Problème 3. Modèle simple de décharge de gaz (10 points)

Un courant électrique circulant à travers un gaz est appelé une décharge dans un gaz. Il existe plusieurs types de décharges dans les gaz ; voici quelques exemples : une décharge luminescente dans les lampes d'éclairage, décharge lors d'une soudure à arc et l'éclair bien connu qui se produit entre les nuages et la terre sous la forme de foudre.

Partie A. Décharge de gaz non auto-entretenue (4,8 points)

Dans cette partie du problème on étudie la décharge gazeuse dite non auto-entretenue. Pour maintenir un fonctionnement permanent, un ioniseur externe est nécessaire, ce qui crée Z_{ext} ions (portant une seule charge) et Z_{ext} électrons libres par unité de volume et par unité de temps.

Quand un ioniseur externe est activé, le nombre d'électrons et d'ions commence à augmenter.

Les densités des électrons et des ions ne divergent pas car elles sont limitées par le processus de recombinaison. Dans ce processus, un électron libre se recombine avec un ion pour former un atome neutre. Le nombre de recombinaisons Z_{rec} qui se produit dans le gaz par unité de volume et par unité de temps est donnée par

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

où r est une constante appelée le coefficient de recombinaison ; n_e, n_i désignent respectivement les densités d'électrons et d'ions (nombre d'électrons par unité de volume et nombre d'ions par unité de volume).

A la date $t = 0$, on suppose que l'ioniseur externe est actif et que les densités initiales d'électrons et d'ions dans le gaz sont tous deux égales à zéro. Ensuite, la densité d'électrons $n_e(t)$ dépend du temps t comme suit:

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

où n_0, a et b sont des constantes, et $\tanh x$ représente la tangente hyperbolique de x.

A1	Déterminer n_0, a, b et les exprimer en fonction de Z_{ext} et r **(1,8 points)**

Nous disposions maintenant de deux ioniseurs externes. Quand seul le premier est actif, la densité d'électrons dans le gaz atteint sa valeur d'équilibre $n_{e1} = 12.0 \cdot 10^{10}\ \frac{1}{\text{cm}^3}$. Lorsque le deuxième ioniseur externe est seul actif, la densité d'électrons atteint sa valeur d'équilibre $n_{e2} = 16.0 \cdot 10^{10}\ \frac{1}{\text{cm}^3}$.

A2	Déterminer la densité d'électrons à l'équilibre n_e lorsque les deux ioniseurs externes sont allumés simultanément **(0,6 points).**

Attention! *Dans ce qui suit, on suppose que l'ioniseur externe est activé depuis longtemps de telle sorte que le régime stationnaire soit atteint et que toutes les grandeurs soient indépendantes du temps. On néglige le champ électrique crée par les porteurs de charge.*

Supposons que le gaz occupe tout le volume compris entre les deux plaques conductrices parallèles de surface S ; la distance L entre les deux plaques vérifie $L \ll \sqrt{S}$. Une tension U est appliquée entre les deux plaques , elle crée un champ électrique E. On suppose que les densités des deux types de porteurs de charge restent à peu près constantes le long du tube.

On admet que les électrons (désigné par l'indice e) et les ions (désignés par l'indice i) acquièrent la même vitesse v sous l'action du champ électrique E . Cette vitesse est donnée par la relation :

$$v = \beta E,$$

où β est une constante appelée mobilité de charge.

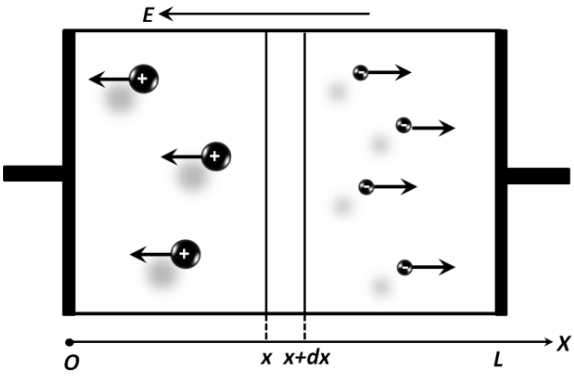
A3	Exprimer le courant électrique I dans le tube en fonction de $U, \beta, L, S, Z_{ext}, r$ et e qui est la charge élémentaire**. (1,7 points)**
A4	Déterminer la résistivité ρ_{gas} du gaz pour des valeurs suffisamment petites de la tension appliquée et l'exprimer en fonction de β, L, Z_{ext}, r et e. **(0,7 points)**

Partie B. Décharge de gaz auto-entretenue (5,2 points)

L'objectif de cette partie du problème est de montrer comment la décharge dans le gaz s'auto-entretient.

