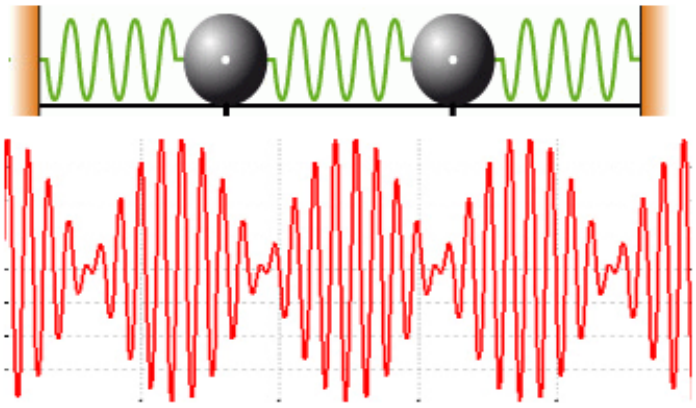
Préparation aux Olympiades Internationales de Physique
Compléments de cours CPGE

Cours sur les oscillateurs couplés



OLYMPIADES INTERNATIONALES
DE PHYSIQUE - IPHO

Julien Courteaud
Lycée Blaise Pascal - Rouen

Année 2017-18

Contents

1 Oscillateurs couplés **5**

1.1 Oscillateur mécanique couplé à deux degrés de liberté . . . 5

1.1.1 Système et modélisation . . . 5

1.1.2 Mise en équation . . . 6

1.1.3 Equations couplées et notion de couplage . . . 6

1.1.4 Résolution . . . 6

1.1.4.1 Découplage du système . . . 6

1.1.4.2 Résolution des équations découplées . . . 7

1.1.4.3 Solutions pour le mouvement de chaque masse . . . 8

1.1.4.4 Utilisation des conditions initiales . . . 8

1.1.5 Approfondissement : notion de modes propres . . . 9

1.1.5.1 Mode symétrique . . . 9

1.1.5.2 Mode antisymétrique . . . 9

1.1.5.3 Cas général : superposition des deux modes propres . . . 9

1.1.5.4 Visualisation du phénomène : animation . . . 9

1.1.6 Cas d'un faible couplage : k'<<k : phénomène de battements . . . 10

1.1.6.1 Conditions initiales et solutions . . . 10

1.1.6.2 Faible couplage et battements . . . 10

1.1.6.3 Evolution temporelle des solutions . . . 11

1.1.6.4 Une situation analogue : les battements dans le domaine des ondes sonores . . . 12

1.2 Une étude par analogie : oscillateur électrique, cas du couplage capacitif . . . 13

1.2.1 Montage et conditions initiales . . . 13

1.2.2 Mise en équation . . . 13

1.3 Exercices d'entraînement . . . 16

1.3.1 Quelques annales... . . . 16

1.3.1.1 Battements et musique (d'après QCM IPhOs CPGE 2015) . . . 16

1.3.1.2 Battements pour un système masses-ressorts (d'après QCM IPhOs CPGE 2015) . . . 16

1.3.1.3 Battements et effet Doppler (d'après QCM IPhOs CPGE 2016) . . . 16

1.3.1.4 Double pendule (d'après QCM IPhOs CPGE 2017) . . . 16

1.3.2 Pendules pesants couplés . . . 17

1.3.3 Entraînement de deux horloges . . . 18

Chapter 1

Oscillateurs couplés

L'objectif de ce cours est d'approfondir la notion d'oscillateur qui est omniprésente dans de nombreux domaines de la physique. Nous avons déjà pu rencontrer dans le cours l'exemple de l'oscillateur harmonique et de l'oscillateur amorti (en électronique et en mécanique).

Nous allons enrichir ici le problème en considérant non plus un oscillateur mais plusieurs oscillateurs, dont les comportements vont être couplés, c'est à dire non indépendants. Ce phénomène de couplage, omniprésent dans différents domaines de la physique, est riche et offre de nombreuses applications, des plus fondamentales (résonance dans une cavité laser) aux plus pratiques (techniques d'accordages d'une guitare).

Ce phénomène de couplage nous permettra d'approfondir également les notions de fréquences propres et de modes propres vues en début d'année.

1.1 Oscillateur mécanique couplé à deux degrés de liberté

1.1.1 Système et modélisation

On considère ici 2 masses identiques m, repérées par des points matériels M_1 et M_2. Ces deux masses sont reliées par un ressort de constante de raideur k' et de longueur à vide l_0. De plus, chaque masse est reliée au bâti par un ressort identique, de constante de raideur k et de même longueur à vide l_0. Le déplacement est unidimensionnel et se fait selon un axe noté Ox.

Dans la situation d'équilibre, les trois ressorts ont une longueur égale à leur longueur à vide (la distance entre les deux bâtis a été choisie en fonction...). On négligera les phénomènes de frottements dans cette étude.

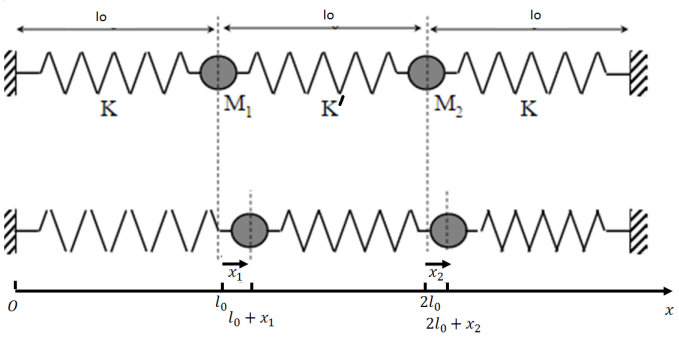


Figure 1.1.1: Représentation schématique du système étudié d'oscillateurs couplés

On notera, de gauche à droite : ressort 1, ressort 2 et ressort 3, et l_1, l_2 et l_3 leurs longueurs respectives.

