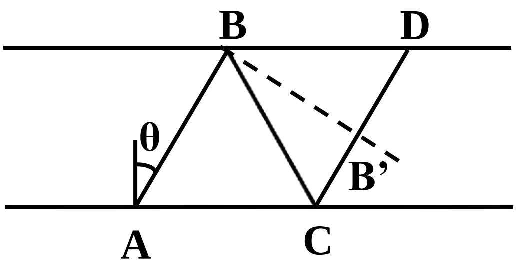
Exercice 1 : Fibre à saut d'indice



1. $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 (BC + CB') = 4\pi \frac{a}{\lambda} n_1 cos\theta$

Il y a propagation si δ=m2π où m est un entier. On a donc :

$$\cos\theta_m = m\frac{\lambda}{2n_1 a}$$

Le nombre de mode est limité par l'angle de réfraction limite :

$$\cos\ \theta_m < \cos\ \theta_l$$

L'expression de l'angle limite donne :

$$m < \frac{2a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

D′où

$$N_m = 1 + E\left(\frac{2a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$$

AN : $N_m = 49$

2. D'après **1.**, on a :

$$f > m\frac{c}{2a}\frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

On a donc un filtre passe-haut de fréquence de coupure :

$$f_{c,m} = m\frac{c}{2a}\frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

3. Le mode m=1 ne doit pas pouvoir se propager, on veut donc :

$$\cos\theta_1 \geq \cos\theta_l$$

$$\text{a} \leq \frac{\lambda}{2\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

AN : $a \leq 2{,}07\mu m$

Exercice 2 : Etude du fond diffus cosmologique

1. On cherche le minimum de

$$f(\lambda) = \lambda^5 \left(\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) - 1\right) \text{ où } \lambda_0 = \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{k_B T}}$$

La dérivation donne :

$$0 = 5\lambda^4 \left(\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) - 1\right) - \lambda_0 \lambda^3 \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)$$

$$(5\lambda - \lambda_0) \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) = \lambda \text{ pour } \lambda \neq 0$$

$$5 = \frac{\frac{\lambda_0}{\lambda}\left(\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) + 1\right)}{\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)}$$

$$5 \approx \frac{\lambda_0}{\lambda} \text{ d'après l'hypothèse de l'énoncé}$$

Donc

$$\lambda_m = \frac{\mathrm{hc}}{5\mathrm{k_B T}}$$

Vérification de l'hypothèse utilisée :

$$\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_m}\right) = \exp(5) = 150 \gg 1. \text{ Hypothèse vérifiée.}$$

2. D'après **1.**,

$$\lambda_m \mathrm{T} = \mathrm{K_W} \text{ avec } \mathrm{K_W} = \frac{\mathrm{hc}}{5\mathrm{k_B T}}$$

$$\text{AN : } \mathrm{K_W} = 2{,}9.10^{-3}\mathrm{K.m}$$

3.

$$\mathrm{E} = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\mathrm{E} = \frac{hcT}{K_W} \text{ d'après la loi de Wien}$$

Donc

$$\mathrm{T} = \frac{K_W E}{hc}$$

$$\text{AN : } \mathrm{T} = 3{,}2.10^4\mathrm{K}$$

4. Si l'univers est en expansion alors les longueurs d'onde augmentent donc d'après la loi de Wien les températures associées diminuent.

5.

$$\mathrm{T} = \frac{K_W}{\lambda_m} \quad AN\!: \; T = 2{,}7K$$

Domaine radio hyperfréquences (ou rayonnement millimétrique)

6. D’après l’effet Doppler relativiste :

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{1}{\gamma(1+\frac{\mathrm{v_e}}{c}cos\theta)}$$

où $\mathrm{v_e}$ est la vitesse de la source

Donc

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{1}{\gamma(1-\frac{\mathrm{v_S}}{c}cos\theta)}$$

où $\mathrm{v_S}$ est la vitesse du système solaire

Donc

$$\frac{T(\theta)}{< T >} = \frac{1}{\gamma(1-\frac{\mathrm{v_S}}{c}cos\theta)}$$

Or $v_S \ll c$, donc

$$\frac{T(\theta)}{< T >} \approx \left(1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{\mathrm{v}}{c}cos\theta\right)$$

Finalement,

$$\frac{T(\theta)}{< T >} \approx 1+\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}cos\theta$$

au premier ordre.

Donc l’ordre de grandeur de la vitesse du système solaire est $10^6 m.s^{-1}$