Attention! *Dans la suite, on suppose que l'ionisateur externe est actif avec le même taux volumique de création Z_{ext} . On néglige le champ électrique dû aux porteurs de charge. Le champ électrique est donc uniforme le long du tube. La recombinaison peut être complètement ignorée.*

Pour la décharge de gaz auto-entretenue, deux autres processus importants vont être considérés ci-dessous. Le premier processus est une émission d'électrons secondaires, et le second est une formation d'avalanche électronique.



L'émission d'électrons secondaire se produit lorsque les ions frappent l'électrode négative, appelée cathode. Des électrons sont alors extraits de celle-ci puis se déplacent vers l'électrode positive, appelée anode. Le rapport du nombre des électrons extraits $\dot{N}_e$ par unité de temps sur le nombre d'ions $\dot{N}_i$ frappant la cathode par unité de temps est appelé le coefficient d'émission d'électrons secondaires, $\gamma = \dot{N}_e/\dot{N}_i$.

La formation de l'avalanche d'électrons est expliquée comme suit. Le champ électrique accélère les électrons libres qui acquièrent suffisamment d'énergie cinétique pour ioniser les atomes du gaz en les frappant. En conséquence, le nombre d'électrons libres se déplaçant vers l'anode augmente de manière significative. Ce procédé est décrit par le coefficient de Townsend α. Lorsque N_e électrons parcourent une distance dl, cela crée dN_e électrons supplémentaires ; on a la relation :

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$

Le courant total I dans une section droite du tube de gaz est la somme du courant d'ions $I_i(x)$ et du courant d'électrons $I_e(x)$; en régime stationnaire, ces courants ne dépendent que de la coordonnée x, indiquée sur la figure ci-dessus. Le courant d'électrons $I_e(x)$ varie le long de l'axe x selon la formule

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

où A_1, A_2, C_1 sont des constantes.

B1	Déterminer A_1, A_2 et les exprimer en fonction de Z_{ext}, α, e, L, S. **(2 points)**

Le courant ionique $I_i(x)$ varie le long de l'axe x selon la formule

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

où B_1, B_2, C_2 sont des constantes.

B2	Déterminer B_1, B_2 et les exprimer en fonction de $Z_{ext}, \alpha, e, L, S, C_1$ **(0,6 points)**
B3	Donner la condition aux limites pour $I_i(x)$ en $x = L$. **(0,3 points)**
B4	Ecrire la relation entre $I_i(x)$ et $I_e(x)$ en $x = 0$. **(0,6 points)**
B5	Déterminer le courant total I et l'exprimer en fonction de $Z_{ext}, \alpha, \gamma, e, L, S$. On suppose que le courant total reste fini. **(1,2 points)**

Le coefficient α est constant. Lorsque la longueur du tube s'avère être supérieure à une valeur critique L_{cr}, c'est à dire $L > L_{cr}$, l'ioniseur externe peut être désactivé et la décharge devient auto-entretenue.

B6	Déterminer L_{cr} et l'exprimer en fonction de $Z_{ext}, \alpha, \gamma, e, L, S$ **(0,5 points)**

Problem 3. Simplest model of gas discharge (10 points)

An electric current flowing through a gas is called a gas discharge. There are many types of gas discharges including glow discharge in lighting lamps, arc discharge in welding and the well known spark discharge that occurs between the clouds and the earth in the form of lightning.

Part A. Non-self-sustained gas discharge (4.8 points)

In this part of the problem the so-called non-self-sustained gas discharge is studied. To maintain it a permanent operation an external ionizer is needed, which creates Z_{ext} pairs of singly ionized ions and free electrons per unit volume and per unit time uniformly in the volume.

When an external ionizer is switched on, the number of electrons and ions starts to grow. Unlimited increase in the number densities of electrons and ions in the gas is prevented by the recombination process in which a free electron recombines with an ion to form a neutral atom. The number of recombining events Z_{rec} that occurs in the gas per unit volume and per unit time is given by

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

where r is a constant called the recombination coefficient, and n_e, n_i denote the electron and ion number densities, respectively.

Suppose that at time $t = 0$ the external ionizer is switched on and the initial number densities of electrons and ions in the gas are both equal to zero. Then, the electron number density $n_e(t)$ depends on time t as follows:

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

where n_0, a and b are some constants, and $\tanh x$ stands for the hyperbolic tangent.

