Résolution de problème : GPS et relativité.

Syllabus de la préparation aux IPhOs France

5 Relativité

Principe de relativité ; Dilatation du temps

2.4 Mécanique céleste

Loi de la gravité, énergie potentielle gravitationnelle d'un point matériel, lois de Kepler

6.1 Densité de probabilité
Dualité ondes-particules : relation entre fréquence et énergie (pour le photon)

Compétences et connaissances du programme de Terminale S :

Notions et contenus	***Compétences exigibles***
Temps et relativité restreinte Invariance de la vitesse de la lumière et caractère relatif du temps. Postulat d'Einstein. Tests expérimentaux de l'invariance de la vitesse de la lumière. Notion d'événement. Temps propre. Dilatation des durées. Preuves expérimentales.	Savoir que la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens. Définir la notion de temps propre. Exploiter la relation entre durée propre et durée mesurée. Extraire et exploiter des informations relatives à une situation concrète où le caractère relatif du temps est à prendre en compte.

Notions et contenus	***Compétences exigibles***
Définition du temps atomique.	Extraire et exploiter des informations pour justifier l'utilisation des horloges atomiques dans la mesure du temps.
Notions et contenus	***Compétences exigibles***
Lois de Newton Mouvement d'un satellite. Lois de Kepler.	Connaître et exploiter les trois lois de Newton. Démontrer que, dans l'approximation des trajectoires circulaires, le mouvement d'un satellite, d'une planète, est uniforme. Établir l'expression de sa vitesse et de sa période. Connaître les trois lois de Kepler ; exploiter la troisième dans le cas d'un mouvement circulaire.

Références :
De la relativité au GPS, éditions ellipses, Pierre SPAGNOU
Le cours de physique de Feynman, Electromagnétisme vol.2.
Relativity and the global positionning system, Physics Today, Neil Ashby.

A l'aide de vos connaissances et des documents fournis, répondre à la problématique suivante :

L'altitude du satellite est-elle cohérente avec la théorie de la relativité d'Einstein ?

Données :
Masse de la Terre ……$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre ……$R_T = 6{,}38 \times 10^{3}$ km
Constante de gravitation universelle ……$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

Approximation : si x << 1 alors : $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$

Pour cette étude, on se placera dans le **référentiel terrestre supposé galiléen et immobile**

Document 1. Présentation du GPS.

Le nom officiel du GPS (Global Positioning System) est originellement NAVSTAR (Navigation System by Timing and Ranging). Il fut imaginé et mis au point par le département de la défense américaine qui envoya dans l'espace la première génération de satellites à partir de 1977. Depuis lors, celui-ci a largement fait ses preuves et le système GPS actuel comporte une trentaine de satellites (24 en opération plus quelques autres de rechange) en orbites quasi circulaires faisant inlassablement deux révolutions par jour autour de la Terre. Ils sont répartis sur 6 plans distincts inclinés de 55° par rapport à l'équateur et orbitent à une altitude proche de 20 200 km.
Chaque satellite emporte avec lui une ou plusieurs horloges atomiques (au césium ou au rubidium suivant les générations) d'une précision de la nanoseconde.

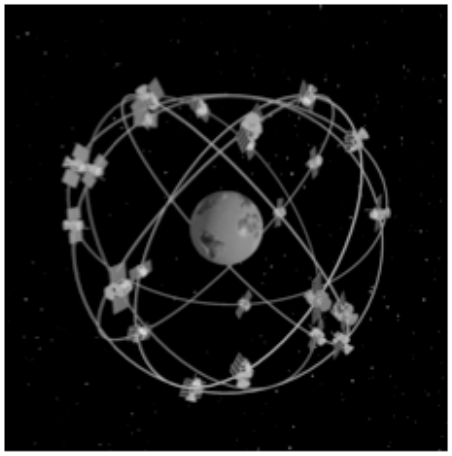

Figure 1 : Allure des orbites des satellites GPS.

Document 2. Principe de localisation du GPS.

