Le ressort à longueur effective nulle et le jouet « Slinky »

Un ressort de longueur effective nulle (« zero effective length spring » dit ZLS) est un ressort inhabituel. En effet, la force F que ce ressort exerce quand il est étiré est proportionnelle à sa longueur totale L : $F = kL$ avec $L > L_0$ où L_0 est la longueur minimale du ressort, c'est à dire sa longueur quand il n'est pas étiré. La figure 1 montre la relation entre la force F et la longueur du ressort L pour un ZLS ; la pente de la droite est la constante de rappel k du ressort.

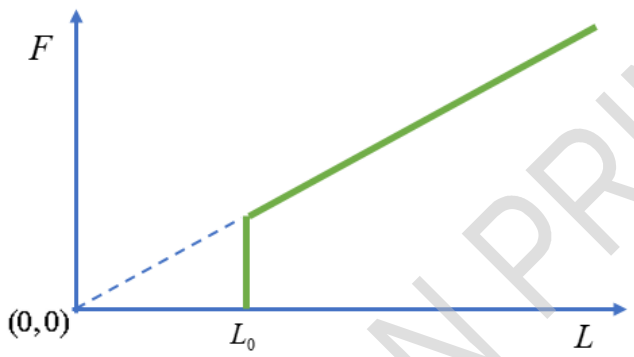


Figure 1 : relation entre la force F et la longueur L du ressort

Les ZLS sont utiles en sismographie car ils permettent des mesures très précises des variations de l'accélération gravitationnelle g.

On considère ici un ZLS homogène dont le poids Mg est plus grand que kL_0. On définit une grandeur sans dimension $\alpha = \dfrac{kL_0}{Mg} < 1$, afin de caractériser la raideur relative du ressort.

Le jouet appelé « Slinky » peut être (mais pas nécessairement) basé sur un ZLS.

Partie A : Statique (3,0 points)

A.1	On considère un segment de longueur $\Delta\ell$ du ressort ZLS non étiré. Il est ensuite étiré par une force unique F. Exprimer la nouvelle longueur Δy de ce segment en fonction de $F, \Delta\ell$ et des paramètres du ressort.	0.5pt

A.2	On considère encore un segment de longueur $\Delta\ell$ du ressort ZLS non étiré. Exprimer le travail ΔW nécessaire pour l'étirer de sa longueur intiale $\Delta\ell$ à sa longueur finale Δy.	0.5pt

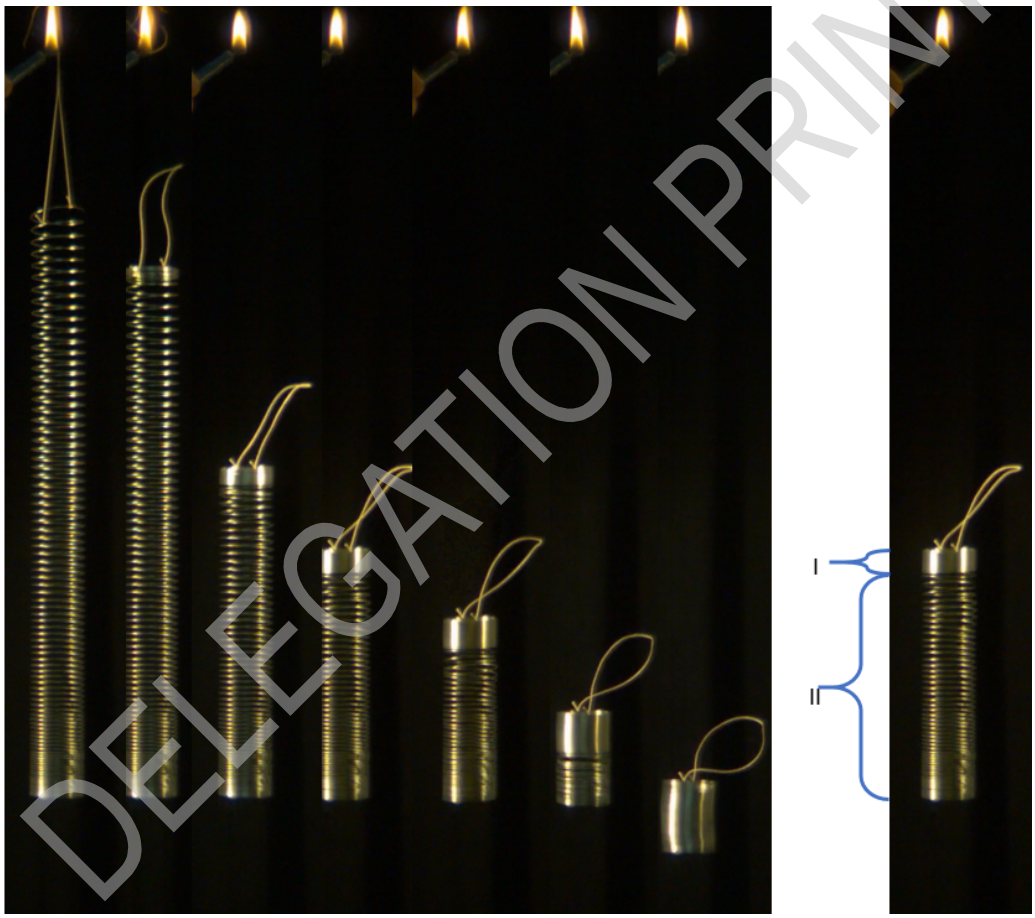
Pour la suite de ce problème, on caractérise un point quelconque sur le ressort par sa distance $0 \leq \ell \leq L_0$ à l'extrémité inférieure du ressort lorsque celui-ci n'est pas étiré.