A1	Find n_0, a, b and express them in terms of Z_{ext} and r. **(1.8 points)**

Assume that there are two external ionizers available. When the first one is switched on, the electron number density in the gas reaches its equilibrium value of be $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^{-3}$. When the second external ionizer is switched on, the electron number density reaches its equilibrium value of $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10}\text{cm}^{-3}$.

A2	Find the electron number density n_e at equilibrium when both external ionizers are switched on simultaneously. **(0.6 points)**

Attention! *In what follows it is assumed that the external ionizer is switched on for quite long period of time such that all processes have become stationary and do not depend on time. Completely neglect the electric field due the charge carriers.*

Assume that the gas fills in the tube between the two parallel conductive plates of area S separated by the distance $L \ll \sqrt{S}$ from each other. The voltage U is applied across the plates to create an electric field between them. Assume that the number densities of both kinds of charge carriers remain almost constant along the tube.

Assume that both the electrons (denoted by the subscript e) and the ions (denoted by the subscript i) acquire the same ordered speed v due to the electric field strength E found as

$$v = bE,$$

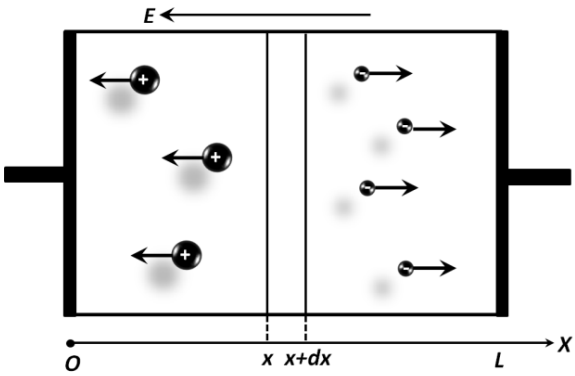
where b is a constant called charge mobility.

A3	Express the electric current I in the tube in terms of $U, b, L, S, Z_{\text{ext}}, r$ and e which is the elementary charge. **(1.7 points)**
A4	Find the resistivity ρ_{gas} of the gas at sufficiently small values of the voltage applied and express it in terms of b, L, Z_{ext}, r and e. **(0.7 points)**

Part B. Self-sustained gas discharge (5.2 points)

In this part of the problem the ignition of the self-sustained gas discharge is considered to show how the electric current in the tube becomes self-maintaining.

Attention! *In the sequel assume that the external ionizer continues to operate with the same Z_{ext} rate, neglect the electric field due to the charge carriers such that the electric field is uniform along the tube, and the recombination can be completely ignored.*



For the self-sustained gas discharge there are two important processes not considered above. The first process is a secondary electron emission, and the second one is a formation of electron avalanche. The secondary electron emission occurs when ions hit on the negative electrode, called a cathode, and the electrons are knocked out of it to move towards the positive electrode, called an anode. The ratio of the number of the knocked electrons $\dot{N}_e$ per unit time to the number of ions $\dot{N}_\iota$ hitting the cathode per unit time is called the coefficient of the secondary electron emission, $\gamma = \dot{N}_e/\dot{N}_\iota$. The formation of the electron avalanche is explained as follows. The electric field accelerates free electrons which acquire enough kinetic energy to ionize the atoms in the gas by hitting them. As a result the number of free electrons moving towards the anode significantly increases. This process is described by the Townsend coefficient α, which characterizes an increase in the number of electrons dN_e due to moving N_e electrons that have passed the distance dl, i.e.

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$

The total current I in any cross section of the gas tube consists of the ion $I_i(x)$ and the electron $I_e(x)$ currents which, in the steady state, depend on the coordinate x, shown in the figure above. The electron current $I_e(x)$ varies along the x-axis according to the formula

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

where A_1, A_2, C_1 are some constants.

B1	Find A_1, A_2 and express them in terms of $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$. **(2 points)**

The ion current $I_i(x)$ varies along the x-axis according to the formula

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

where B_1, B_2, C_2 are some constants.

B2	Find B_1, B_2 and express them in terms of $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$. **(0.6 points)**
B3	Write down the condition for $I_i(x)$ at $x = L$. **(0.3 points)**
B4	Write down the condition for $I_i(x)$ and $I_e(x)$ at $x = 0$. **(0.6 points)**
B5	Find the total current I and express it in terms of $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. Assume that it remains finite **(1.2 points)**

Let the Townsend coefficient α be constant. When the length of the tube turns out greater than some critical value, i.e. $L > L_{\text{cr}}$, the external ionizer can be turned off and the discharge becomes self-sustained.

B6	Find L_{cr} and express it in terms of $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. **(0.5 points)**