1. Image d'une charge dans un objet métallique

Introduction – Méthode des images

Une charge ponctuelle q se trouve à proximité d'une sphère métallique, reliée à la terre, de rayon R [voir la figure 1(a)] et, par conséquent, une distribution surfacique de charge est induite à la surface de la sphère. Le calcul du potentiel et du champ électrique à partir de la distribution de la charge à la surface exigerait un effort énorme. Cependant, ce travail peut être simplifié considérablement en utilisant une méthode appelée la méthode des images. Par cette méthode, le champ et le potentiel électrique produits par la charge distribuée sur la sphère, peuvent être représentés par le champ et le potentiel électriques créés par une charge ponctuelle unique q' située à l'intérieur de la sphère, appelée la charge image (ce résultat n'est pas à démontrer). **Remarque: Le champ électrique de cette charge image q' représente le champ et le potentiel électriques seulement à l'extérieur de la sphère et sur sa surface.**

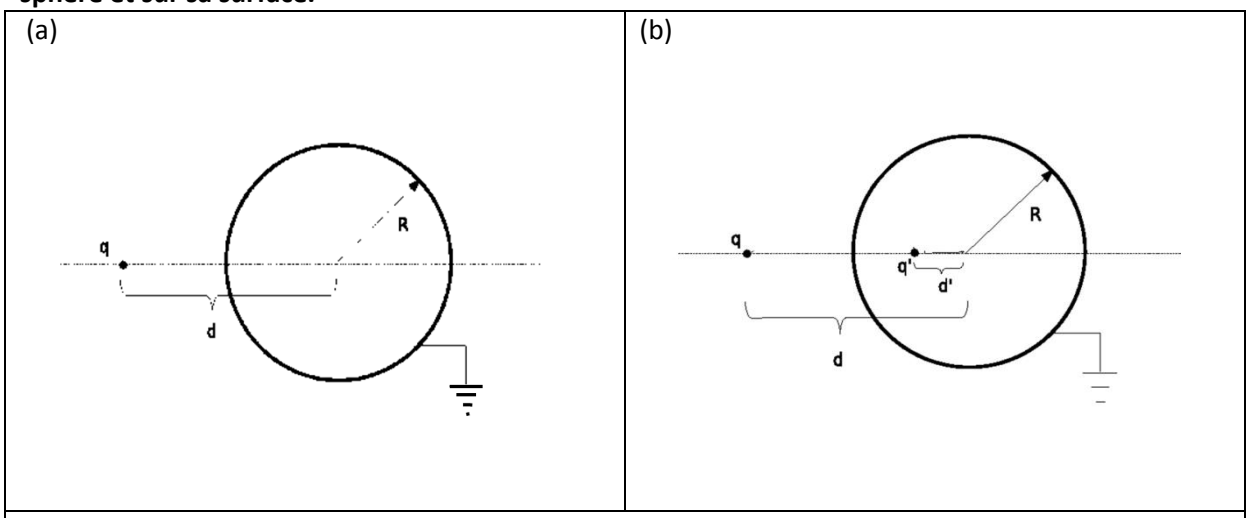

Fig 1. (a) La charge ponctuelle *q* à proximité de la sphère métallique reliée à la terre. (b) Le champ électrique de la charge induite à la surface de la sphère peut être représenté par le champ électrique d'une charge image *q'*.

Question 1 – La charge image

La symétrie du problème exige que la charge *q'* soit placée sur la ligne qui joint la charge ponctuelle et le centre de la sphère [voir la figure 1(b)]

a) Quelle est la valeur du potentiel sur la sphère ? *(0.3 points)*
b) Exprimez q' et la distance d' entre la charge q' et le centre de la sphère en fonction de q, d, et R. *(1.9 points)*
c) Trouvez l'expression du module de la force agissant sur la charge q. Est-elle répulsive ? *(0.5 points)*

Question 2 – L'écrantage du champ électrostatique

Considérez une charge ponctuelle *q* se trouvant à la distance *d* du centre de la sphère métallique de rayon R , reliée à la terre. On voudrait savoir comment la sphère métallique reliée à la terre affecte le

champ électrique au point *A* situé de l'autre côté de la sphère (voir la figure 2). Le point *A* se trouve sur la ligne droite qui joint la charge q au centre de la sphère, à la distance *r* de la charge *q*.

