Introduction

Ce problème concerne la physique de la calotte polaire du Groenland, la deuxième plus grande calotte polaire dans le monde, Fig. 3.1(a). Pour simplifier, on modélise le Groenland par un rectangle de largeur 2L et de longueur 5L. Le socle rocheux est au niveau de la mer, complètement recouvert de glace incompressible de masse volumique constante ρ_{ice} , Fig. 3.1(b). L'altitude H(x) de la calotte ne varie pas sur l'axe y. H(x) varie de zéro aux côtes ($x = \pm L$), jusqu'à une altitude maximale H_m le long de l'axe central nord-sud (l'axe y), ou ligne de crête, Fig. 3.1(c).

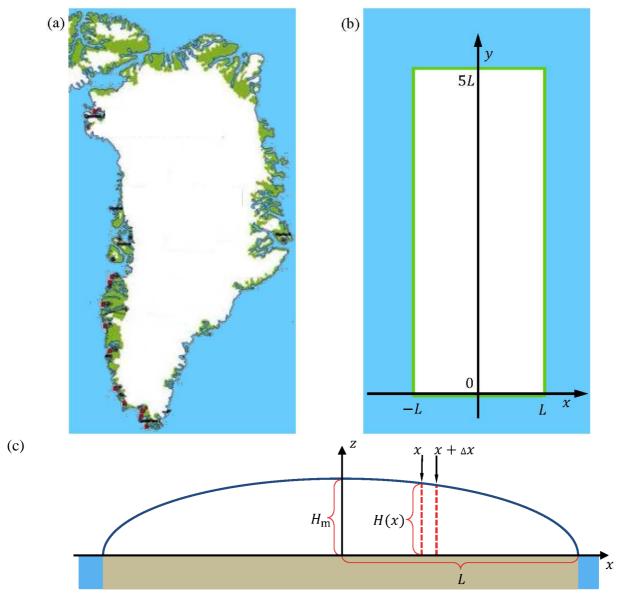


Figure 3.1 (a) Carte du Groenland montrant l'étendue de la calotte (en blanc), les régions côtières libres de glace (en vert) et l'océan (en bleu). (b) Modèle de la calotte Groenlandaise, couvrant une aire rectangulaire dans le plan xy, de côtés 2L et 5L. La ligne de crête ou ligne d'altitude maximale $H_{\rm m}$ correspond à l'axe y. (c) Coupe verticale (plan xz) à travers la calotte, montrant le profil d'altitude H(x) (ligne bleu). H(x) est constant sur l'axe y pour 0 < y < 5L, mais diminue instantanément à zéro à y = 0 et y = 5L. L'axe z marque la position de la ligne de crête. Pour la clarté du schéma, les dimensions verticales sont amplifiées par rapport aux dimensions horizontales. La densité de la glace $\rho_{\rm ice}$ est une constante.

Deux relations utiles:

Dans ce problème, vous pouvez utiliser l'intégrale :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

Et l'approximation $(1+x)^a \approx 1 + ax$, valide pour $|ax| \ll 1$.

Profil d'altitude de la calotte

Sur des échelles de temps courts, le glacier suit la loi de la statique des fluides incompressibles avec une hauteur H(x).

3.1	Exprimer la pression $p(x, z)$ à l'intérieur de la calotte en fonction de la hauteur z audessus du socle rocheux et de la distance x depuis la ligne de crête. On négligera la pression atmosphérique.	0.3	
-----	--	-----	--

On considère une colonne verticale de la calotte à l'équilibre, recouvrant une petite aire $\Delta x \Delta y$ du socle rocheux, entre x et $x + \Delta x$, voir les lignes rouges pointillées Fig. 3.1(c). La valeur de Δy n'a pas d'importance. La composante horizontale de la résultante des forces de pression entre les deux côtés verticaux de la colonne est notée ΔF ; elle est due à la différence d'altitude entre le coté gauche et le côté droit de la colonne; elle est contrebalancée par une force de friction $S_b \Delta x \Delta y$ du socle rocheux sur l'aire $\Delta x \Delta y$, avec $S_b = 100$ kPa.