1.1.2 Mise en équation

Adoptons la rédaction habituelle de mécanique et décrivons :
Les systèmes : Deux systèmes seront ici à considérer successivement : {Le point matériel M_1 de masse m}, {Le point matériel M_2 de masse m}
Le référentiel : terrestre supposé galiléen

Pour le point matériel M_1 :

Bilan des forces :

$$\begin{cases} \text{Le poids } \overrightarrow{P_1} \text{ et la réaction } \overrightarrow{R_1} \text{ qui se compensent} \\ \text{La force de rappel du ressort de gauche :} \\ \overrightarrow{F_{r1g}} = -k\left(l_1 - l_0\right)\overrightarrow{u_x} = -kx_1\overrightarrow{u_x} \\ \text{La force de rappel du ressort de droite :} \\ \overrightarrow{F_{r1d}} = +k'\left(l_2 - l_0\right)\overrightarrow{u_x} = +k'\left(x_2 - x_1\right)\overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

Equation du mouvement :

On peut alors appliquer le principe fondamental de la dynamique, dans le référentiel terrestre supposé galiléen à M_1:

$$m\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{F_{r1g}} + \overrightarrow{F_{r1d}}$$

Or l'accélération s'écrit : $\overrightarrow{a_1} = \ddot{x}_1\overrightarrow{u_x}$, on en déduit donc :

$$m\ddot{x}_1\overrightarrow{u_x} = -kx_1\overrightarrow{u_x} + k'\left(x_2 - x_1\right)\overrightarrow{u_x}$$

Soit, après projection sur la direction Ox et simplification, l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{x}_1 = -\frac{k+k'}{m}x_1(t) + \frac{k'}{m}x_2(t)}$$

Pour le point matériel M_2 :

Bilan des forces :

$$\begin{cases} \text{Le poids } \overrightarrow{P_2} \text{ et la réaction } \overrightarrow{R_2} \text{ qui se compensent} \\ \text{La force de rappel du ressort de gauche :} \\ \overrightarrow{F_{r2g}} = -k'\left(l_2 - l_0\right)\overrightarrow{u_x} = -k'\left(x_2 - x_1\right)\overrightarrow{u_x} \\ \text{La force de rappel du ressort de droite :} \\ \overrightarrow{F_{r2d}} = +k\left(l_3 - l_0\right)\overrightarrow{u_x} = +k\left(-x_2\right)\overrightarrow{u_x} = -kx_2\overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

Equation du mouvement :

On peut alors appliquer le principe fondamental de la dynamique, dans le référentiel terrestre supposé galiléen à M_2:

$$m\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{F_{r2g}} + \overrightarrow{F_{r2d}}$$

Or l'accélération s'écrit : $\overrightarrow{a_2} = \ddot{x}_2\overrightarrow{u_x}$, on en déduit donc :

$$m\ddot{x}_2\overrightarrow{u_x} = -kx_2\overrightarrow{u_x} - k'\left(x_2 - x_1\right)\overrightarrow{u_x}$$

Soit, après projection sur la direction Ox et simplification, l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{x}_2 = -\frac{k+k'}{m}x_2(t) + \frac{k'}{m}x_1(t)}$$

1.1.3 Equations couplées et notion de couplage

La mise en équation précédente fait apparaître des équations couplées, c'est à dire que chaque équation fait intervenir deux paramètres : $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Ceci signifie qu'il n'est pas possible de résoudre indépendamment ces deux équations. (De même que si l'on dispose d'un système de deux équations à deux inconnues, il faudra utiliser les deux équations pour résoudre le système).

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{k+k'}{m}x_1(t) + \dfrac{k'}{m}x_2(t) & (1) \\ \ddot{x}_2 = -\dfrac{k+k'}{m}x_2(t) + \dfrac{k'}{m}x_1(t) & (2) \end{cases}$$

Physiquement, cela signifie que le mouvement d'une masse dépend du mouvement de l'autre, ce qui est assez intuitif : la position de chaque masse conditionne la force exercée par le ressort central.

On parle ainsi de **couplage entre les deux masses**.

1.1.4 Résolution

1.1.4.1 Découplage du système

La résolution de ce système d'équations n'est pas triviale. Les équations sont en effet différentielles.. Pour le résoudre, on réalise un changement de variable. Nous allons introduire deux nouvelles variables, notées *s(t)* (pour somme) et *d(t)* (pour différence), telles que :

$$\begin{cases} s(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ d(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

Calculons alors la "somme" des deux équations différentielles, ainsi que leur "différence" :

$$\begin{cases} (1)+(2): & \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\dfrac{k+k'}{m}x_1(t) + \dfrac{k'}{m}x_2(t) - \dfrac{k+k'}{m}x_2(t) + \dfrac{k'}{m}x_1(t) \\ (1)-(2): & \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\dfrac{k+k'}{m}x_1(t) + \dfrac{k'}{m}x_2(t) + \dfrac{k+k'}{m}x_2(t) - \dfrac{k'}{m}x_1(t) \end{cases},$$

Soit encore :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\dfrac{k}{m}x_1(t) - \dfrac{k}{m}x_2(t) = -\dfrac{k}{m}(x_1(t) + x_2(t)) \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\dfrac{k+2k'}{m}x_1(t) + \dfrac{k+2k'}{m}x_2(t) = -\dfrac{k+2k'}{m}(x_1(t) - x_2(t)) \end{cases}$$

Constatons alors que $\ddot{s} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$ et que $\ddot{d} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$. On en déduit le nouveau système :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{s} + \dfrac{k}{m}s(t) = 0 \\ \ddot{d} + \dfrac{k+2k'}{m}d(t) = 0 \end{cases}}$$

Nous avons donc toujours un système d'équations différentielles, mais cette fois les équations sont découplées : la première porte uniquement sur $s(t)$, et la seconde sur $d(t)$.

