

### Problème : les points de Lagrange

Il existe au voisinage de l'orbite de la Terre autour du Soleil des points particuliers où un objet (de faible masse), par exemple une sonde, situé en ces points n'est soumis à aucune force (dans le référentiel de la Terre), et par conséquent tourne autour du Soleil avec la même vitesse angulaire que la Terre. Ces points, appelés points de Lagrange, sont au nombre de cinq (On les désigne par  $L_i$ , où  $i = 1, \dots, 5$  – voir figure 1).

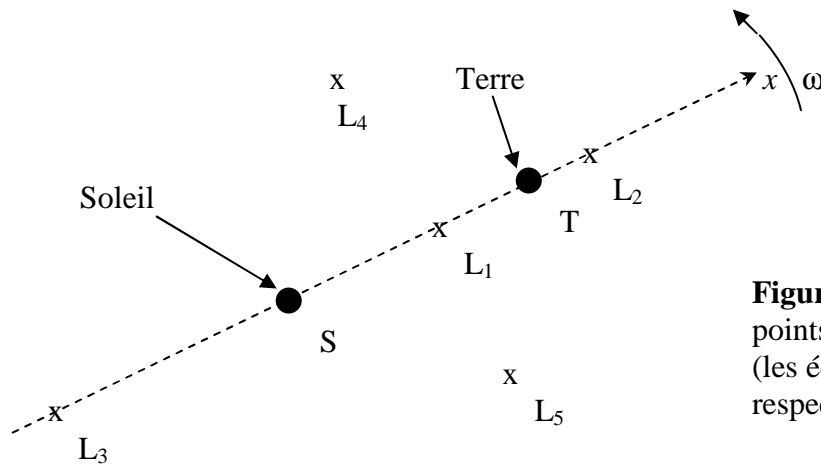
Ces points présentent un grand intérêt pour les sondes spatiales destinées aux observations lointaines et de longue durée. En effet, ils permettent des économies substantielles de combustible pour le contrôle d'orbite de ces sondes.

Les masses du Soleil et de la Terre sont respectivement :

Masse du Soleil  $M_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg

Masse de la Terre  $M_T = 6 \cdot 10^{24}$  kg

Distance Terre-Soleil  $R = ST = 1,5 \cdot 10^8$  km



**Figure 1** : Position des points de Lagrange (les échelles ne sont pas respectées).

1 – Exprimer la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation de la Terre autour du Soleil en fonction de la constante de gravitation universelle  $G$ , des masses du Soleil  $M_S$  et de la Terre  $M_T$ , et de la distance Terre-Soleil  $R = ST$ .

2 – Dans le référentiel  $\mathfrak{R}$  en rotation autour du centre de masse du système Soleil-Terre à la vitesse angulaire  $\omega$ , référentiel dans lequel le Soleil et le centre de la Terre sont immobiles, quelles sont les forces auxquelles est soumis un objet de masse  $m$  ? Exprimer que cet objet se trouve en un des points de Lagrange.

3 – On se propose de rechercher ici les points de Lagrange alignés sur l'axe Soleil-Terre, qui sont au nombre de 3. Ce sont les points  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  représentés sur la figure.

a – Que devient la relation obtenue à la question 2 pour le point  $L_1$  ?

On appellera  $l_1 = L_1T$  la distance de  $L_1$  à la Terre.

On suppose cette distance  $l_1$  petite par rapport à la distance Terre-Soleil  $R$ , de sorte que  $\epsilon = \frac{l_1}{R} \ll 1$ .

En déduire la valeur de  $\epsilon$ . L'approximation précédente est-elle justifiée ?

Calculer numériquement  $l_1$ .

b – Que devient cette même relation pour le point  $L_2$  (repéré par sa distance à la Terre  $l_2 = L_2T$ ) ? En utilisant le même raisonnement que pour  $L_1$ , déterminer la position de  $L_2$ .

c – Montrer que le point  $L_3$  est approximativement le symétrique de la Terre par rapport au Soleil.

4 – Il existe deux autres points de Lagrange,  $L_4$  et  $L_5$ , situés dans le plan de l'écliptique (c'est-à-dire le plan de l'orbite terrestre), mais non sur l'axe Terre-Soleil.

A quelle condition un tel point de Lagrange  $L_i$  existe-t-il ?

En remarquant que le Soleil a une masse beaucoup plus grande que la Terre, en déduire les distances  $SL_i$  et  $TL_i$  en fonction de  $R = ST$  (on pourra utiliser la relation obtenue à l'ordre 0 et à l'ordre 1 en  $\frac{M_T}{M_S}$ ) et préciser les positions de  $L_4$  et  $L_5$ .