a) Trouvez l'expression du vecteur champ électrique au point A. *(0.6 points)*
b) Pour une très grande distance $r >> d$, trouvez l'expression du champ électrique en utilisant l'approximation $(1+a)^{-2} \approx 1-2a$, où $a << 1$. *(0.6 points)*
c) Pour quelle valeur limite de la distance *d,* la sphère métallique reliée à la terre exerce un écran total sur la charge *q,* tel que le champ électrique au point *A* devienne égal à zéro. *(0.3 points)*

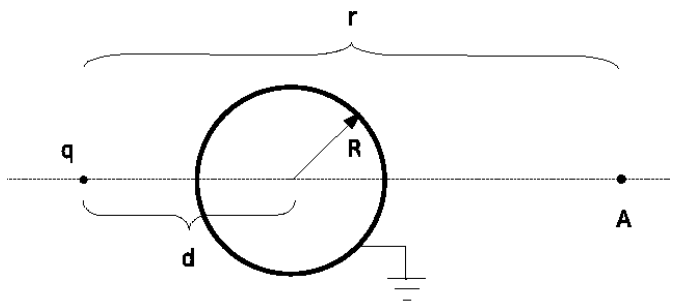

Fig 2. Le champ électrique au point *A* est partiellement écranté par la sphère reliée à la terre.

Question 3 – Petites oscillations dans le champ électrique de la sphère métallique reliée à la terre

La charge ponctuelle *q*, de masse *m,* est suspendue par un fil de longueur *L*, attaché au mur à proximité de la sphère métallique reliée à terre. On néglige tous les effets électrostatiques du mur. La charge ponctuelle oscille comme un pendule (voir la figure 3). Le point auquel le fil est attaché au mur se trouve à la distance l du centre de la sphère. On néglige les effets de la gravité.

a) Trouvez l'expression du module de la force électrique agissant sur la charge ponctuelle *q* pour un angle donné α et indiquez sa direction sur un schéma clair *(0.8 points)*

b) Déterminez la composante de la force agissant dans la direction perpendiculaire au fil en fonction de *L*, l, R, *q* et α *(0.8 points)*

c) Trouvez la fréquence des petites oscillations du pendule. *(1.0 points)*

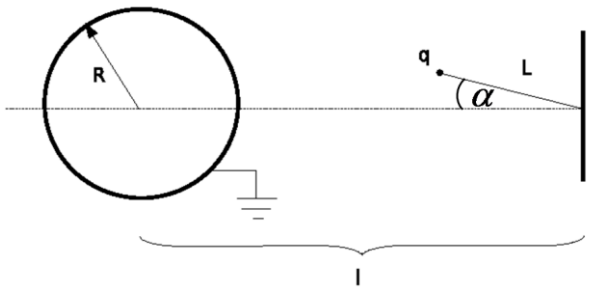

Fig 3. La charge ponctuelle *q* à proximité de la sphère reliée à terre oscille comme un pendule.

Question 4 – L'énergie électrostatique du système

Pour obtenir une distribution des charges électriques, il est important de connaître l'énergie électrostatique du système. Dans notre problème (voir la figure 1.a), l'interaction électrostatique existe entre la charge extérieure *q* et les charges induites sur la sphère, mais aussi entre les charges induites sur la sphère elles-mêmes.

Déterminez les énergies électrostatiques suivantes, en les exprimant en fonction de la charge *q*, du rayon de la sphère *R*, et de la distance *d*:

a) l'énergie électrostatique de l'interaction entre la charge *q* et les charges induites sur la sphère; *(1.0 points)*

b) l'énergie électrostatique de l'interaction entre les charges induites sur la sphère; *(1.2 points)*

c) l'énergie électrostatique totale d'interaction dans le système. *(1.0 points).*

Suggestion: Il y a plusieurs façons de résoudre le problème:

(1) Dans l'une d'entre elle, vous pouvez utiliser l'intégrale suivante:

$$\int_d^\infty \frac{xdx}{\left(x^2 - R^2\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{d^2 - R^2}.$$

(2) Dans une autre, vous pouvez utiliser le fait que pour un ensemble de *N* charges q_i situées aux points $\vec{r}_i, i = 1,\ldots,N$, l'énergie électrostatique est la somme sur toutes les paires de charges:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}.$$