A.3	Supposons que l'on accroche le ressort par son extrémité supérieure, de sorte qu'il s'étire sous l'effet de son propre poids. Quelle est la longueur totale H du ressort suspendu à l'équilibre ? Exprimer la réponse en fonction de L_0 et α.	2.0pt

DELEGATION PRINT

Partie B : Dynamique (5,5 points)

L'expérience montre que lorsque le ressort est suspendu au repos puis lâché, il se contracte progressivement par le haut, tandis que la partie inférieure reste immobile (voir figure 2). Au cours du temps, la partie contractée du ressort se déplace comme un solide tout en accumulant des spires supplémentaires, tandis que la partie immobile devient de plus en plus courte. Chaque point du ressort ne commence à bouger que lorsque la partie en mouvement l'atteint. L'extrémité inférieure du ressort ne commence à bouger que lorsque le ressort est complètement contracté et donc que sa longueur devient L_0. Après cela, le ressort contracté continue de tomber, en chute libre comme tout corps rigide soumis à la gravité.



DELEGATION PRINT

Figure 2. À gauche : une séquence de photos prises lors de la chute libre d'un Slinky. À droite : la partie mobile I et la partie fixe II pendant la chute libre du ressort.

Pour les autres questions de ce problème, il est demandé de baser les réponses sur le modèle décrit précédemment. On pourra négliger la résistance de l'air, mais il n'est pas permis de négliger L_0.

B.1	Exprimer le temps t_c qui s'écoule entre le moment où le ressort est lâché et celui où il se contracte complètement à sa longueur minimale L_0. Exprimer la réponse en fonction de L_0, g et α. Calculer la valeur numérique de t_c pour un ressort de paramètres $k = 1,02\ \mathrm{N.m^{-1}}$, $L_0 = 0,055\,\mathrm{m}$ et $M = 0,201\,\mathrm{kg}$, tout en prenant $g = 9,80\,\mathrm{m.s^{-2}}$.	2.5pt

B.2	Dans cette question, ℓ représente la coordonnée de la limite entre les parties mobile (sur la figure 2, la partie I) et immobile (la partie II). À un certain moment, alors qu'une partie immobile existe encore, sa masse est $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0}M$, et la partie mobile se déplace avec une vitesse instantanée uniforme $v_I(\ell)$. Montrer qu'à ce moment (alors qu'il existe encore une partie immobile) la vitesse de la partie mobile est $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Exprimer les constantes A et B en fonction de L_0, g et α.	2.5pt

B.3	En se basant sur la question B.2, trouver la vitesse minimale $v_{\min}$ de la partie mobile du ressort au cours de son mouvement, après avoir été lâché et avant qu'il ne touche le sol. Exprimer la réponse en fonction de L_0, α, A et B.	0.5pt

Partie C : Étude énergétique (1,5 point)

C.1	Exprimer la chaleur Q qui a été générée par une perte d'énergie mécanique, à partir du moment où le ressort est lâché jusqu'au moment où il touche le sol. Exprimer la réponse en fonction de L_0, M, g et α.	1.5pt

DELEGATION PRINT