Nous reconnaissons ici deux équations caractéristiques d'un oscillateur harmonique que nous pouvons donc résoudre.

1.1.4.2 Résolution des équations découplées

Utilisons les méthodes de résolution vues dans le cours sur l'oscillateur harmonique. On introduit des pulsations propres ω_1 et ω_2 telles que :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}} \end{cases}$$

Le système précédent peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \ddot{s} + \omega_1^2 s(t) = 0 \\ \ddot{d} + \omega_2^2 d(t) = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont alors de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} s(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) \\ d(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}}$$

Les valeurs des constantes dépendent des conditions initiales.

1.1.4.3 Solutions pour le mouvement de chaque masse

Les grandeurs pertinentes pour la compréhension du phénomène ne sont pas s(t) et d(t), mais $x_1(t)$ et $x_2(t)$, qui représentent la position de chacun des masses par raport à la position d'équilibre.

Il est cependant possible de calculer ces grandeurs connaissant $s(t)$ et $d(t)$. En effet :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{s(t) + d(t)}{2} \\ x_2(t) = \dfrac{s(t) - d(t)}{2} \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_2 t))}{2} \\ x_2(t) = \dfrac{A_1 \cos(\omega_1 t) - A_2 \cos(\omega_2 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) - B_2 \sin(\omega_2 t))}{2} \end{cases}}$$

1.1.4.4 Utilisation des conditions initiales

Supposons ici des conditions initiales classiques : à l'instant initial, on écarte les masses de leurs positions d'équilibre d'une quantité :

$$\begin{cases} X_1 \text{ pour la masse } M_1 \\ X_2 \text{ pour la masse } M_2 \end{cases}$$

Et on les lache alors sans vitesse initiale. Nous avons donc 4 conditions initiales (une en position et une en vitesse pour chaque masse), et 4 constantes à calculer.

- Calcul des positions initiales :

$$\begin{cases} x_1(0) = X_1 = \dfrac{A_1 + A_2}{2} & (3) \\ x_2(0) = X_2 = \dfrac{A_1 - A_2}{2} & (4) \end{cases}$$

On obtient un système de deux équations à deux inconnues, que nous pouvons résoudre :

$$\begin{cases} (3) + (4) : & \dfrac{X_1 + X_2}{2} = \dfrac{A_1 + A_2 + A_1 - A_2}{2} = A_1 \\ (3) - (4) : & \dfrac{X_1 - X_2}{2} = \dfrac{A_1 + A_2 - A_1 + A_2}{2} = A_2 \end{cases}$$

- Calcul des vitesses initiales :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{-\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t) - \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t) + B_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t))}{2} \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{-\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t) + B_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - B_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t))}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0 = \dfrac{B_1 \omega_1 + B_2 \omega_2}{2} \\ \dot{x}_2(0) = 0 = \dfrac{B_1 \omega_1 - B_2 \omega_2}{2} \end{cases} \text{, soit } \begin{cases} B_1 + B_2 = 0 \\ B_1 - B_2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système trivial impose : $B_1 \omega_1 = B_2 \omega_2 = 0$, soit $B_1 = B_2 = 0$

- Solution générale :

Ainsi, les mouvements de chaque masse sont caractérisés par :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{X_1 + X_2}{2} \cos(\omega_1 t) + \dfrac{X_1 - X_2}{2} \cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = \dfrac{X_1 + X_2}{2} \cos(\omega_1 t) - \dfrac{X_1 - X_2}{2} \cos(\omega_2 t) \end{cases}}$$

1.1.5 Approfondissement : notion de modes propres

L'étude précédente montre que, quelles que soient les conditions initiales imposées sur le système, la réponse de celui-ci sera la somme de deux termes oscillants : l'un à la pulsation propre ω_1, l'autre à la pulsation propre ω_2. Par analogie avec ce que l'on a pu voir sur la corde vibrante par exemple, la solution est donc la superposition de deux modes, que nous appellerons également modes propres. Nous allons chercher à interpréter physiquement ce que sont ces modes propres.

1.1.5.1 Mode symétrique

Conditions initiales :

On suppose qu'on impose ici $X_1 = X_2$ (on écarte les deux masses de la même quantité)

Solutions :

Les solutions deviennent alors :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{X_1 + X_2}{2}\cos(\omega_1 t) = X_1\cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) = \dfrac{X_1 + X_2}{2}\cos(\omega_1 t) = X_1\cos(\omega_1 t) \end{cases}$$

Interprétation physique :

On constate alors que $\forall t$, $x_1(t) = x_2(t)$: les solutions sont purement sinusoïdales. Les deux masses oscillent en phase et avec la même pulsation ω_1. On constate que le ressort central garde une longueur constante. Cette solution est appelé **mode propre symétrique**.

1.1.5.2 Mode antisymétrique

Conditions initiales :

On suppose qu'on impose ici $X_1 = -X_2$ (on écarte les deux masses de quantités opposées)

Solutions :

Les solutions deviennent alors : $\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{X_1 - X_2}{2}\cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = -\dfrac{X_1 - X_2}{2}\cos(\omega_2 t) \end{cases}$ soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1\cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = -X_1\cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

Interprétation physique :

On constate alors que $\forall t$, $x_1(t) = -x_2(t)$: les solutions sont purement sinusoïdales. Les deux masses oscillent en opposition de phase et avec la même pulsation ω_2. Le milieu du ressort central reste alors fixe. Cette solution est appelé **mode propre antisymétrique**.