3.2a	Pour une valeur donnée de x , montrer que lorsque $\Delta x \to 0$, $S_b = k H dH/dx$ et déterminer k .	0.9
	Déterminer l'expression du profil d'altitude $H(x)$ en fonction de ρ_{ice} , g , L , S_b et de la distance x à la ligne de crête. On en déduira que l'altitude maximale de la calotte H_m dépend de la demi-largeur L de la calotte, comme $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Déterminer l'exposant γ , tel que le volume total V_{ice} de la calotte soit proportionnel à l'aire A du rectangle, avec $V_{\text{ice}} \propto A^{\gamma}$.	0.5

Etude dynamique de la calotte polaire

Sur des échelles de temps plus longues, la glace est un fluide visqueux incompressible, qui s'écoule sous l'effet de la gravité du centre de la calotte vers les côtes. Dans le modèle suivant, on se place en régime stationnaire, la hauteur de la glace H(x) est constante au cours du temps; l'ajout de glace par dépôt de neige dans les régions centrales est compensé par la fonte au niveau des régions côtières. On considère la géométrie de la calotte représentée sur la Fig. 3.1(b) et (c), et on suppose également que :

- 1) La glace s'écoule dans le plan xz, en s'éloignant de la ligne de crête (l'axe y).
- 2) Le taux d'accumulation c de la glace (qui s'exprime en m/an) au centre de la calotte est constant.
- 3) La glace peut quitter la calotte uniquement en fondant sur les côtés en $x = \pm L$.
- 4) La composante horizontale (suivant x) de la vitesse d'écoulement de la glace, $v_x(x) = dx/dt$, ne dépend pas de z.



5) La composante verticale de la vitesse d'écoulement de la glace, $v_z(z) = dz/dt$, ne dépend pas de x.

On considère uniquement la région centrale de la calotte, très proche du centre, telle que $|x| \ll L$, et où les variations d'altitude de la calotte sont très petites et peuvent être négligées, ainsi $H(x) \approx H_{\rm m}$.

3.3 En utilisant la conservation de la masse, exprimer la vitesse horizontale de la glace
$$v_x(x)$$
 en fonction de c , x , et $H_{\rm m}$.

En supposant la glace incompressible, de densité constante ρ_{ice} , l'équation locale de conservation de la masse implique la propriété suivante sur les composantes horizontale et verticale de la vitesse d'écoulement de la glace :

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4 Donner l'expression de la composante verticale $v_z(z)$ de la vitesse d'écoulement de la glace selon l'axe z. 0.6

Une volume élémentaire de glace, situé initialement à la surface en (x_i, H_m) va s'écouler avec le temps, en même temps que la calotte en suivant une trajectoire z(x) dans le plan xz.

3.5 Déterminer l'équation de la trajectoire z(x) du volume élémentaire de glace. 0.9

Age et indicateurs climatiques dans une calotte polaire dynamique

En utilisant les composants $v_x(x)$ et $v_z(z)$ de la vitesse d'écoulement de la glace, il est possible de calculer l'âge $\tau(z)$ de la glace à une profondeur donnée $H_{\rm m}-z$ repérée par rapport à la surface de la calotte.

3.6 En se positionnant sur la ligne de crête (x = 0), déterminer l'expression de l'âge $\tau(z)$ de la glace en fonction de l'altitude z au-dessus du socle rocheux.

Une carotte de glace forée à l'intérieur du Groenland contient les couches de glace accumulées dans le passé. Cette glace peut être analysée pour reconstruire les changements passés du climat. Un des meilleurs indicateurs climatiques contenus dans la glace est la composition isotopique de l'eau ou $\delta^{18}0$, défini par :

$$\delta^{18}O = \frac{R_{\rm ice} - R_{\rm ref}}{R_{\rm ref}} \ 1000 \ \%0$$

 $R = [^{18}\mathrm{O}]/[^{16}\mathrm{O}]$ est l'abondance relative des deux isotopes stables de l'oxygène, $^{18}\mathrm{O}$ et $^{16}\mathrm{O}$. La référence R_{ref} reflète la composition isotopique moyenne de l'océan au niveau de l'équateur. Les observations dans la calotte Groenlandais montrent que le $\delta^{18}\mathrm{O}$ dans la neige varie approximativement de façon linéaire avec la température, Fig. 3.2(a). En supposant que ceci a toujours été le cas, le $\delta^{18}\mathrm{O}$ mesuré dans une carotte de glace à la profondeur $H_{\mathrm{m}} - z$ permet d'estimer la température T au Groenland à la date $\tau(z)$.



