Dans notre exemple, on obtient :

$$s(k) = \sqrt{k(1 - \frac{k}{N})} = \sqrt{8\left(1 - \frac{8}{24}\right)} = 2{,}51$$

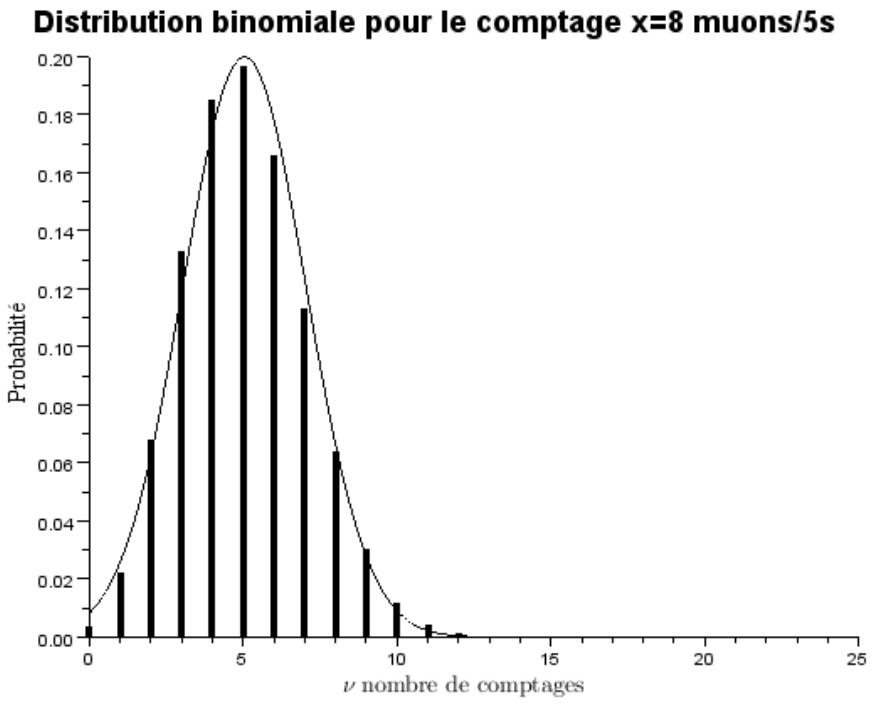
Cas particuliers :

- Comme en général *N* est très grand, cette expression est le plus souvent connue sous la forme $s(k) \approx \sqrt{k}$. Dans notre cas, $s(k) \approx \sqrt{k} = \sqrt{8} = 2{,}8.$, ce qui est une assez bonne estimation. Dans la suite de notre exposé, nous considérerons que cette formule s'applique[68] et les barres d'erreur sur les comptages seront telles que l'on aura l'intervalle $[k - \sqrt{k}\,; k + \sqrt{k}]$ représenté par une barre.

- Si k est grand[69], la distribution binomiale tend vers une loi normale de moyenne k et d'écart type $s(k) = \sqrt{k(1 - \frac{k}{N})}$ ($\sqrt{k}$ si l'efficacité de comptage est faible, c'est-à-dire que $\frac{k}{N} \ll 1$) et de moyenne $k = N\bar{e}$.

[68] Il faut néanmoins rester vigilant vis-à-vis de l'applicabilité de cette dernière formule simplifiée. Si on a un nombre de comptages *N* proche de 1, on doit utiliser l'expression complète pour obtenir le résultat correct.

[69] Si k est petit et que p est également petit , on est dans le cadre d'application de la loi de Poisson qui est asymétrique, ce qui conduit à un intervalle de confiance également asymétrique autour de la moyenne k.



On a superposé à la distribution précédente une gaussienne d'écart-type $\bar{s}(k) = \sqrt{k(1-\frac{k}{N})}$ *et de moyenne* $k = N\bar{e} = 5$. *On voit donc que même pour un comptage assez faible (ici 5), la fluctuation sur un comptage est quasiment gaussien*[70] [71].

[70] Ceci justifie les ajustements par la méthode du χ^2 que nous utilisons dans la partie suivante.
[71] Dans ce cas, le résultat est donné par un intervalle: k ± s(k), qui est à 68,2% de confiance (95,4% pour k ± 2.s(k)). Voir ci-dessous.

LEXIQUE

- **Antiparticule**, f
  particule de même masse mais dont les charges (c'est-à-dire tous ses nombres quantiques) sont opposées à celle de la particule correspondante.

- **Baryon**, m
  particule composée de trois quarks, transmettant et subissant l'interaction forte. Ex : proton et neutron.

- **Cherenkov (effet)**, m
  production de lumière par une particule chargée traversant un milieu transparent à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu.

- **Chromodynamique quantique (QCD)**, f
  théorie des interactions fortes, dites aussi de « couleur »

- **Coïncidence (circuit de)**, m
  dispositif électronique testant la simultanéité de deux signaux. Il correspond à la fonction logique ET de l'algèbre de Boole.

- **Compton (effet)**, m
  déviation d'un photon, rayon X ou gamma, par un électron libre ou faiblement lié, découverte par A. H. Compton en 1923

- **Couleur**, f
  Charge (dans le sens de nombre quantique) que possèdent les sensibles à l'interaction forte.