1.1.5.3 Cas général : superposition des deux modes propres

Nous avons déjà vu que la solution est, dans le cas général du régime libre, la superposition des deux modes propres. Chacun de ces modes propres correspond à des conditions initiales particulières imposées sur le système. On peut là aussi noter l'analogie avec la corde vibrante pour laquelle on pouvait contraindre la corde à osciller dans un des modes propres en imposant les "bonnes" conditions extérieures (oscillation à la fréquence du mode propre).

1.1.5.4 Visualisation du phénomène : animation

On pourra se reporter au site :

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/couplage.html qui illustre les solutions dans diverses configurations et pour différentes conditions initiales.

1.1.6 Cas d'un faible couplage : k'<<k : phénomène de battements

1.1.6.1 Conditions initiales et solutions

Nous allons supposer ici les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_1(0) = A \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

On suppose de plus les vitesses initiales nulles. Il s'agit d'un cas particulier des conditions initiales vues en 2.1.4. avec $X_2 = 0$. On peut ainsi appliquer les résultats précédents et déduire :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{X_1}{2}\cos(\omega_1 t) + \dfrac{X_1}{2}\cos(\omega_2 t) = \dfrac{X_1}{2}\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] \\ x_2(t) = \dfrac{X_1}{2}\cos(\omega_1 t) - \dfrac{X_1}{2}\cos(\omega_2 t) = \dfrac{X_1}{2}\left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right] \end{cases}$$

Rappelons alors les formules de trigonométrie : $\begin{cases} \cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{b-a}{2}\right) \\ \cos a - \cos b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{b-a}{2}\right) \end{cases}$

On obtient alors :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \\ x_2(t) = X_1\sin\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \end{cases}$$

On constate alors que les solutions sont le **produit de deux fonctions sinusoïdales** : l'une oscillant à la pulsation $\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}$, l'autre à la pulsation $\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$

1.1.6.2 Faible couplage et battements

Nous allons de plus supposer maintenant que **le ressort central a une constante de raideur très inférieure à celle des ressorts externes**, soit $k \gg k'$. Ce cas correpond à un faible couplage. Reprenons l'expression des pulsations propres :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}} \end{cases} \quad \text{avec la condition } k \gg k'.$$

On peut alors réécrire ω_2 sous la forme : $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}\left(1+\dfrac{2k'}{k}\right)} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\sqrt{1+\dfrac{2k'}{k}} = \omega_1\sqrt{1+\dfrac{2k'}{k}}$. En utilisant le fait que $\dfrac{2k'}{k} \ll 1$, on peut réaliser un développement limité à l'ordre1 : $\sqrt{1+\dfrac{2k'}{k}} \approx 1+\dfrac{k'}{k}$

Finalement on obtient :

$$\boxed{\omega_2 \approx \omega_1\left(1+\frac{k'}{k}\right)}$$

Comme $k' \ll k$, on peut alors constater que les deux pulsations propres ω_1 et ω_2 ont des valeurs très proches.

On peut alors calculer :

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2} = \dfrac{1}{2}\left[\omega_1+\omega_1\left(1+\dfrac{k'}{k}\right)\right] \approx \omega_1 \\ \dfrac{\omega_2-\omega_1}{2} = \dfrac{1}{2}\left[\omega_1\left(1+\dfrac{k'}{k}\right)-\omega_1\right] \approx \omega_1\dfrac{k'}{2k} \end{cases}$$

On peut ainsi écrire les solutions sous la forme approchée :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1\cos(\omega_1 t)\cos\left(\omega_1\dfrac{k'}{2k}t\right) \\ x_2(t) = X_1\sin(\omega_1 t)\sin\left(\omega_1\dfrac{k'}{2k}t\right) \end{cases}$$

Chaque solution est ainsi le produit de deux termes sinusoïdaux :

$$\begin{cases} \text{Une sinusoïde “rapide”, à la pulsation } \omega_1\text{, pour laquelle on peut définir une période } T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} \\ \text{Une sinusoïde “lente”, à la pulsation } \omega' = \omega_1\dfrac{k'}{2k} \ll \omega_1\text{, pour laquelle on peut définir une période } T' = \dfrac{2\pi}{\omega'} \end{cases}$$

On constate également que les deux fonctions sont en quadrature de phase. Ces résultats traduisent le **phénomène de battements**.

Là aussi on peut se reporter à l'animation :
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/couplage.html

1.1.6.3 Evolution temporelle des solutions

On peut tracer les courbes correspondantes :

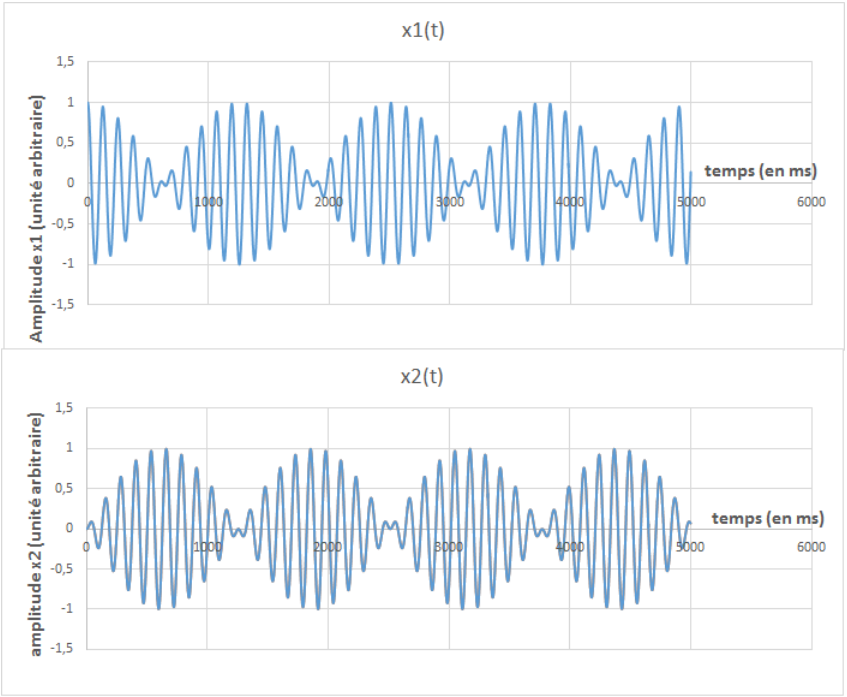


Figure 1.1.2: Simulations numérique des signaux dans le cas d'un faible couplage

Les courbes ont ici été tracées avec $k = 20k'$.