On peut déterminer la position d'un point à partir de sa distance à d'autres points. Par exemple, supposons que nous soyons perdus quelque part en France, si nous passons devant un panneau indiquant que Paris est à 150 km sans en donner la direction, nous sommes situés quelque part sur un cercle centré sur Paris et de rayon 150 km. Si par ailleurs un autre panneau nous indique Orléans 230 km, nous sommes sur un cercle centré sur Orléans et de rayon 230 km. Il suffit donc de tracer ces deux cercles et de voir où ils se coupent. Généralement, ils se coupent en deux points (Dieppe et Sainte-Menehould dans notre exemple) et nous avons donc besoin d'une troisième indication afin d'éliminer l'un des deux points.

Pour le système GPS, les panneaux d'indication sont remplacés par des satellites qui envoient très régulièrement un signal électromagnétique indiquant l'heure de l'émission du signal, de manière très précise, ainsi que des informations sur leurs positions respectives. Le récepteur GPS n'a plus qu'à comparer l'heure de réception à celle de l'émission du signal pour calculer le temps de parcours du signal et en déduire la distance le séparant d'un satellite.
Pour bénéficier d'une précision de 10 m dans la direction de propagation du signal électromagnétique envoyé par un satellite GPS, le récepteur GPS doit mesurer la durée de trajet de ce signal avec une précision d'environ 30 ns. Cette précision extrême nécessite de prendre en compte des effets relativistes.
La non prise en compte de ces effets entrainerait une avance des horloges des satellites sur les horloges terrestres d'environ 39 μs par jour.

Document 3 : Dilatation du temps en relativité restreinte.

Une horloge en mouvement « bat » plus lentement par rapport à un ensemble d'horloges synchronisées dans un référentiel galiléen conformément à l'application de la relation sur la dilatation du temps.

Ici, le temps propre de l'horloge atomique Δt_0 est mesuré dans le satellite, là où l'horloge est au repos. L'horloge à bord du satellite « bat » en permanence moins vite que celle placée à l'équateur terrestre.

Remarque : Pour certains élèves, on peut demander de calculer ce décalage de façon plus rigoureuse en raisonnant dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

Document 4. Complément pour la relativité.

Une horloge à proximité d'une masse pesante « bat » plus lentement qu'une horloge plus éloignée : la gravitation « ralentit » le rythme de l'horloge.

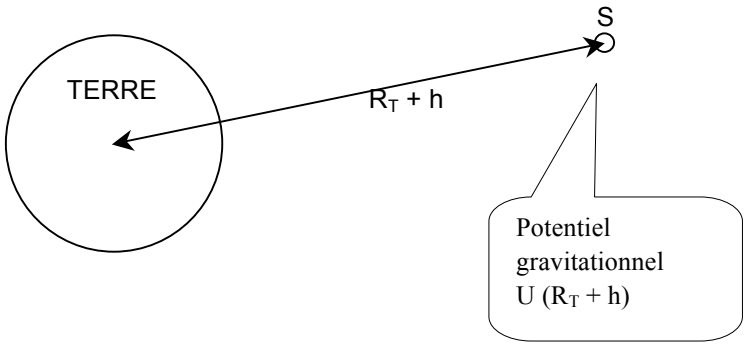

Figure 2 *:* Potentiel gravitationnel au voisinage de la Terre U (R) = - $G.M_T/R$ où G est la constante de la gravitation universelle, M_T, la masse de la Terre et R la distance mesurée par rapport au centre de la Terre.

La différence de rythme entre deux horloges placées dans un potentiel gravitationnel U est donnée par la relation suivante : $\Delta T/T = \Delta U/c^2$.

L'horloge à bord du satellite GPS « bat » en permanence plus vite que celle placée à l'équateur terrestre.

Annexe : Explication de la désynchronisation de l'horloge dans le cas du décalage gravitationnel.

On considère un atome dont le niveau de plus basse énergie correspond à une énergie totale E_0 et qui a un niveau d'énergie plus élevé E_1. Il peut passer de l'un à l'autre en absorbant un photon d'énergie $E_1 - E_0 = h.f$ (où f est la fréquence du photon absorbé et h la constante de Planck).