5 – Plusieurs sondes d'intérêt scientifiques sont actuellement placées aux points de Lagrange. On préfère alors utiliser les points de Lagrange les plus proches de la Terre.

a - SOHO est une sonde destinée à étudier le Soleil, en particulier ses rayonnements émis, ses oscillations, le vent solaire..., qui a été lancée en 1995. On a choisi de la placer en un point de Lagrange. Lequel ?

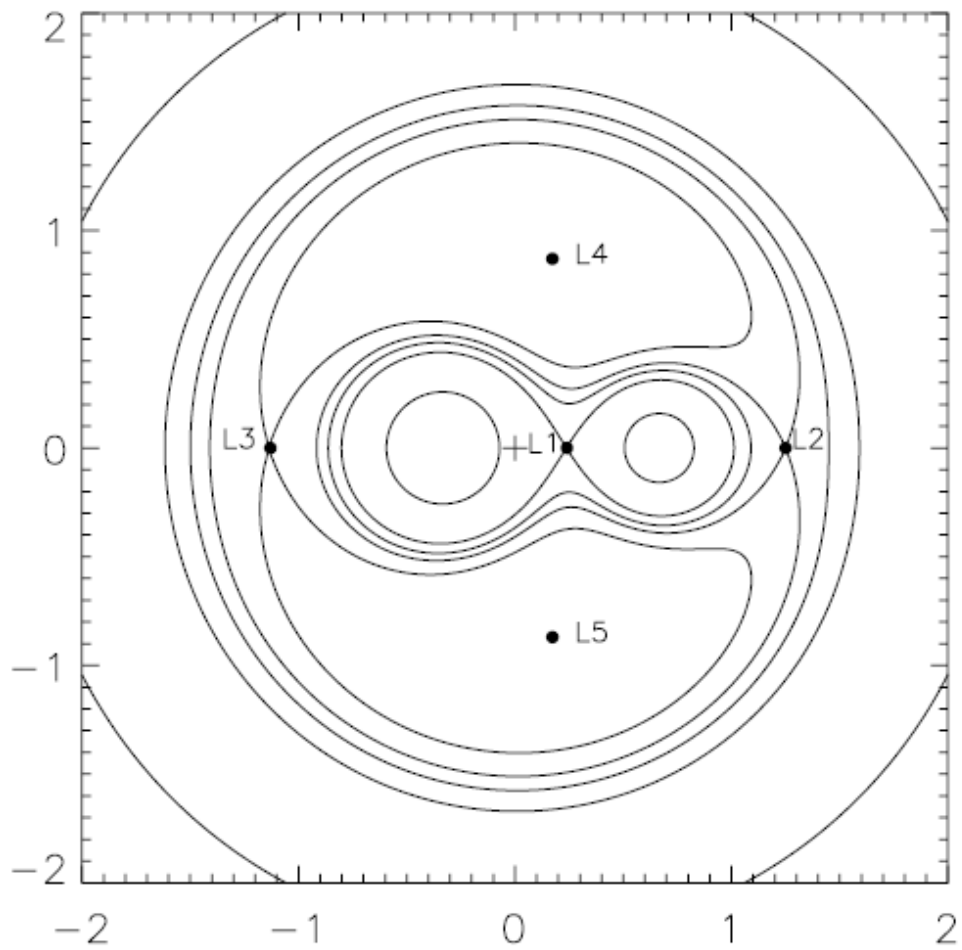
b - La sonde WMAP, lancée en 2001, est conçue pour cartographier le rayonnement thermique cosmologique, à 2,7 K. Elle a aussi été placée en un point de Lagrange. Lequel ?

Dans les deux cas, justifiez votre réponse.

6 – La carte de l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet dans le référentiel  $\mathfrak{R}$  est donnée par la figure 2. Bien que ça ne soit pas directement visible sur cette carte, on indique que les points de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$  correspondent à des minima d'énergie potentielle.

a - En déduire quels sont les points de Lagrange correspondant à des positions d'équilibre stables ou instables. Justifiez votre réponse. Est-ce problématique pour les sondes mentionnées plus haut ? Eventuellement, que cela impose-t-il ?

b – En quels points de Lagrange peut-on espérer rencontrer des satellites naturels ? Dans le système Jupiter-Soleil, on a observé l'existence de nombreux astéroïdes de ce type, qui sont appelés astéroïdes Troyens. Décrire leur trajectoire.



**Figure 2 :** Carte de l'énergie potentielle gravitationnelle dans le référentiel tournant avec la Terre autour du Soleil. Les courbes représentées sont des courbes équipotentielles.