1.1.6.4 Une situation analogue : les battements dans le domaine des ondes sonores

Nous pouvons constater sur l'exemple précédent que le phénomène de battements est du, mathématiquement, à la **somme de deux fonctions sinusoïdales de fréquences (ou pulsations) voisines**. L'expérience présentée ici permet de recréer cette situation mathématique dans un autre domaine de la physique, celui des ondes acoustiques.

Nous disposons pour cela de deux diapasons, qui génèrent initialement deux notes (signaux purement sinusoïdaux) à la même pulsation. Nous allons alors "detuner" le diapason, c'est à dire modifier légèrement la fréquence de la note émise par l'un des deux diapasons, et mesurer l'onde sonore résultante. Celle-ci sera bien la somme de deux fonctions sinusoïdales de pulsations voisines.

- Schéma expérimental

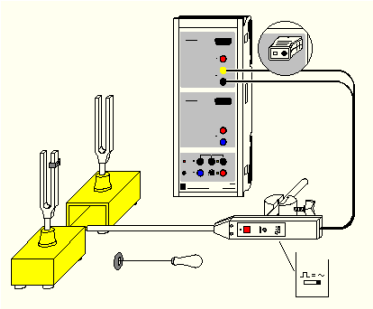


Figure 1.1.3: Schéma de l'expérience de battements

- Observations expérimentales

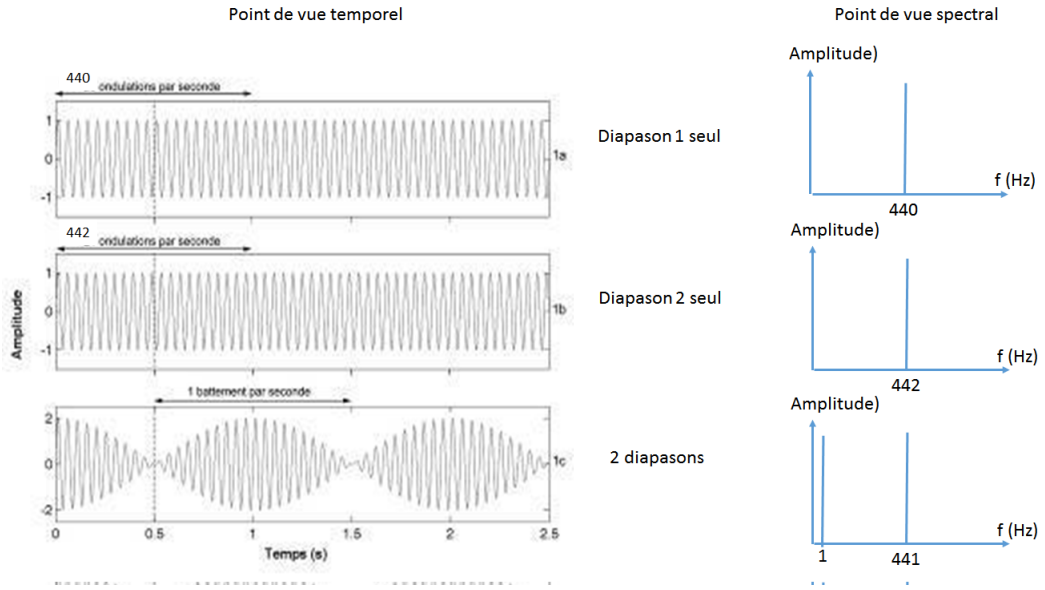


Figure 1.1.4: Observations expérimentales : point de vue temporel ou spectral

Les courbes ci-dessus présentent les signaux temporels et les spectres associés à chaque diapason pris seul, puis au signal résultant de leur superposition. Les batements apparaissent ainsi et sont audibles à l'oreille. On peut également interpréter les spectres obtenus :

- Le signal de fréquence 441 Hz, appelé **porteuse**, correspond à la note entendue (proche d'un La).
- Le signal de fréquence 1 Hz traduit la fréquence des extinctions du signal sonore, soit la **fréquence de battement**.

1.2 Une étude par analogie : oscillateur électrique, cas du couplage capacitif

Nous avons déjà vu dans le cours qu'il existe des analogies entre des situations mécaniques et électroniques, dès lors que l'on obtient la même équation différentielle. Nous allons ici étudier un montage électronique qui va, nous allons le voir, nous amener au même système d'équations différentielles que précédemment. On retrouvera alors les notions vues sur le système mécanique : modes propres, fréquences propres, battements dans le cas d'un couplage faible,.. Ainsi que le fait que le régime libre est la superposition des deux modes propres.