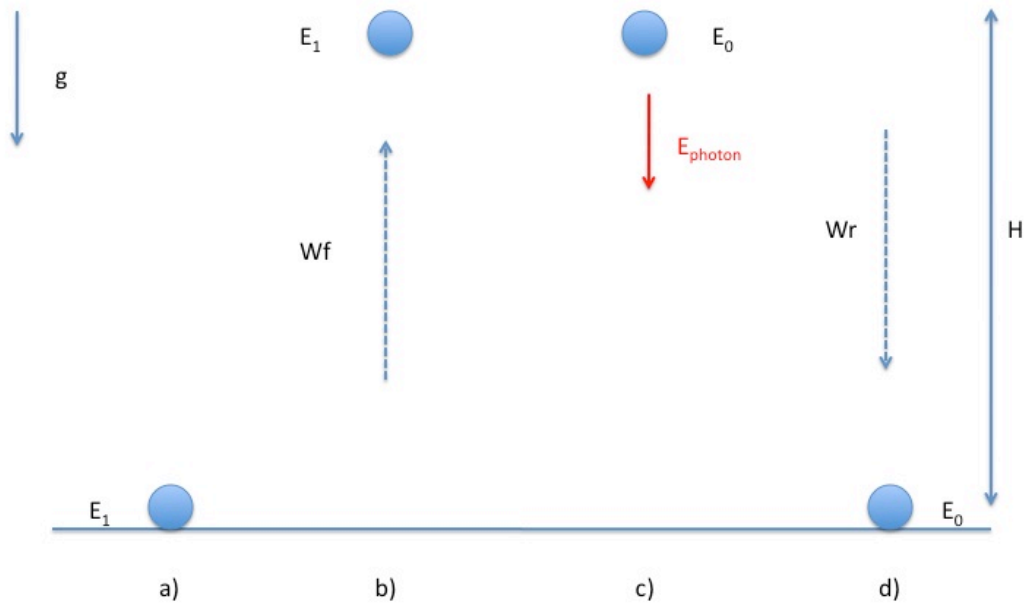

Figure 3. a) Atome d'énergie E_1 au sol ; b) Atome d'énergie E_1 à l'altitude H ; Atome d'énergie E_0 ayant émis un photon à l'altitude H; d) Atome d'énergie E_0 au sol.

On suppose que cet atome se trouve au sol dans l'état d'énergie excité E_1. Pour l'amener à l'altitude H, il faut fournir un travail $Wf = m_1gH = (E_1/c^2).g.H$ car $E_1 = m_1.c^2$.
A cette altitude, l'atome émet un photon, et passe dans l'état d'énergie le plus faible E_0. En le ramenant au sol, on récupère un travail $Wr = m_0gH = (E_0/c^2).g.H$ car $E_0 = m_0.c^2$.

En tout, on a fourni une quantité de travail : $Wf - Wr = (E_1 - E_0).gH/c^2$

En émettant le photon, l'atome a perdu l'énergie $E_1 - E_0$: quelle est l'énergie E_{photon} du photon détecté au sol ?

Si l'énergie se conserve :

$E_1 + Wf - Wr = E_0 + E_{photon}$

Ainsi, au sol, le photon arrive avec un peu plus d'énergie qu'il n'en avait au départ :
$E_{photon} = E_1 - E_0 + Wf - Wr$

$E_{photon} = (E_1 - E_0).(1 + gH/c^2)$

Ce qui correspond à un décalage relatif en fréquence de $\Delta f/f = gH/c^2$ (décalage vers le bleu).

Quand l'altitude H devient grande (par rapport au rayon terrestre), l'intensité de la pesanteur g n'est plus constante, et il faut alors calculer le travail d'une force non constante sur les déplacements considérés. Pour cela, on fait appel au potentiel gravitationnel au voisinage de la Terre $U(R) = - G.M_T/R$ et $\Delta f/f = \Delta U/c^2$.

En effet, par analogie avec l'électricité, la différence de potentiel gravitationnel dans cet exemple est :
$\Delta U = U(R_T + H) - U(R_T)$

$$= GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + H}\right) = \frac{GMH}{R_T^2(1 + H / R_T)} \approx gH \quad \text{si } H \ll R_T$$

La différence de rythme entre deux horloges placées dans un potentiel gravitationnel U est donnée par la relation suivante : $\Delta T/T = \Delta U/c^2$.