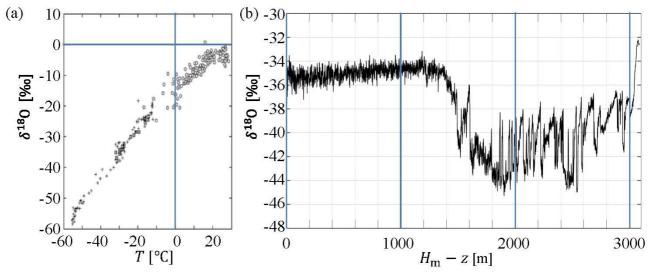


Figure 3.2 (a) δ^{18} O mesuré dans la glace en fonction de la température moyenne annuelle T à la surface de la calotte. (b) Mesures du δ^{18} O en fonction de la profondeur $H_{\rm m}-z$ par rapport à la surface, effectuées sur une carotte de glace du Groenland. La carotte a été forée de la surface jusqu'au socle rocheux, à un endroit précis sur la ligne de crête où l'altitude est $H_{\rm m}=3060$ m.

Les mesures de δ^{18} 0 dans une carotte de glace du Groenland de 3060 m de long montrent un changement abrupt du δ^{18} 0 à 1492 m de profondeur, Fig. 3.2(b), indiquant la fin de la dernière période glaciaire. Cette période de glaciation a commencé il y a 120 000 ans, correspondant à une profondeur de 3040 m dans la carotte (période notée ia : ice age). Elle a été suivie par notre période interglaciaire actuelle qui a commencé il y a 11 700 ans, correspondant une profondeur de 1492 m dans la carotte (periode notee ig : interglacial age). On suppose que ces deux périodes sont caractérisées par deux taux d'accumulations différents, c_{ia} (ice age) et c_{ig} (interglacial age). On peut supposer que H_{m} est constant pendant ces 120 000 années.

3.7a	Déterminer les taux d'accumulation c_{ia} et c_{ig} .	0.8
3.7b	Utiliser les données de la Fig. 3.2 pour calculer le changement de température entre la période glaciaire (ice age) et la période interglaciaire (interglacial age).	0.2

Montée du niveau de la mer due à la fonte de la calotte Groenlandaise

La fonte totale de la calotte Groenlandaise provoquerait une montée du niveau de la mer à l'échelle mondiale. Pour estimer de manière grossière cette montée du niveau de la mer, on peut considérer une montée répartie uniformément sur un unique océan de surface $A_0 = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

3.8	Calculer la montée moyenne du niveau de la mer qui résulterait de la fonte totale de la calotte Groenlandaise, sachant que son aire actuelle est $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{m}^2$ et	
	$S_{\rm b}=100~{\rm kPa}.$	

La calotte Groenlandaise est massive et exerce une attraction gravitationnelle sur l'océan qui l'entoure, provoquant une élévation locale du niveau de la mer. Si la calotte fond, cette élévation



locale de l'océan cessera et le niveau de la mer baissera sur le pourtour du Groenland. Cet effet contrebalancera partiellement l'élévation du niveau de la mer calculée à la question précédente.

Pour estimer la force d'attraction de la calotte Groenlandaise sur l'océan qui l'entoure, la couche de glace du Groenland est maintenant modélisée comme une masse ponctuelle placée à la surface de la Terre, et ayant la masse de toute la couche de glace du Groenland.

La ville de Copenhague est à une distance euclidienne (en ligne droite) de 3500 km du centre de cette masse ponctuelle.

On suppose que la Terre, sans prendre en compte la masse ponctuelle de glace, est une sphère parfaite, avec l'océan recouvrant toute sa surface, d'aire $A_{\rm E}=5.10\times10^{14}{\rm m}^2$. On négligera les effets de la rotation de la Terre.

	A partir de cette approche, déterminer la différence $h_{\rm CPH}-h_{\rm OPP}$ entre le niveau de la mer à Copenhague ($h_{\rm CPH}$), et le niveau de la mer en un point diamétralement opposé au Groenland ($h_{\rm OPP}$).	1.8
--	---	-----

Introduction

This problem deals with the physics of the Greenlandic ice sheet, the second largest glacier in the world, Fig. 3.1(a). As an idealization, Greenland is modeled as a rectangular island of width 2L and length 5L with the ground at sea level and completely covered by incompressible ice (constant density ρ_{ice}), see Fig. 3.1(b). The height profile H(x) of the ice sheet does not depend on the y-coordinate and it increases from zero at the coasts $x = \pm L$ to a maximum height H_m along the middle north-south axis (the y-axis), known as the ice divide, see Fig. 3.1(c).