1.2.1 Montage et conditions initiales

Considérons le schéma suivant :

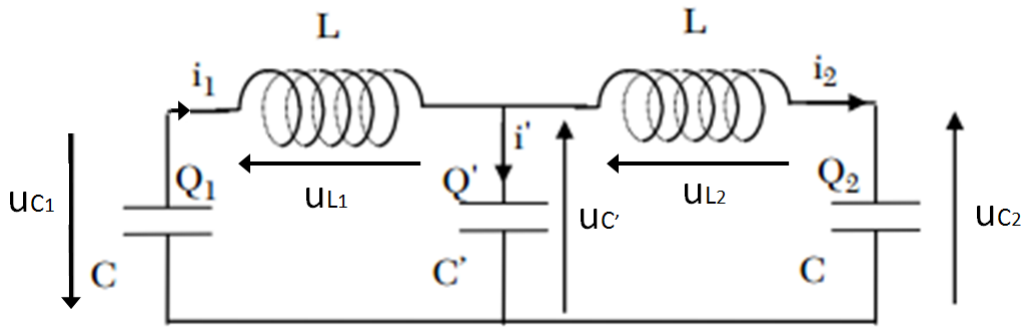


Figure 1.2.1: Circuit électrique étudié

On applique alors les conditions initiales suivantes :

- Le condensateur de gauche est initialement chargé avec la charge Q_0. On note alors U_{c0} la tension correspondante : $U_{c0} = \dfrac{Q_0}{C}$
- Les autres condensateurs sont initialement déchargés.
- Initialement, aucun ne circule dans le circuit

Remarque : un interrupteur ouvert sur la branche de gauche que l'on ferme à $t = 0$ permet de réaliser ces conditions.

1.2.2 Mise en équation

Ecrivons les lois habituelles en électronique :

- Les caractéristiques des condensateurs donnent, en convention récepteur :
  - $i_1(t) = C.\dfrac{du_{C1}}{dt}$
  - $i'(t) = C'.\dfrac{du_{C'}}{dt}$
  - $i_2(t) = C.\dfrac{du_{C2}}{dt}$
- On peut alors écrire la loi des noeuds : $i_1(t) = i'(t) + i_2(t)$, dont on déduit : $C.\dfrac{du_{C1}}{dt} = C'.\dfrac{du_{C'}}{dt} + C.\dfrac{du_{C2}}{dt}$, soit :

$$C'.\frac{du_{C'}}{dt} = C.\frac{du_{C1}}{dt} - C.\frac{du_{C2}}{dt}$$

- On peut alors intégrer entre t = 0 et t :

$$\int_{t=0}^{t} C' du_{C'} = \int_{t=0}^{t} C_1 du_{C1} - \int_{t=0}^{t} C du_{C2}, \text{ soit : } C' \left[u_{C'}(t)\right]_0^t = C \left[u_{C1}(t)\right]_0^t - C \left[u_{C2}(t)\right]_0^t$$

Utilisons alors les conditions initiales. On sait par ailleurs que la tension aux bornes du condensateur est une grandeur continue, on en déduit ainsi :

$$\begin{cases} \text{Pour } C_1 : \ u_{C1}(0^+) = u_{C1}(0^-) = U_{c0} \\ \text{Pour } C' : \ u_{C'}(0^+) = u_{C'}(0^-) = 0 \\ \text{Pour } C_2 : \ u_{C2}(0^+) = u_{C2}(0^-) = 0 \end{cases}$$

On obtient alors : $C' u_{C'}(t) = C u_{C1}(t) - C u_{C2}(t) - C U_{C0}$, soit :

$$u_{C'}(t) = \frac{C}{C'} u_{C1}(t) - \frac{C}{C'} u_{C2}(t) - \frac{C}{C'} U_{C0} (5)$$

$\longmapsto$Utilisons alors les lois des mailles pour garder seulement deux inconnues : u_{C1} et u_{C2} :

- Dans la maille de gauche :

$$u_{C1} + u_{L1} + u_{C'} = 0$$

Or on sait que pour la bobine : $u_{L1}(t) = L.\frac{di_1}{dt} = LC.\frac{d^2 u_{C1}}{dt^2}$. Et on vient de voir dans (5) que $u_{C'}(t) = \frac{C}{C'} u_{C1}(t) - \frac{C}{C'} u_{C2}(t) - \frac{C}{C'} U_{C0}$. On en déduit alors :

$$u_{C1}(t) + LC.\frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + \frac{C}{C'} u_{C1}(t) - \frac{C}{C'} u_{C2}(t) - \frac{C}{C'} U_{C0} = 0$$

On divise alors par LC pour obtenir :

$$\boxed{\frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC'} + \frac{1}{LC}\right) u_{C1}(t) - \frac{1}{LC'} u_{C2}(t) = \frac{1}{LC'} U_{C0}} (6)$$

- Dans la maille de droite :

$$u_{C'} = u_{L2} + u_{C2}$$

Or on sait que pour la bobine : $u_{L2}(t) = L.\frac{di_{12}}{dt} = LC.\frac{d^2 u_{C2}}{dt^2}$. Et on vient de voir que $u_{C'}(t) = \frac{C}{C'} u_{C1}(t) - \frac{C}{C'} u_{C2}(t) - \frac{C}{C'} U_{C0}$. On en déduit alors :

$$\frac{C}{C'} u_{C1}(t) - \frac{C}{C'} u_{C2}(t) - \frac{C}{C'} U_{C0} = LC.\frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + u_{C2}(t)$$

On divise alors par LC pour obtenir :

$$\boxed{\frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC'} + \frac{1}{LC}\right) u_{C2}(t) - \frac{1}{LC'} u_{C1}(t) = -\frac{1}{LC'} U_{C0}} (7)$$

Bilan :
On obtient ainsi le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_{C1}}{dt^2} + \left(\dfrac{1}{LC'} + \dfrac{1}{LC}\right) u_{C1}(t) - \dfrac{1}{LC'} u_{C2}(t) = \dfrac{1}{LC'} U_{C0} & (6) \\ \dfrac{d^2u_{C2}}{dt^2} + \left(\dfrac{1}{LC'} + \dfrac{1}{LC}\right) u_{C2}(t) - \dfrac{1}{LC'} u_{C1}(t) = -\dfrac{1}{LC'} U_{C0} & (7) \end{cases}$$

Cette forme est bien analogue à ce que l'on avait obtenu dans le cas de l'oscillateur mécanique. On peut constater les grandeurs analogues :

$$\boxed{\begin{cases} u_c \longleftrightarrow & x \\ L \longleftrightarrow & m \\ 1/C \longleftrightarrow & k \\ 1/C' \longleftrightarrow & k' \end{cases}}$$

On peut ainsi déduire par analogie les pulsations propres : $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{2}{C'}\right)}$. On rappelle que **la solution générale sera la superposition de ces deux modes propres**. Dans le cas d'un faible couplage (C'<<C), on retrouvera le **phénomène de battement**s.

