Corrigé du problème : les points de Lagrange

1 - $\omega^2 = \dfrac{G(M_S + M_T)}{R^3}$, ce qui est la 3ème loi de Kepler.

2 – 3 forces : l'attraction gravitationnelle du Soleil, celle de la Terre, et la force d'inertie d'entrainement (centrifuge) $\vec{F} = -GmM_S \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_S}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^3} - GmM_T \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_T}{|\vec{r} - \vec{r}_T|^3} + m\omega^2 \vec{r}$ ($\vec{r}, \vec{r}_S$ et $\vec{r}_T$ désignant les positions de la sonde, du Soleil et de la Terre par rapport au centre de masse du système)

Au point de Lagrange, leur résultante est nulle, d'où : $0 = -M_S \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_S}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^3} - M_T \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_T}{|\vec{r} - \vec{r}_T|^3} + \dfrac{M_S + M_T}{R^3} \vec{r}$

3 – a – Pour L_1, cette relation devient : $-\dfrac{M_s}{(R - l_1)^2} + \dfrac{M_T}{{l_1}^2} + M_S \dfrac{R - l_1}{R^3} = 0$ (en négligeant la masse de la Terre par rapport à celle du Soleil et en assimilant le centre de masse au Soleil dans le dernier terme), d'où $0 = \dfrac{M_T}{\varepsilon^2} + (1 - \varepsilon - \dfrac{1}{(1-\varepsilon)^2}) M_S \approx \dfrac{M_T}{\varepsilon^2} - 3\varepsilon M_S$. Il vient $\varepsilon = \left(\dfrac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3}$.

On a donc $\varepsilon = 10^{-2}$, ce qui justifie a posteriori l'approximation faite, et $l_1 = 1{,}5.10^6$ km.

b – En procédant de la même façon, cette relation devient pour L_2 : $-\dfrac{M_s}{(R + l_2)^2} - \dfrac{M_T}{{l_2}^2} + M_S \dfrac{R + l_2}{R^3} = 0$, d'où $\varepsilon = \dfrac{l_2}{R} = \left(\dfrac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3}$. Ainsi $l_1 = l_2$, L_2 est le symétrique de L_1 par rapport à la Terre.

c – Pour L_3, situé beaucoup plus loin de la Terre, on peut négliger l'attraction de la Terre devant celle du Soleil, d'où r = R. L_3 est (à peu près) le symétrique de la Terre par rapport au Soleil.

4 – Dans la relation obtenue en question 2, $\vec{r}$ est le seul vecteur qui ne soit pas selon l'axe Terre-Soleil. Pour qu'une solution hors de l'axe soit possible, il faut donc que le coefficient pondérant ce vecteur soit identiquement nul, donc : $0 = -\dfrac{M_S}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^3} - \dfrac{M_T}{|\vec{r} - \vec{r}_T|^3} + \dfrac{M_S + M_T}{R^3}$.

A l'ordre 0 en $\dfrac{M_T}{M_S}$, on obtient donc $|\vec{r} - \vec{r}_S| = SL_i = R$, et à l'ordre 1, on obtient $|\vec{r} - \vec{r}_T| = TL_i = R$.

Les triangles STL_4 et STL_5 sont donc équilatéraux.

5 – Seuls les points L_1 et L_2 (les plus proches) sont utilisables pour y installer une sonde.

a – SOHO, observant le Soleil, doit être en L_1 (de L_2, le Soleil est caché par la Terre).

b – WMAP, observant des rayonnements faibles par rapport à ceux émis par le Soleil, doit être dans l'ombre de la Terre, donc en L_2.

Notez que L_2 est encore partiellement éclairé par le Soleil (l'ombre de la Terre n'y est que partielle). En effet, sachant que le diamètre du Soleil est $\phi_S \approx 1{,}4.10^6$ km, du point L_2 le Soleil apparaît sous un diamètre angulaire apparent $\alpha_S \approx \dfrac{\phi_S}{R + l_2} \approx 0{,}53$ °, tandis que la Terre (dont le diamètre est $\pi\phi_T = 4.10^4$ km)y apparaît sous un diamètre angulaire apparent $\alpha_T \approx \frac{\phi_T}{l_2} \approx 0{,}49$ °, inférieur à α_S. Donc L_2 n'est à l'ombre de la Terre que de façon partielle (même si la plus grande partie du disque solaire y est occultée par la Terre).

6 – a - Les lignes équipotentielles se croisent en L_1, L_2 et L_3. C'est donc que l'énergie potentielle y a localement la forme d'une selle de cheval (ce ne peut pas être un extrémum). Donc ces points sont des points d'équilibre instables.
Ce n'est pas problématique pour des sondes artificielles : il leur faut néanmoins un contrôle de trajectoire (dans les directions instables).
b – Seuls les points de Lagrange stables peuvent conserver des satellites naturels. On ne peut trouver des astéroïdes que en L_4 et L_5. C'est le cas des astéroïdes Troyens dans le système Jupiter-Soleil. Leur trajectoire est la même que celle de Jupiter (à la limite où la masse de Jupiter est négligeable devant celle du Soleil). Ils sont seulement en avance ou en retard d'un sixième de l'année Jovienne sur cette trajectoire par rapport à Jupiter.