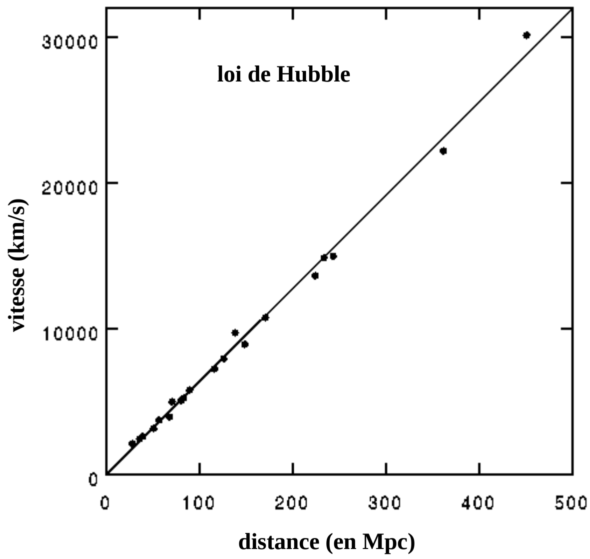
Exercice 1 : effet Doppler relativiste

En 1929, E. Hubble a établi que les galaxies éloignées de la Terre s'éloignent de nous avec une vitesse v proportionnelle à leur distance à la Terre (cf graphe de la loi de Hubble).



Dans le spectre d'émission d'une des galaxies situées dans la constellation de la Grande Ourse on détecte la raie H_α de la série de Balmer (correspondant à la transition du niveau $n_i = 3$ au niveau $n_f = 2$ pour l'atome d'hydrogène) dont la mesure de la longueur d'onde donne $\lambda = 0{,}689$ µm. Quelle est la vitesse de la galaxie et à quelle distance (en année-lumière) se situe-t-elle ?

On donne :

- 1 Mpc (megaparsec) $= 3,1.10^{22}$ m $= 3,2.10^6$ a l.
- la célérité de la lumière dans le vide : c $= 3,00.10^8$ m/s
- la constante de Rydberg : $R_H = 1,097.10^7$ m^{-1}

Loi de Balmer : $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$.

Pour la raie H_α, on obtient $\lambda = 656{,}3$ nm alors qu'on mesure $\lambda' = 689$ nm

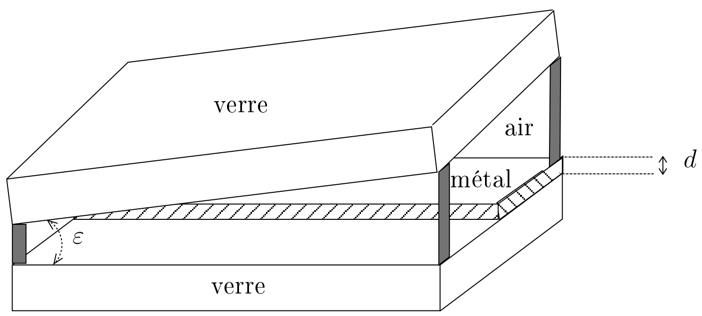
L'effet Doppler relativiste s'écrit : $\nu' = \dfrac{c}{\lambda} = \nu\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\nu = \dfrac{c}{\lambda}\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$ ce qui donne : $\beta = \dfrac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2}{1+\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2}$.

A.N. : $\beta = v/c = 0,0485$ soit $v = 1,46.10^7$ m.s^{-1} et une distance $d = 240$ Mpc $= 7,7.10^6$ a.l.