1.3 Exercices d'entraînement

1.3.1 Quelques annales...

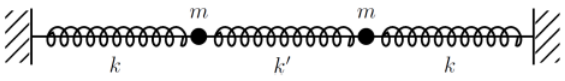
1.3.1.1 Battements et musique (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)

Un chef d'orchestre est situé entre deux instruments qui doivent produire un La_3 ($f = 440$Hz). Le premier musicien joue un la de fréquence $f_1 = 439$ Hz et le deuxième $f_2 = 443$ Hz. Quelle est la fréquence des battements que le chef d'orchestre entend ?

(a) 441 Hz
(b) 2 Hz
(c) 1,5 Hz
(d) 4 Hz

1.3.1.2 Battements pour un système masses-ressorts (d'après QCM IPhOs CPGE 2015)

On considère deux points matériels de masse m oscillant sans frottement sur un axe horizontal, les points étant reliés respectivement à des parois fixes par des ressorts idéaux de raideur k et entre eux par un ressort de raideur $k' \ll k$.



Lorsqu'on observe des battements, que peut-on dire de leur fréquence ?

(a) $f \simeq \frac{1}{2\pi}\frac{k'}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (b) $f \simeq \frac{1}{4\pi}\frac{k'}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (c) $f \simeq \frac{1}{2\pi}\frac{k}{k'}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (d) $f \simeq \frac{1}{4\pi}\frac{k}{k'}\sqrt{\frac{k}{m}}$

1.3.1.3 Battements et effet Doppler (d'après QCM IPhOs CPGE 2016)

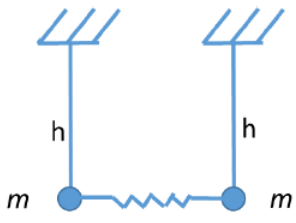
Cet exercice pourra être traité après avoir vu le cours sur l'effet Doppler..

Un petit train électrique se dirige en ligne droite à vitesse constante v vers un émetteur/récepteur d'ultrasons, de fréquence f et de célérité c. Que peut-on dire des battements obtenus par superposition du signal émis et du signal reçu après réflexion sur le train ?

(a) La fréquence des battements est $2fv/c$ et la fréquence de la porteuse est légèrement supérieure à f.
(b) La fréquence des battements est fv/c et la fréquence de la porteuse est légèrement supérieure à f.
(c) La fréquence des battements est $2fv/c$ et la fréquence de la porteuse est légèrement inférieure à f.
(d) La fréquence des battements est fv/c et la fréquence de la porteuse est légèrement inférieure à f.

1.3.1.4 Double pendule (d'après QCM IPhOs CPGE 2017)

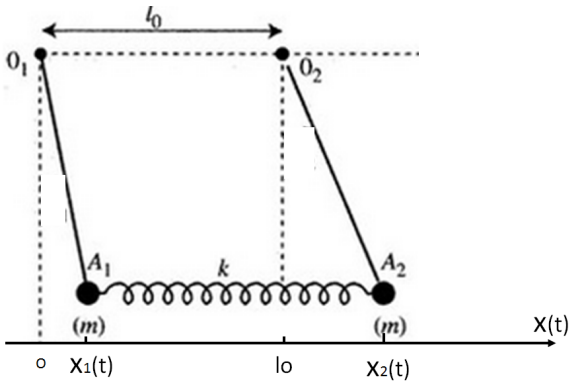
Deux pendules de masse m et de longueur h sont attachés par un ressort de raideur K et de longueur à vide l_0. La distance entre les deux masses est initialement de l_0. Quelle est la seule expression possible, pour la fréquence du mode propre de plus haute fréquence ?



(a) $\sqrt{\frac{2g}{h} + \frac{2K}{m}}$
(b) $\sqrt{\frac{g}{h} + \frac{2K}{m}}$
(c) $\sqrt{\frac{2K}{m}}$
(d) $\sqrt{\frac{K}{2m}}$

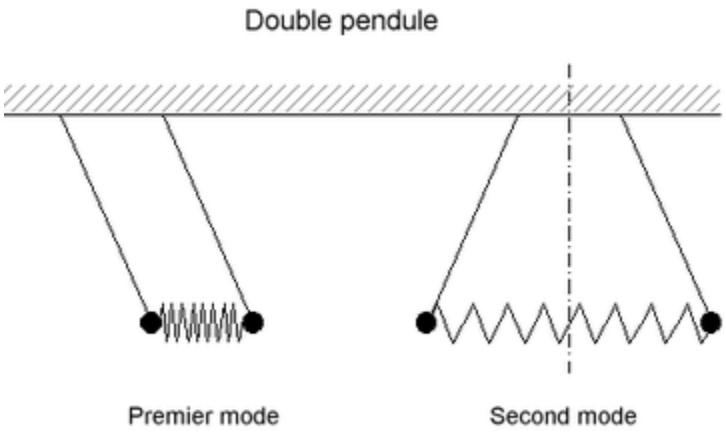
1.3.2 Pendules pesants couplés

On considère deux pendules simples identiques de masse m, de longueur l, reliés par un ressort de raideur k,de longueur à vide l_0. Les extrémités fixes A et B sont distantes de l_0. Le ressort reste horizontal. On désignera x_1 et x_2 les déplacements des masses m des pendules par rapport à l'équilibre.