- **Electrodynamique quantique (QED)**, f
  théorie quantique des interactions électromagnétiques. Le très haut pouvoir prédictif de l'électrodynamique quantique en a fait un modèle de théorie physique.

- **Erreur aléatoire,** f
  composante de l'**erreur de mesure** qui, dans des **mesurages** répétés, varie de façon imprévisible

- **Erreur de mesure,** f
  Erreur, f
  différence entre la **valeur mesurée** d'une **grandeur** et une **valeur de référence.**

- **Erreur systématique,** f
  composante de l'**erreur de mesure** qui, dans des **mesurages** répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible.

- **Fidélité de mesure,** f
  Fidélité, f

étroitesse de l'accord entre les **indications** ou les **valeurs mesurées** obtenues par des **mesurages** répétés du même objet ou d'objets similaires dans des conditions spécifiées.

- **Freinage (rayonnement de)**, m
  Bremstrahlung
  rayonnement émis par une particule chargée traversant un champ électrique.

- **Gerbe**, f
  cascade de particules produites (notamment dans l'atmosphère) par l'impact d'un proton ou d'un noyau de très haute énergie.

- **Gluon**, m
  particule qui transmet l'interaction de couleur entre les quarks.

- **Grandeur,** f
  propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence.

- **Hadron**, m
  particule sensible à l'interaction forte (proton, neutron, pion...)

- **Hadronique**
  composé de hadrons

- **Incertitude de mesure,** f
  Incertitude, f
  paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des **valeurs** attribuées à un **mesurande,** à partir des informations utilisées.

- **Incertitude-type,** f
  Incertitude de mesure exprimée sous la forme d'un écart-type.

- **Jauge (théorie de)**, f
  En physique théorique, une théorie de jauge est une théorie des champs basée sur un groupe de métrie locale, appelé groupe de jauge, définissant une « invariance de jauge ». Le prototype le plus simple de théorie de jauge est l'électrodynamique classique de Maxwell.

- **Justesse de mesure,** f
  Justesse, f
  étroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de **valeurs mesurées** répétées et une **valeur de référence**

- **Kaon (méson K)**, m
  méson contenant un quark « étrange », de masse proche de 500 MeV

- **Lepton**, m

particule de base du Modèle Standard sensible à l'interaction faible et insensible à l'interaction forte.

- **Mesurage,** m
  Mesure, f
  processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une **grandeur**

- **Mesurande,** m
  grandeur que l'on veut mesurer

- **Méson**, m
  particule composée d'un quark et d'un antiquark, transmettant et subissant l'interaction forte. Le méson le plus connu est le pion (méson π), découvert en 1947.

- **Modèle Standard**, m
  ensemble de théories comprenant la théorie électrofaible et la chromodynamique quantique, synthèse de l'essentiel des connaissances actuelles sur les particules et leurs interactions.

- **Muon (μ)**, m
  particule analogue à l'électron mais de masse deux cents fois plus élevée. Le muon est l'un des leptons de base du Modèle Standard.

- **Neutrino**, m
  particule de masse très faible et de charge électrique nulle. Le Modèle Standard admet trois espèces de neutrinos. Ils ne sont sensibles qu'à l'interaction faible.

- **Photocathode**, f
  surface sensible d'un photomultiplicateur émettant un électron sous l'impact d'un photon.

- **Photomultiplicateur**, m
  dispositif photoélectrique transformant un photon en un signal électronique.

- **Photon**, m
  boson vecteur de la force électromagnétique. La lumière est constituée de photons, ainsi que les rayons X et gamma.

- **Quark**, m
  composant élémentaire des particules à interaction forte. Les quarks interagissent par l'interaction dite de « couleur », correspondant à l'échange de gluons.

- **Résultat de mesure,** m
  Résultat d'un mesurage, m
  ensemble de **valeurs** attribuées à un **mesurande,** complété par toute autre information pertinente disponible

- **Scintillateur**, m

matériau transparent émettant de la lumière quand il est traversé par une particule chargée en mouvement. Cette lumière peut-être transformée en signal électrique à l'aide d'un photomultiplicateur.

- **Section efficace**, f
  nombre exprimant la probabilité d'une interaction entre particules. Ce nombre à la dimension d'une surface.

- **Tau**, m
  lepton chargé découvert en 1972, analogue à l'électron et au muon, mais de masse beaucoup plus élevée.

- **Temps de vie**, m
  dans une désintégration, le temps de vie est le temps nécessaire pour que la population d'un échantillon passe de N_0 à $N_0/2$.

- **Théorie de jauge**, f
  théorie permettant de décrire les interactions fondamentales à partir des symétries quelles conservent. Celles-ci servent de base au choix du groupe (au sens mathématique du terme) dit de jauge sur lequel est basé la théorie. Par exemple, l'électromagnétisme est basé sur le groupe U(1) de symétrie car l'interaction est invariante par changement de phase spatiale et temporelle des champs décrivant les particules.

- **Valeur vraie,** f
  Valeur vraie d'une grandeur, f
  valeur d'une grandeur compatible avec la définition de la **grandeur**