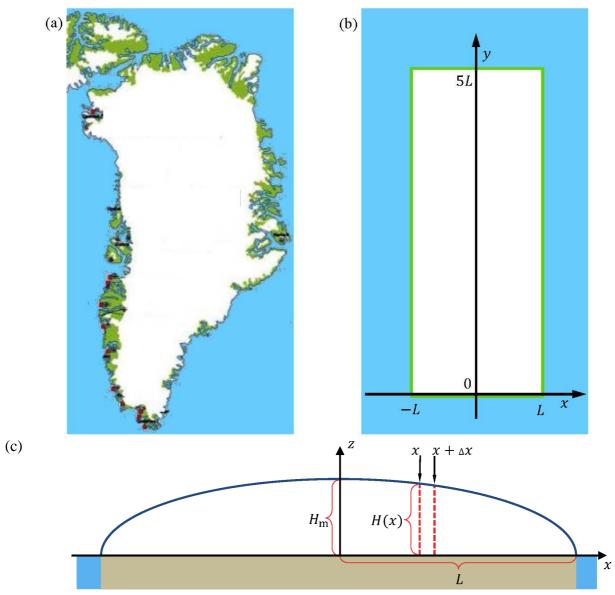


Figure 3.1 (a) A map of Greenland showing the extent of the ice sheet (white), the ice-free, coastal regions (green), and the surrounding ocean (blue). (b) The crude model of the Greenlandic ice sheet as covering a rectangular area in the xy-plane with side lengths 2L and 5L. The ice divide, the line of maximum ice sheet height H_m runs along the y-axis. (c) A vertical cut (xz-plane) through the ice sheet showing the height profile H(x) (blue line). H(x) is independent of the y-coordinate for 0 < y < 5L, while it drops abruptly to zero at y = 0 and y = 5L. The z-axis marks the position of the ice divide. For clarity, the vertical dimensions are expanded compared to the horizontal dimensions. The density ρ_{ice} of ice is constant.

Two useful formulas

In this problem you can make use of the integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

and the approximation $(1 + x)^a \approx 1 + ax$, valid for $|ax| \ll 1$.

The height profile of the ice sheet

On short time scales the glacier is an incompressible hydrostatic system with fixed height profile H(x).

3.1

Consider a given vertical slab of the ice sheet in equilibrium, covering a small horizontal base area $\Delta x \Delta y$ between x and $x + \Delta x$, see the red dashed lines in Fig. 3.1(c). The size of Δy does not matter. The net horizontal force component ΔF on the two vertical sides of the slab, arising from the difference in height on the center-side versus the coastal-side of the slab, is balanced by a friction force $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ from the ground on the base area $\Delta x \Delta y$, where $S_b = 100$ kPa.

3.2a	For a given value of x, show that in the limit $\Delta x \to 0$, $S_b = kH dH/dx$, and determine k	0.9
3.2b	Determine an expression for the height profile $H(x)$ in terms of ρ_{ice} , g , L , S_b and distance x from the divide. The result will show, that the maximum glacier height H_m scales with the half-width L as $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Determine the exponent γ with which the total volume V_{ice} of the ice sheet scales with the area A of the rectangular island, $V_{\text{ice}} \propto A^{\gamma}$.	0.5

A dynamical ice sheet

On longer time scale, the ice is a viscous incompressible fluid, which by gravity flows from the center part to the coast. In this model, the ice maintains its height profile H(x) in a steady state, where accumulation of ice due to snow fall in the central region is balanced by melting at the coast. In addition to the ice sheet geometry of Fig. 3.1(b) and (c) make the following model assumptions:

- 1) Ice flows in the xz-plane away from the ice divide (the y-axis).
- 2) The accumulation rate c (m/year) in the central region is a constant.
- 3) Ice can only leave the glacier by melting near the coasts at $x = \pm L$.
- 4) The horizontal (x-)component $v_x(x) = dx/dt$ of the ice-flow velocity is independent of z.
- 5) The vertical (z-)component $v_z(z) = dz/dt$ of the ice-flow velocity is independent of x.

Consider only the central region $|x| \ll L$ close to the middle of the ice sheet, where height variations of the ice sheet are very small and can be neglected altogether, i.e. $H(x) \approx H_{\rm m}$.

3.3	Use mass conservation to find an expression for the horizontal ice-flow velocity $v_x(x)$ in terms of c , x , and $H_{\rm m}$.	0.6
-----	---	-----

From the assumption of incompressibility, i.e. the constant density ρ_{ice} of the ice, it follows that mass conservation implies the following restriction on the ice flow velocity components

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Write down an expression for the z dependence of the vertical component $v_z(z)$ of the ice-flow velocity.	0.6	
-----	--	-----	--

A small ice particle with the initial surface position (x_i, H_m) will, as time passes, flow as part of the ice sheet along a flow trajectory z(x) in the vertical xz-plane.