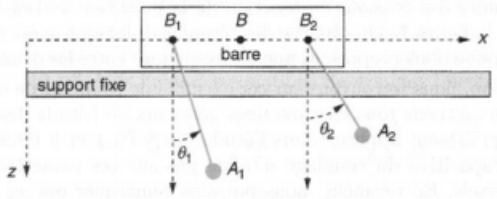
1. Ecrire les équations diérentielles du mouvement. On posera :$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
2. Déterminer les lois de variation au cours du temps de la diérence $d = x_1 - x_2$ et de la somme $s = x_1 + x_2$ des déplacements.
3. A l'instant initial, on a : $x_1 = x_0$et $x_2 = 0$. Exprimer les lois d'évolution $x_1(t)$ et $x_2(t)$ au cours du temps.

Remarque : on pourra constater que les deux modes propres correspondent à :



1.3.3 Entraînement de deux horloges

Huygens a découvert que deux horloges de fréquences propres voisines mais non égales, posées sur une même table suffisamment près l'une de l'autre, et abandonnées avec des conditions initiales quelconques, se synchronisent naturellement c'est-à-dire finissent par osciller avec une même fréquence et un déphasage constant, le déphasage étant d'autant plus faible que les horloges sont proches.



1. Pour rendre compte de cette observation, on adopte le modèle mécanique sommaire de la figure ci-dessus : deux pendules simples de longueurs respectives l_1 et l_2, portant à leurs extrémités A_1 et A_2 des masses identiques m, sont fixés aux points B_1 et B_2 d'une barre de masse M, posée sur un support fixe, et libre de se translater sans frottements le long de l'axe $\vec{u}_x$; on donne $B_1B_2 = 2a$. On repère le mouvement du système par l'abscisse x du milieu B de B_1B_2 et par les angles θ_1 et θ_2 que font les pendules avec la verticale. On limite les calculs à l'ordre un en θ_1 et θ_2.

a) Exprimer les composantes selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ des accélérations des deux masses en fonction de $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$, $\ddot{x}$, l_1 et l_2. En déduire que les tensions des fils valent $T_1 = T_2 = mg$, et établir les équations du mouvement :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1}\theta_1 = -\frac{\ddot{x}}{l_1} \quad ; \quad \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_2}\theta_2 = -\frac{\ddot{x}}{l_2}$$

b) Exprimer la composante selon $\vec{u}_x$ de l'accélération du centre d'inertie G du système. En déduire que :

$$\ddot{x} = -\left(\frac{ml_1\ddot{\theta}_1 + ml_2\ddot{\theta}_2}{M + 2m}\right)$$

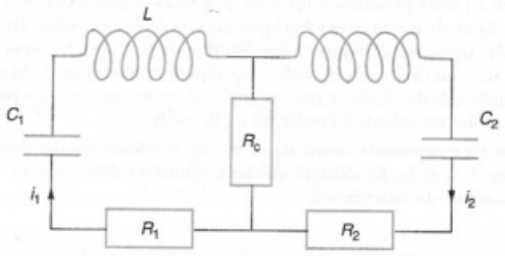
c) On suppose que $l_1 = l_2 = l$. Déterminer les pulsations propres et la solution générale du problème. Interpréter la pulsation du mode antisymétrique. Interpréter la pulsation du mode symétrique lorsque $M \to \infty$.

d) Lorsque $l_1 = l(1-\epsilon)$ et $l_2 = l(1+\epsilon)$ avec $\epsilon << 1$, on obtient les pulsations propres à l'ordre un en ϵ :

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad et \quad \omega'' = \sqrt{\frac{g(M+2m)}{lM}}$$

En déduire sans calcul ce qu'on observe si m«M. Cela permet-il de rendre compte des observations de Huygens ?

2. En réalité les horloges sont amorties par des frottements et on entretient leurs oscillations par un mécanisme appelé échappement. On raisonne désormais sur des oscillateurs électriques R-L-C et on modélise l'amortissement et l'entretien des oscillations par une résistance R qui est négative si la valeur efficace I du courant qui la traverse est inférieure à un seuil I_0. Dans le circuit-modèle de la figure ci-contre, les deux oscillateurs (R_1, L, C_1) et (R_2, L, C_2) sont couplés par une résistance pure R_c. Les résistances R_1 et R_2 sont commandées respectivement par les valeurs efficaces I_1 et I_2 des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$: $R_1 = R_0(1 - I_0/I_1)$ et $R_2 = R_0(1 - I_0/I_2)$.



a) Écrire les équations différentielles couplées (1) et (2) dont sont solutions les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

b) On cherche des solutions de la forme :

$$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad ; \quad i_2(t) = I_2\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$$

Partant de l'équation (1), établir les équations :

$$R_0 I_1\left(1 - \frac{I_0}{I_1}\right) = -R_c I_1 + R_c I_2 \cos\varphi \quad ; \quad -L\omega I_1 + \frac{I_1}{C_1\omega} = R_c I_2 \sin\varphi$$

En déduire sans calcul les deux équations analogues issues de l'équation (2).

c) On suppose pour finir que $C_1 = C(1-\epsilon)$ et $C_1 = C(1+\epsilon)$ avec $\epsilon << 1$. En remplaçant dans les quatre équations obtenues en *2.b*, on obtient :

$$I_1 = I_2 = I = \frac{R_0 I_0}{R_0 + R_c(1-\cos\varphi)} \quad ; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad et \quad \sin\varphi = \frac{\epsilon}{R_c}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Comparer I et I_0 et interpréter qualitativement. Le modèle proposé permet-il d'interpréter les observations de Huygens ?