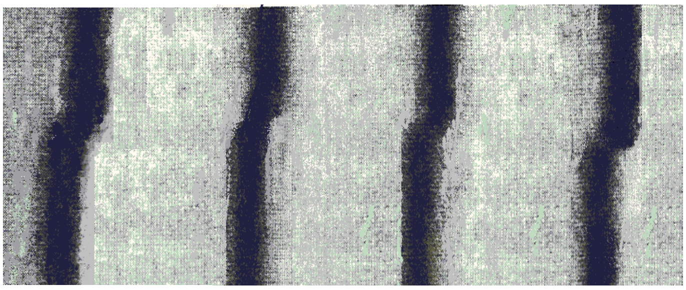
Si la formule non relativiste $\nu' = (1-\beta)\nu$ a été utilisée, on a $\beta = 1 - \frac{\lambda}{\lambda'} = 0,047$ et $v = 1,42.10^7$ m.s^{-1}

Exercice 2 : mesure de l'épaisseur d'une couche mince

On considère deux lames de verres dont les faces en regard forme un dièdre d'angle ε très faible. Une couche de métal d'épaisseur d recouvre partiellement la lame du dessous. Le coin d'air ainsi constitué est éclairé avec un faisceau parallèle monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm, en incidence normale. On observe des franges d'interférence localisées au voisinage des plaques, et parallèles à l'arête, décalées du fait de la présence du dépôt de métal.



1. En mesurant le décalage relatif des franges sur l'image ci-dessous, déterminer l'épaisseur d.

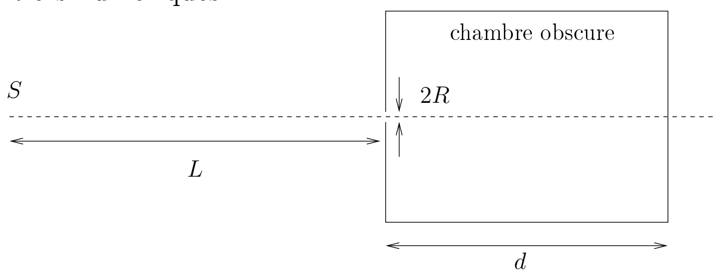


2. Comment est modifiée la figure d'interférence si on augmente l'angle ε ? Si on remplace l'air entre les lames par de l'eau ?

1. La traversée du coin d'air donne une différence de marche $\delta = 2e$ où e est l'épaisseur du coin d'air traversé. La différence de marche vaut $\delta = p\lambda$ pour une frange sombre.
   Comme l'angle ϵ est très faible, la position de la frange sombre n°p est reliée à l'épaisseur e du coin d'air traversée par $X_p \simeq \dfrac{e_p}{\epsilon} = \dfrac{p\lambda}{2\epsilon}$ avec une interfrange $i = \frac{\lambda}{2\epsilon}$.
   L'introduction du métal modifie l'épaisseur du coin d'air et donc la différence de marche et décale les franges de $\delta X = \frac{d}{\epsilon}$.
   On obtient un décalage relatif des franges $\frac{\delta X}{i} = \frac{2d}{\lambda}$ soit $d = \frac{\delta X}{i}\frac{\lambda}{2}$
   A.N. : $\frac{\delta X}{i} = \frac{0,3}{2,3} = 0,13$ soit $d = 38$ nm. On accepte l'intervalle [30nm,40nm].
2. Si on augmente ϵ, on diminue l'interfrange : les franges se resserrent. Si on remplace l'air par de l'eau, cela revient à changer λ par λ/n donc là encore l'interfrange diminue.

Exercice 3 : sténopé

L'appareil photographique à sténopé est un appareil sans viseur ni objectif : il est constitué par une boîte opaque (chambre obscure) dont l'une des faces est percée d'un minuscule trou, de rayon R, laissant entrer la lumière et permettant de former l'image inversée de la réalité extérieure sur la face opposée, située à la distance $d = 20$ cm de la face trouée. Cette image peut servir à impressionner un support photosensible comme une plaque photographique, mais de nos jours, certains artistes utilisent ce procédé avec des boîtiers numériques.