3.5 Derive an expression for such a flow trajectory $z(x)$.	0.9
--	-----

Age and climate indicators in the dynamical ice sheet

Based on the ice-flow velocity components $v_x(x)$ and $v_z(z)$, one can estimate the age $\tau(z)$ of the ice in a specific depth $H_{\rm m}-z$ from the surface of the ice sheet.

3.6 Find an expression for the age
$$\tau(z)$$
 of the ice as a function of height z above ground, right at the ice divide $x = 0$.

An ice core drilled in the interior of the Greenland ice sheet will penetrate through layers of snow from the past, and the ice core can be analyzed to reveal past climate changes. One of the best indicators is the so-called δ^{18} 0, defined as

$$\delta^{18}O = \frac{R_{\rm ice} - R_{\rm ref}}{R_{\rm ref}} \ 1000 \ \%_0,$$

where $R = [^{18}0]/[^{16}0]$ denotes the relative abundance of the two stable isotopes $^{18}0$ and $^{16}0$ of oxygen. The reference R_{ref} is based on the isotopic composition of the oceans around Equator.

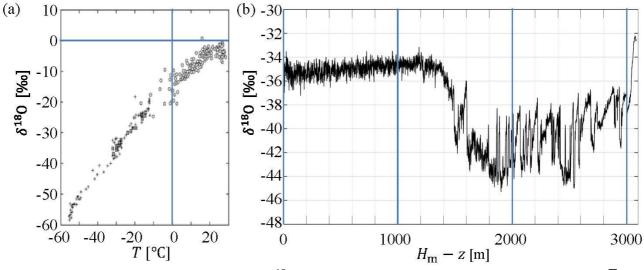


Figure 3.2 (a) Observed relationship between $\delta^{18}0$ in snow versus the mean annual surface temperature T. (b) Measurements of $\delta^{18}0$ versus depth $H_{\rm m}-z$ from the surface, taken from an ice core drilled from surface to bedrock at a specific place along the Greenlandic ice divide where $H_{\rm m}=3060$ m.

Observations from the Greenland ice sheet show that $\delta^{18}0$ in the snow varies approximately linearly with temperature, Fig. 3.2(a). Assuming that this has always been the case, $\delta^{18}0$ retrieved from an ice core at depth $H_{\rm m}-z$ leads to an estimate of the temperature T near Greenland at the age $\tau(z)$.

Measurements of $\delta^{18}0$ in a 3060 m long Greenlandic ice core show an abrupt change in $\delta^{18}0$ at a depth of 1492 m, Fig. 3.2(b), marking the end of the last ice age. The ice age began 120,000 years ago, corresponding to a depth of 3040 m, and the current interglacial age began 11,700 years ago, corresponding to a depth of 1492 m. Assume that these two periods can be described by two different accumulation rates, c_{ia} (ice age) and c_{ig} (interglacial age), respectively. You can assume H_{m} to be constant throughout these 120,000 years.

3.7a	Determine the accumulation rates c_{ia} and c_{ig} .	0.8
	Use the data in Fig. 3.2 to find the temperature change at the transition from the ice age to the interglacial age.	0.2

Sea level rise from melting of the Greenland ice sheet

A complete melting of the Greenlandic ice sheet will cause a sea level rise in the global ocean. As a crude estimate of this sea level rise, one may simply consider a uniform rise throughout a global ocean with constant area $A_0 = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

	Calculate the average global sea level rise, which would result from a complete melting	
3.8	of the Greenlandic ice sheet, given its present area of $A_{\rm G}=1.71\times10^{12}{\rm m}^2$ and	0.6
	$S_{\rm b}=100~{\rm kPa}.$	

The massive Greenland ice sheet exerts a gravitational pull on the surrounding ocean. If the ice sheet melts, this local high tide is lost and the sea level will drop close to Greenland, an effect which partially counteracts the sea level rise calculated above.

To estimate the magnitude of this gravitational pull on the water, the Greenlandic ice sheet is now modeled as a point mass located at the ground level and having the total mass of the Greenlandic ice sheet. Copenhagen lies at a distance of 3500 km along the Earth surface from the center of the point mass. One may consider the Earth, without the point mass, to be spherically symmetric and having a global ocean spread out over the entire surface of the Earth of area $A_{\rm E} = 5.10 \times 10^{14} \, {\rm m}^2$. All effects of rotation of the Earth may be neglected.

3.0	Within this model, determine the difference $h_{\rm CPH} - h_{\rm OPP}$ between sea levels in Copenhagen $(h_{\rm CPH})$ and diametrically opposite to Greenland $(h_{\rm OPP})$.	1.8
3.9	Copenhagen (h_{CPH}) and diametrically opposite to Greenland (h_{OPP}) .	