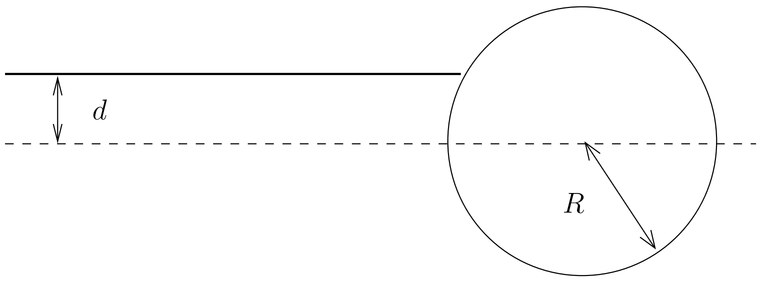
1. En considérant un objet ponctuel situé à une distance $L = 10$ m sur l'axe du trou, déterminer le rayon R optimal du trou pour que le rayon de la tâche de lumière au fond de la boîte soit le plus petit possible : on prendra une longueur d'onde moyenne correspondant au maximum de sensibilité de l'œil : $\lambda = 550$ nm.
2. Dans cette configuration optimale, quelle est la résolution angulaire de l'appareil à sténopé ?

1. rayon de la tâche d'Airy : $1,22\dfrac{\lambda}{2R}d$ rayon de la tâche lumineuse due à l'optique géométrique : $\dfrac{R}{L}(L+d) \simeq R$. La tâche observée a pour rayon $\min\left(1,22\dfrac{\lambda}{2R}d, R\right)$. Le rayon optimal du trou est obtenu pour $R = \sqrt{1,22\dfrac{\lambda d}{2}}$.
2. En utilisant le critère de Rayleigh, la résolution angulaire est $1,22\frac{\lambda}{2R} = 1,3$ mrad $= 4$ min d'arc.

Exercice 4 : charge d'une sphère conductrice

Un accélérateur de particules produit des protons avec pour énergie cinétique $E = 2$ keV. Un faisceau de ces protons est dirigé vers une sphère métallique, de centre O, de rayon R, initialement reliée à la Terre (potentiel nul) puis isolée et située à grande distance de l'accélérateur. La distance entre le centre de la sphère et la direction du faisceau incident est notée $d = R/2$.

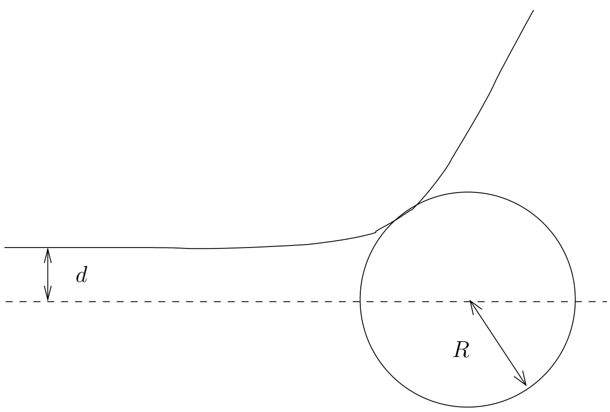
1. Au fur et à mesure que la sphère se charge, son potentiel électrostatique augmente. Expliquer pourquoi la charge atteint une valeur limite si l'accélérateur fonctionne pendant une durée suffisamment longue. Représenter sur la figure la trajectoire des protons lorsque la charge a atteint sa valeur limite.
2. Calculer le potentiel final de la sphère.



Hypothèses : On suppose que l'intensité du faisceau est suffisamment faible pour que l'interaction mutuelle entre les protons du faisceau puisse être négligée. On suppose pour simplifier que la charge finale est uniformément répartie à la surface de la sphère.

Dans ces conditions, la force électrostatique créée par la sphère sur une charge extérieure est la même que celle créée par une charge égale à celle de la sphère, concentrée en son centre O. Enfin l'énergie potentielle E_p d'une charge q placée en un point où existe un potentiel électrostatique U est égale au produit de la charge par ce potentiel (à une constante additive près) : $E_p = qU$.

La sphère initialement neutre, puis isolée, va se charger lentement positivement. Au bout d'un moment, elle sera suffisamment chargée pour produire une interaction répulsive suffisante, et les électrons qui seront encore en contact avec la sphère, suivront la trajectoire ci-dessous :



Conservation de l'énergie entre le départ et le point A :
$E = \frac{1}{2}mv^2 + eU = \frac{1}{2}mv_0^2$ où U est le potentiel de la sphère
Pour une force centrale, il y conservation du moment cinétique : $v_0 d = vr$;
On en déduit : $U = (1 - \frac{d^2}{R^2})\frac{E}{e}$ = environ 1500V